

## Sesión Especial 9

# Álgebra Computacional y Aplicaciones

### Organizadores:

Red EACA: Red Temática de Cálculo Simbólico, Álgebra Computacional y Aplicaciones  
(<https://riemann.unizar.es/RedEACA/index.html>)

- Philippe Gimenez (Universidad de Valladolid)
- Sonia Pérez-Díaz (Universidad de Alcalá)
- Ana Romero (Universidad de La Rioja)

### Descripción:

La lista de ponentes propuesta incluye 11 jóvenes investigadores españoles, pre o postdoctorales, que se dedican a áreas diversas dentro del álgebra computacional como son el álgebra conmutativa, la topología computacional o la formalización de las matemáticas. Además, se ha incluido un reconocido investigador en el área, J. Rafael Sendra, profesor Catedrático de CUNEF-Universidad y uno de los fundadores de la Red EACA.

## Programa

LUNES, 22 de enero:

- 16:00 – 16:30 J. Rafael Sendra (CUNEF-Universidad)  
*El problema de la suprayectividad de una parametrización*
- 16:30 – 17:00 Helena Martín-Cruz (Universitat Jaume I)  
*Quantum error-correcting codes constructed from trace-dependent polynomials*
- 17:00 – 17:30 Beatriz Pascual Escudero (Universidad Politécnica de Madrid)  
*Positive zeros of parametric polynomial families from Reaction Networks*
- 17:30 – 18:00 Rodrigo Iglesias González (Universidad de La Rioja)  
*Algoritmos para la computación del Ideal del Rees de ideales monomiales trigerados en dos variables*

MARTES, 23 de enero:

- 11:30 – 12:00 Mario González-Sánchez (Universidad de Valladolid)  
*Castelnuovo-Mumford regularity of projective monomial curves, sumsets and semigroups*
- 12:00 – 12:30 Carles Checa (NKU Athens and ATHENA Research Innovation Center, Greece)  
*Multigraded Castelnuovo-Mumford regularity and multi-generic initial ideals*
- 12:30 – 13:00 Pablo González-Mazón (Centre Inria d'Université Côte d'Azur)  
*Construction and manipulation of birational trilinear volumes*
- 13:00 – 13:30 Elvira Pérez-Callejo (Universitat Jaume I)  
*An algorithm to compute rational first integrals of polynomial foliations*
- 16:00 – 16:30 Tereso del Río (Coventry University)  
*Optimizando algoritmos algebraicos utilizando Inteligencia Artificial*
- 16:30 – 17:00 Aina Ferrà Marcús (Universitat de Barcelona)  
*Reconstruction of univariate functions from directional persistence diagrams*
- 17:00 – 17:30 Jose Divasón (Universidad de La Rioja)  
*Formalización de álgebra computacional en demostradores interactivos de teoremas*
- 17:30 – 18:00 Josué Tonelli-Cueto (Johns Hopkins University)  
*El Resolvedor DESCARTES es Cuasi-Óptimo en Media*

# El problema de la suprayectividad de una parametrización

J. R. SENDRA

Departamento de Métodos Cuantitativos, CUNEF-Universidad

jrafael.sendra@cunef.edu

**Resumen:** Una parametrización de una variedad algebraica (afín) se puede visualizar como una aplicación de un abierto no vacío del espacio afín de parámetros en la variedad. Desde ese punto de vista, resulta natural preguntarse por la inyectividad y/o la suprayectividad de la aplicación. Esta cuestión, inicialmente de interés teórico, tiene trascendencia en la aplicabilidad de la parametrización. Así, por ejemplo, la no inyectividad implica un aumento de la complejidad de los cálculos y la suprayectividad conduce a la pérdida de información, quizás relevante en el problema que se esté tratando, de la variedad parametrizada. Si la parametrización es racional, la inyectividad está directamente relacionada con los Teoremas de Lüroth, para curvas, y Castelnuovo para superficies. Esta charla se centra en el estudio (primeras aportaciones) del problema de la suprayectividad de parametrizaciones radicales de curvas algebraicas, comentando previamente la correspondiente problemática para el caso parametrizaciones racionales de curvas y superficies.

Las principales ideas presentadas en esta charla proceden del trabajo [1]

## Referencias

- [1] J. Caravantes, J.R. Sendra, D. Sevilla, C. Villarino. Sufficient conditions for the surjectivity of radical curve parametrizations. *Journal of Algebra* (2023): available on line. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2023.11.004>.

**Agradecimientos:** Investigación desarrollada en el marco del proyecto PID2020-113192GB-I00/AEI/ 10.13039/501100011033 (Mathematical Visualization: Foundations, Algorithms and Applications), Ministerio de Ciencia e Innovación.

# Quantum error-correcting codes constructed from trace-depending polynomials

HELENA MARTÍN-CRUZ, CARLOS GALINDO, FERNANDO HERNANDO, DIEGO RUANO

Departamento de Matemáticas e Instituto de Matemáticas y Aplicaciones de Castellón  
(IMAC), Universitat Jaume I

[martinh@uji.es](mailto:martinh@uji.es)

**Abstract:** Many of the known quantum error-correcting codes are stabilizer codes. A *stabilizer code*  $\mathcal{C} \neq \{0\}$  is the common eigenspace (with respect to the eigenvalue 1) of a commutative subgroup of the error group generated by a suitable error basis on the space  $\mathbb{C}^{q^n}$ , where  $\mathbb{C}$  denotes the complex field,  $q$  is a prime power and  $n$  is a positive integer. A main advantage of stabilizer quantum error-correcting codes is that they can be constructed from self-orthogonal classical linear codes [3].

Quantum error-correcting codes with good parameters can be constructed from evaluation codes by evaluating polynomials at the roots of the polynomial trace  $\text{tr}_{2n}(X) = X + X^q + \dots + X^{q^{2n-1}} \in \mathbb{F}_{q^{2n}}[X]$  [1]. In this talk, we propose to evaluate polynomials at the roots of trace-depending polynomials  $a + \text{tr}_{2n}(h(X))$ , where  $a \in \mathbb{F}_{q^{2n}}$  and  $h(X) \in \mathbb{F}_{q^{2n}}[X]$ , and show that this procedure gives rise to stabilizer quantum error-correcting codes with a wider range of lengths than in [1] and with excellent parameters. Namely, we are able to provide new binary records according to [2] and non-binary codes improving the ones available in the literature.

## Referencias

- [1] C. Galindo, F. Hernando, D. Ruano (2019). Classical and quantum evaluation codes at the trace roots. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 65(4), 2593-2602.
- [2] M. Grassl. Bounds on the minimum distance of linear codes (accessed on 29/06/2022) <http://www.codetables.de>
- [3] A. Ketkar, A. Klappenecker, S. Kumar, P. K. Sarvepalli (2006). Nonbinary stabilizer codes over finite fields. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 52(11), 4892-4914.

# Positive zeros of parametric polynomial families from Reaction Networks

BEATRIZ PASCUAL ESCUDERO

Departamento de Matemática e Informática aplicadas a las Ingenierías civil y naval,  
Universidad Politécnica de Madrid

beatriz.pascual@upm.es

**Abstract:** In the study of reaction networks, equilibria correspond to the positive zeros of a parametric family of polynomial systems. Under certain assumptions on the kinetics, the structure of the polynomials is completely determined by the structure of the network: all polynomials are linear combinations of a fixed set of monomials, each one scaled by a free parameter.

Motivated by applications to reaction networks, we will discuss the dimension of the set of positive zeros for such systems, as well as the existence of nondegenerate ones.

This talk is based on joint work with E. Feliu and O. Henriksson.

## Referencias

- [1] E. Feliu, O. Henriksson, B. Pascual-Escudero. Dimension and degeneracy of zeros of parametric polynomial systems arising from reaction networks. (arXiv:2304.02302).

# Algoritmos para la computación del Ideal del Rees de ideales monomiales trigerados en dos variables

RODRIGO IGLESIAS GONZÁLEZ, EDUARDO SÁENZ DE CABEZÓN IRIGARAY

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

roiglesi@unirioja.es

**Resumen:** En esta charla mostraremos unos algoritmos para la obtención del sistema generador mínimo del ideal de definición del Rees (también conocido como las ecuaciones de definición del Algebra del Rees) de ideales monomiales generados mínimamente por tres generadores en el anillo polinómico de dos variables. Este tipo de ideales monomiales generaliza la conocida clase de los ideales monomiales asociados a la parametrización de una curva monomial plana, cuyo Ideal del Rees es conocido en la literatura como el ideal de las curvas en movimiento. En particular, mostraremos una adaptación del algoritmo para este caso particular. Además daremos unas pautas de en que direcciones se preeven extender dichos algoritmos.

## Referencias

- [1] T. Cortadellas Benítez, C. D' Andrea (2015). The Rees algebra of a monomial plane parametrization, *J. Symb. Comput.* 70, 71-105.
- [2] D. A. Cox (2008). The moving curve ideal and the Rees algebra. *Theoretical computer Science*, 392(1), 23-36.

**Agradecimientos:** Ayuda PID2020-116641GB-I00 financiada por MCIN/AEI 10.13039/501100011033.

# Castelnuovo-Mumford regularity of projective monomial curves, sumsets and semigroups

MARIO GONZÁLEZ-SÁNCHEZ, PHILIPPE GIMENEZ

IMUVA, Universidad de Valladolid

mario.gonzalez.sanchez@uva.es

**Abstract:** Let  $A = \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$  be a finite set of  $n \geq 4$  non-negative relatively prime integers, such that  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} = d$ . The  $s$ -fold sumset of  $A$  is the set  $sA$  of integers that contains all the sums of  $s$  elements in  $A$ . On the other hand, given an infinite field  $k$ , one can associate with  $A$  the projective monomial curve  $\mathcal{C}_A$  parametrized by  $A$ ,

$$\mathcal{C}_A = \{(v^d : u^{a_1}v^{d-a_1} : \dots : u^{a_{n-2}}v^{d-a_{n-2}} : u^d) \mid (u : v) \in \mathbb{P}_k^1\} \subset \mathbb{P}_k^{n-1}.$$

The exponents in the previous parametrization of  $\mathcal{C}_A$  define a homogeneous semigroup  $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}^2$ . This talk is based on [2], where we provide several results relating the Castelnuovo-Mumford regularity of  $\mathcal{C}_A$  to the behavior of the sumsets of  $A$  and to the combinatorics of the semigroup  $\mathcal{S}$ . This relation reveals a new interplay between commutative algebra and additive number theory that was first studied in [1] for projective monomial curves.

## Referencias

- [1] J. Elias (2022). Sumsets and Projective Curves. *Mediterr. J. Math.*, 19, 177.
- [2] P. Gimenez, M. González-Sánchez (2023). Castelnuovo-Mumford Regularity of Projective Monomial Curves via Sumsets. *Mediterr. J. Math.*, 20, 287.

**Acknowledgments:** This work was supported in part by the grants PID2019-104844GB-I00 and TED2021-130358B-I00 funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and by the European Union NextGenerationEU/PRTR. The first author thanks financial support from European Social Fund, *Programa Operativo de Castilla y León*, and *Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León*.



# Multigraded Castelnuovo-Mumford regularity and multigeneric initial ideals.

MATÍAS R. BENDER, LAURENT BUSÉ, CARLES CHECA, ELIAS TSIGARIDAS

Department of Informatics and Telecommunications, NKU Athens and ATHENA Research  
Innovation Center, Greece

ccheca@di.uoa.gr

**Abstract:** We review the relevance of regularity as an invariant that governs the computations with polynomial systems by Gröbner bases methods. We will briefly explain the classical results of Bayer and Stillman on the regularity and generic initial ideals with respect to a reverse lexicographical order. In the setting of multi-homogeneous polynomial systems many problems arise: the relative order of the variables of different multi-degree becomes relevant. We will explain the relation between the multigraded Castelnuovo-Mumford regularity and the degrees of the generators of multi-generic initial ideals in this context, by using the machinery of local cohomology and multigraded Betti numbers.

## Referencias

- [1] D. Bayer, M. Stillman (2000). A criterion for detecting m-regularity. *Inventiones Mathematicae*, 1, 1–11.
- [2] D. Maclagan, G. Smith (2004). Multigraded Castelnuovo-Mumford regularity. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 571, 179–212.
- [3] T. Römer (2001). Homological properties of bigraded algebras. *Illinois Journal of Mathematics*. 4, 1361 – 1376.

# Construction and manipulation of birational trilinear volumes

PABLO GONZÁLEZ-MAZÓN, LAURENT BUSÉ

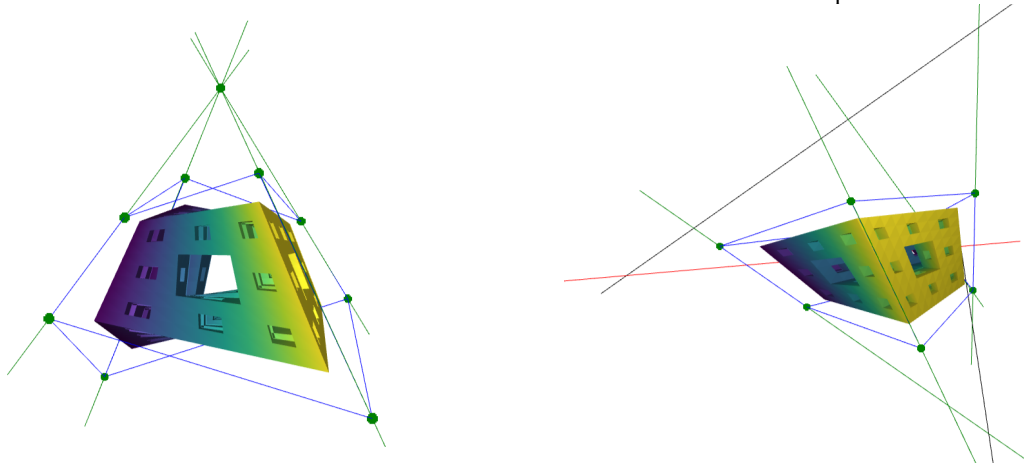
Centre Inria d'Université Côte d'Azur

pablo.gonzalez-mazon@inria.fr

**Abstract:** We present effective methods to construct and manipulate birational maps  $\phi : (\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1)^3 \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$  defined by four trilinear polynomials [1, 2], which determine the first family of nonlinear 3D birational transformations that can be operated with enough flexibility in geometric modeling. A trilinear rational map is defined by  $2 \times 2 \times 2 = 8$  control points  $\mathbf{P}_{ijk} = (1, x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$  in  $\mathbb{R}^4$ , and their associated (nonnegative) weights  $w_{ijk}$  for each  $0 \leq i, j, k \leq 1$ , namely

$$\phi : (s_0 : s_1) \times (t_0 : t_1) \times (u_0 : u_1) \mapsto \sum_{0 \leq i, j, k \leq 1} w_{ijk} \mathbf{P}_{ijk} b_i(s_0, s_1) b_j(t_0, t_1) b_k(u_0, u_1)$$

where  $b_0(s_0, s_1) = s_0 - s_1$  and  $b_1(s_0, s_1) = s_1$ . We address several problems of interest in applications, and solve them by establishing a novel connection between birationality and tensor rank. Specifically, birationality holds if and only if a certain tensor of format  $2 \times 2 \times 2$  has rank one. From this perspective, we can apply tools from a vast literature on tensor rank to the construction of birational maps.



Some of the configurations of control points for which birationality becomes possible.

## Referencias

- [1] L. Busé, P. González-Mazón J. Schicho (2023). Tri-linear birational maps in dimension three. *Math. Comp.* 92.342 , pp. 1837-1866. URL: <https://doi.org/10.1090/mcom/3804>.
- [2] P. González-Mazón, L. Busé. Birational 3D free-form deformations of degree 1 x 1 x 1. Preprint (2023). URL: <https://inria.hal.science/hal-03939273>.

# An algorithm to compute rational first integrals of polynomial foliations

ELVIRA PÉREZ-CALLEJO, CARLOS GALINDO, FRANCISCO MONSERRAT

Departamento de Matemáticas, Universitat Jaume I

callejo@uji.es

**Abstract:** The algebraic integrability problem asks for the existence of a rational first integral of a given foliation defined on the complex plane and for its computation in the affirmative case.

We extend polynomial foliations to foliations on the projective plane or on Hirzebruch surfaces and present an algorithm which gives an answer to the algebraic integrability problem knowing of the genus of the expected rational first integral.

# Optimizando algoritmos algebraicos utilizando Inteligencia Artificial

TERESO DEL RÍO, MATTHEW ENGLAND

Centre of Computer Science and Mathematical Modelling, Coventry University

teresodra@gmail.com

**Resumen:** Los modelos de inteligencia artificial son estocásticos por naturaleza, y por tanto parecen inservibles para obtener resultados exactos como los que proporcionan los algoritmos algebraicos.

Sin embargo, los algoritmos algebraicos toman múltiples decisiones que no afectan a la validez del resultado, como por ejemplo el orden monomial.

Heurísticas creadas por expertos se suelen utilizar para tomar estas decisiones. Sin embargo, los modelos de inteligencia artificial han sido capaces de superar a los expertos en casi todas las áreas imaginables, y eso no es distinto en el tema que nos incumbe [2]. En esta charla veremos cómo los modelos de inteligencia artificial se pueden entrenar para tomar estas decisiones.

Esta charla servirá como resumen de mi tesis, durante la cual he trabajado en diseñar formas de elegir un buen orden de variables para el algoritmo de Descomposición Cilíndrica Algebraica propuesto por Collins en 1975 [1]. Al comienzo de mi tesis propuse una heurística para elegir el orden de variables, luego trabajé en entrenar modelos de inteligencia artificial para tomar estas decisiones y finalmente extraje, utilizando técnicas de interpretación de modelos, heurísticas simples a partir de modelos de inteligencia artificial complejos.

## Referencias

- [1] G. E. Collins (1975). Quantifier Elimination for Real Closed Fields by Cylindrical Algebraic Decomposition. Lecture Notes in Computer Science, Automata Theory and Formal Languages 134-183, <https://doi.org/10.1007/3-540-07407-417>.
- [2] Z. Huang, M. England, D. Wilson, J. Davenport, L. Paulson, J. Bridge (2014). Applying ML to Choosing a Heuristic to Select the Variable Ordering for CAD. Springer, vol. 8543 LNAI, 92-107, [https://doi.org/10.1007/978-3-319-08434-3\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-319-08434-3_8).

**Agradecimientos:** El investigador principal está financiado por Coventry University y puede asistir al congreso gracias al apoyo de la Red EACA.

# Reconstruction of univariate functions from directional persistence diagrams

AINA FERRÀ MARCÚS, CARLES CASACUBERTA, ORIOL PUJOL

Departament de Matemàtiques i Informàtica, Univeristat de Barcelona

aina.ferra.marcus@ub.edu

**Abstract:** Persistent homology computes topological features of a space at different spatial resolutions. More precisely, the persistent homology transform is a function on the sphere  $S^{d-1}$  that associates to each unit vector  $v$  the persistence diagram of sublevel sets of a finite geometric simplicial complex in the direction  $v$ . We study the inverse problem for  $d = 2$  in the case of single-variable functions  $f$ , namely, reconstructing the graph of  $f$  by using persistence diagrams of sublevel sets from height functions in different directions. We provide algorithms when  $f$  is piece-wise linear, where three directions suffice, and for the smooth case, where five directions are needed. The study is motivated by the use of topological data analysis (TDA) together with machine learning in the topic of explainability, more specifically, finding out which information from signals is discriminative for classification by a neural network. We will give an example where TDA is applied as a tool to preprocess electrocardiogram data to identify arrhythmia disease using neural networks and gain information about the classification problem.

# Formalización de álgebra computacional en demostradores interactivos de teoremas

JOSE DIVASÓN, RENÉ THIEMANN, SEBASTIAAN JOOSTEN, AKIHISA YAMADA

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

jose.divason@unirioja.es

**Resumen:** Los demostradores interactivos de teoremas nos ayudan a probar formalmente resultados matemáticos con un ordenador. A pesar de que existen desde hace décadas y de que en los últimos años están teniendo un crecimiento importante, son todavía unos grandes desconocidos para la gran mayoría de matemáticos. En esta charla presentaremos estos sistemas acercándolos a la figura del *matemático puro*, explicando la historia (pasado, presente y futuro), los fundamentos matemáticos subyacentes (lógicas, teorías de tipos, *etc.*), además de qué y cómo se puede demostrar con ellos, incidiendo en trabajos de álgebra computacional. En particular, se presentarán formalizaciones y generación de código verificado del algoritmo de reducción de bases de retículos LLL, el cálculo de la forma normal de Hermite y el algoritmo de factorización de polinomios de Berlekamp–Zassenhaus.

**Agradecimientos:** Ayuda PID2020-116641GB-I00 financiada por MCIN/AEI 10.13039/501100011033.

# El Resolvedor Descartes es Cuasi-Óptimo en Media

JOSUÉ TONELLI-CUETO, ALPEREN A. ERGÜR, ELIAS TSIGARIDAD

Department of Applied Mathematics and Statistics, Johns Hopkins University

josue.tonelli.cueto@bizkaia.eu

**Resumen:** El resolvedor DESCARTES es un algoritmo que usa la regla de signos de Descartes para aislar las raíces reales de un polinomio real. A pesar de que en la práctica es altamente eficiente, todos los análisis de complejidad de este algoritmo no han mostrado que este algoritmo sea más eficiente que otros resolvedores. Esto se debe a que los análisis de complejidad anteriores usaban el paradigma del peor caso. En esta charla, usando un paradigma de complejidad probabilístico, mostramos que el resolvedor DESCARTES es cuasi-óptimo en media (bajo hipótesis probabilísticas robustas). Esto provee así una justificación teórica para la eficiencia en la práctica del resolvedor DESCARTES.

**Agradecimientos:** Parcialmente financiado por una AMS-Simons Travel Grant 2023. Quisiera agradecer a Jazz G. Suchen por sus sugerencias a la hora de investigar y preparar la charla, y a Evgenia Lagoda por su apoyo moral.