Sesión Especial 3

Álgebras no Asociativas

Organizadores:

- Yolanda Cabrera Casado (Universidad de Málaga)
- Iván Ruiz Campos (Universidad de Málaga)

Descripción:
El campo de investigación del álgebra no asociativa ha sido muy desarrollado desde hace décadas. Su aparición en los años 30, cuando fueron definidos dos de los principales tipos: las álgebras de Lie y las de Jordan, se debe a problemas relacionados con las Ecuaciones Diferenciales y la Física. Un ejemplo de álgebras no asociativas recién introducidas son las álgebras de la evolución. Este tipo de álgebras genéticas surgieron con el objetivo de modelar la genética no-Mendeliana. Las álgebras no asociativas han contribuido a resolver problemas de otros campos como la Teoría de Grupos y la Geometría Algebraica. En esta sesión se reúne a un grupo de conferenciantes con el objetivo de fomentar colaboraciones y formar grupos de investigación. Así como el dar a conocer a la comunidad matemática asistente al encuentro, los temas que se trabajan en esta área y su interacción con otras ramas de la matemática.

Programa

LUNES, 22 de enero:

16:00 – 16:30	Cristina Draper Fontanals (Universidad de Málaga) $\mathfrak{g}_2$ *como anillo grupo torcido*
16:30 – 17:00	Xabier García Martínez (Universidad de Vigo) *A universal Kaluzhnin–Krasner embedding theorem*
17:00 – 17:30	Amir Fernández Ouaridi (Universidad de Cádiz) *On the simple transposed Poisson algebras*
17:30 – 18:00	Rosa María Navarro Olmo (Universidad de Extremadura) *Local superderivations on solvable Lie and Leibniz Superalgebras*

MARTES, 23 de enero:

11:30 – 12:00	José Brox López (Universidad de Valladolid) *Identidades diferenciales de las álgebras de matrices*
12:00 – 12:30	Diego Aranda Orna (Universidad de Oviedo) *Automorphism group schemes of some simple Jordan pairs*
12:30 – 13:00	Alejandra S. Córdova-Martínez (Universidad de Zaragoza) *Superpotencias alternadas y simétricas de superpares de Jordan generalizados métricos*
13:00 – 13:30	Irene Paniello Alastruey (Universidad Pública de Navarra) *Álgebras de cocientes de álgebras locales*
16:00 – 16:30	Esther García González (Universidad Rey Juan Carlos) *Descomposición de endomorfismos nilpotentes en suma de raíces de la unidad y endomorfismos de cuadrado cero*
16:30 – 17:00	Andrés Pérez Rodríguez (Universidad de Santiago de Compostela) *Sobre el retículo de subálgebras en álgebras de evolución*
17:00 – 17:30	Javier Rández Ibánez (Universidad de La Rioja) *Constructions on $\mathbb{N}$-graded Lie algebras*
17:30 – 18:00	Jorge Roldán López (Universidad de La Rioja) *Deconstruyendo álgebras de Lie cuadráticas*

$\mathfrak{g}_2$ como anillo grupo torcido

Cristina Draper

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad de Málaga

cdf@uma.es

Resumen: El objetivo es presentar la construcción [1] del álgebra de Lie compacta excepcional $\mathfrak{g}_2$ como un anillo grupo torcido para el grupo $\mathbb{Z}_2^3$ y el anillo $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. El modelo es autocontenido, lo que permite trabajar con $\mathfrak{g}_2$ sin conocimientos algebraicos previos sobre sistemas de raíces, derivaciones de octoniones o productos vectoriales en $\mathbb{R}^7$. En particular, esta construcción proporciona una base ortogonal de elementos semisimples de $\mathfrak{g}_2$ con constantes de estructura enteras.

Referencias

[1] C. Draper (2023). The compact exceptional Lie algebra $\mathfrak{g}_2^c$ as a twisted ring group. Preprint arXiv:2307.12086 [math.RA].

A universal Kaluzhnin–Krasner embedding theorem

Xabier García Martínez

CITMAga y Universidade de Vigo

xabier.garcia.martinez@uvigo.gal

Abstract: Given two groups A and B, the *Kaluzhnin–Krasner universal embedding theorem* states that the wreath product $A \wr B$ acts as a universal receptacle for extensions from A to B [2]. For a split extension, this embedding is compatible with the canonical splitting of the wreath product, which is further universal in a precise sense. This result was recently extended to Lie algebras [3] and cocommutative Hopf algebras [1].

In this talk, we will explore the feasibility of adapting the theorem to other types of algebraic structures. By explaining the underlying unity of the three known cases, our analysis gives the necessary and sufficient conditions for this to happen.

We will also see that the theorem cannot be adapted to a wide range of categories, such as loops, associative algebras, commutative algebras or Jordan algebras. Working over an infinite field, we may prove that amongst non-associative algebras, only Lie algebras admit a Kaluzhnin–Krasner theorem.

Referencias

[1] L. Bartholdi, O. Siegenthaler, T. Trimble (2014). Wreath products of cocommutative Hopf algebras. arXiv:1407.3835.

[2] M. Krasner, L. Kaloujnine (1950). Produit complet de groupes de permutations et problème d'extension de groupes II. Acta Universitatis Szegediensis, 14, 69–82.

[3] V. M. Petrogradsky, Yu. P. Razmyslov, E. O. Shishkin (2007). Wreath products and Kaluzhnin-Krasner embedding for Lie algebras. Proceedings of the American Mathematical Society, 135(3), 625–636.

On the simple transposed Poisson algebras

Amir Fernández Ouaridi

Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz

amir.fernandez.ouaridi@gmail.com

Abstract: Transposed Poisson algebras were introduced as a dual class of the Poisson algebras in the sense of that the roles of the two multiplications in the Leibniz rule are swapped [1]. Precisely, we have the identity $2x\{y,z\} = \{xy,z\}+\{y,xz\}$. This identity can be realized as the left multiplication of the associative commutative algebra is a $\frac{1}{2}$-derivation of the Lie algebra. These derivations of Lie algebras are well-studied (for example, see [4]). The interest in this class is justified by different reasons: the variety of transposed Poisson algebras coincides with the variety of commutative Gelfand-Dorfman algebras [5], transposed Poisson algebras are Jordan brackets [2] or the interesting example of the transposed Poisson structures on the Witt algebra [3]. Some known facts about TPAs include the closure undertaking tensor products, the Koszul self-duality as an operad or the correspondence with weak Leibniz algebras by depolarization. In this talk, we will discuss some results about simple TPAs and we will present a potential way to classify them over fields of positive characteristic. For a further read on the topic of simple TPAs, we refer to the paper of the author [2].

Referencias

[1] C. Bai, R. Bai, L. Guo, Y. Wu (2023). Transposed Poisson algebras, Novikov-Poisson algebras, and 3-Lie algebras, Journal of Algebra, in press.

[2] A. Fernández Ouaridi (2023). On the simple transposed Poisson algebras and Jordan superalgebras. Arxiv: 2305.13848.

[3] B. L. M. Ferreira, I. Kaygorodov, V. Lopatkin (2021). $\frac{1}{2}$-derivations of Lie algebras and transposed Poisson algebras, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, 115, 3, 142.

[4] V. Filippov (1998). δ-Derivations of Lie algebras, Siberian Mathematical Journal, 39, 6, 1218–1230.

[5] B. K. Sartayev (2023). Some generalizations of the variety of transposed Poisson algebras. Arxiv: 2305.12869.

Local superderivations on solvable Lie and Leibniz Superalgebras

R.M. Navarro, L.M. Camacho, B.A. Omirov

Departamento de Matemáticas, Universidad de Extremadura

rnavarro@unex.es

Abstract: Throughout this paper, we show on one hand, that there are nilpotent and solvable Lie superalgebras with infinitely many local superderivations which are not standard superderivations. On the other hand, we show that every local superderivation is a superderivation on the maximal-dimensional solvable Lie superalgebras with model filiform or model nilpotent nilradical. Moreover, we extend the latter result for Leibniz superalgebras by showing that every local superderivation is a superderivation on the maximal-dimensional solvable Leibniz superalgebras with model filiform or model nilpotent non-Lie nilradical.

Referencias

[1] L. M. Camacho, R. M. Navarro, B. Omirov. Mediterr. J. Math. (2023) 20:76. https://doi.org/10.1007/s00009-023-02284-7

Identidades diferenciales de las álgebras de matrices

Jose Brox, Carla Rizzo

Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología, Universidad de Valladolid

josebrox@uva.es

Resumen: Dadas un álgebra asociativa A y un álgebra de Lie L sobre un cuerpo K, una acción de L sobre A es un homomorfismo Lie de L en $\mathrm{Der}(A)$; decimos que A es una L-álgebra. Fijada L, en la variedad de L-álgebras se puede construir la L-álgebra libre $K\langle X|L\rangle$ en una cantidad numerable de variables; una identidad diferencial de A como L-álgebra es entonces un polinomio $f(x_1,\ldots,x_n) \in K\langle X|L\rangle$ tal que las evaluaciones $f(a_1,\ldots,a_n)$ se anulan para todos los $a_1,\ldots,a_n \in A$. En este charla determinaremos un conjunto de generadores minimal del ideal de las identidades diferenciales del álgebra $M_k(K)$ con $\mathrm{char}(K) = 0$ bajo la acción de su álgebra de derivaciones, $L = \mathrm{Der}(M_k(K))$. Además determinaremos los valores de las codimensiones y los cocaracteres diferenciales asociados, y veremos que la variedad de L-álgebras generada por $M_k(K)$ tiene crecimiento casi polinómico para todo $k \geq 2$.

Automorphism group schemes of some simple Jordan pairs

Diego Aranda-Orna

Departamento de Matemáticas, Universidad de Oviedo

diego.aranda.orna@gmail.com

Abstract: The automorphism group schemes of simple Jordan pairs of types I and IV, and of some related Jordan systems, are described.

Superpotencias alternadas y simétricas de superpares de Jordan generalizados métricos

Alejandra S. Córdova-Martínez, Diego Aranda-Orna

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza

acordova@unizar.es

Resumen: Un *superpar de Jordan generalizado* es un par de espacios vectoriales $\mathbb{Z}_2$-graduados $\mathcal{V} = (\mathcal{V}^-, \mathcal{V}^+)$ con un par de aplicaciones trilineales que satisface cierta identidad. Si además cuenta con una forma bilineal par no degenerada superinvariante supersimétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathcal{V}^- \times \mathcal{V}^+ \to \mathbb{F}$ entonces es un *superpar de Jordan generalizado métrico.*

Tenemos una correspondencia entre los superpares de Jordan generalizados métricos (cuya clase se denota **MGJSP**) y los *supermódulos de Lie métricos* (L, M, b) donde L es una superálgebra de Lie, $b \colon L \times L \to \mathbb{F}$ es una forma bilineal par no degenerada invariante supersimétrica y (L, M) es un supermódulo de Lie fiel (cuya clase denotamos por **MFLSM**).

En esta charla se definirán y se estudiarán las superpotencias alternadas y simétricas de los superpares de Jordan generalizados, las cuales obtenemos transfiriendo las construcciones de superpotencias alternadas y simétricas a la clase de superpares de Jordan generalizados métricos usando la construcción de Faulkner. (Lo anterior suponiendo que la característica del cuerpo base es distinta de 2).

Referencias

[1] D. Aranda-Orna (2022). On the Faulkner construction for generalized Jordan superpairs. Linear Algebra and its Applications, 646, 1–28.

[2] D. Aranda-Orna, A.S. Córdova-Martínez. Alternating and symmetric superpowers of metric generalized Jordan superpairs. Preprint: arXiv:2301.09171.

Álgebras de cocientes de álgebras locales

Irene Paniello

Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas, Universidad Pública de Navarra

irene.paniello@unavarra.es

Resumen: El desarrollo de una teoría local de cocientes para sistemas de Jordan (no necesariamente álgebras) nos lleva a considerar la cuestión de cómo son las álgebras de cocientes de las álgebras locales de estos sistemas.
En esta ocasión, a pesar de que nos limitaremos al caso de las álgebras Jordan, mostraremos algunos de los últimos resultados obtenidos en el desarrollo de esta teoría. Estos resultados corresponden a un trabajo conjunto con F. Montaner (Universidad de Zaragoza).

Descomposición de endomorfismos nilpotentes en suma de raíces de la unidad y endomorfismos de cuadrado cero

Esther García, Peter Danchev, Miguel Gómez Lozano

Departamento de Matemática Aplicada, Ciencia e Ingeniería de Materiales y Tecnología Electrónica, Universidad Rey Juan Carlos

esther.garcia@urjc.es

Resumen: Un endomorfismo u es una raíz de la unidad si existe algún natural $m \in \mathbb{N}$ tal que u^m es el endomorfismo identidad, un endomorfismo v es nilpotente si $v^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$, y v es de cuadrado cero si $v^2 = 0$. En esta charla se probará que todo endomorfismo nilpotente v de un Δ-espacio vectorial a izquierda de dimensión n, donde Δ es un anillo de división, se pueden descomponer en la suma de un endomorfismo raíz de la unidad y un endomorfismo de cuadrado cero si y solo si el rango de v es mayor o igual que $\frac{n}{2}$.

Referencias

[1] P. Danchev, E. García, M. Gómez Lozano (2023). Decompositions of endomorphisms into a sum of roots of the unity and nilpotent endomorphisms of fixed nilpotence. Linear Algebra and its Applications, 676, 44-55.

Sobre el retículo de subálgebras en álgebras de evolución

A. Pérez-Rodríguez, M. Ladra, P. Páez-Guillán

Departamento de Matemáticas, Universidade de Santiago de Compostela

andresperez.rodriguez@usc.es

Resumen: La relación entre la estructura de un grupo y la de su retículo de subgrupos está muy desarrollada y ha suscitado un enorme interés en numerosos algebristas destacados ([2]). Cabe destacar que dicho estudio se ha trasladado también a muchas otras estructuras algebraicas, donde es especialmente representativo el caso de las álgebras no asociativas, como son las álgebras de Lie en [1] o las de Leibniz en [3]. No obstante, esta relación es muy poco conocida en álgebras genéticas y, en particular, en álgebras de evolución los estudios son inexistentes.
Las *álgebras de evolución* surgen con el propósito de modelar la genética no mendeliana ([4]), la cual es el lenguaje básico de la biología molecular. El principal objetivo de esta charla es desarrollar la relación existente entre un álgebra de evolución y su retículo de subálgebras, haciendo hincapié en dos de sus principales propiedades: la *distributividad* y la *modularidad*. Tras presentar algunos problemas encontrados a lo largo de nuestra investigación, se caracterizará la distributividad en el caso nilpotente para, por último, comentar algunos resultados respecto de la modularidad en el caso soluble.

Referencias

[1] B. Kolman (1965). Semi-modular Lie algebras. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I Math., 29, 149–163.

[2] R. Schmidt (1994). Subgroup Lattices of Groups. De Gruyter.

[3] S. Siciliano, D. A. Towers (2021). On the subalgebra lattice of a Leibniz algebra. Comm. Algebra, 50, 255–267.

[4] J. P. Tian (2008). Evolution Algebras and their Applications. Springer Berlin Heidelberg.

Agradecimientos: Los autores han sido financiados por la Agencia Estatal de Investigación, con referencia PID2020-115155GB-I00 y por la Xunta de Galicia a través del Grupo de Referencia Competitiva ED431C 2023/31. Además, el ponente también ha sido financiado por una ayuda FPU (con referencia FPU21/05685) del Ministerio de Educación y Formación Profesional.

Constructions on $\mathbb{N}$-graded Lie algebras

Javier Rández-Ibáñez, Pilar Benito, Jorge Roldán-López

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

javier.randez@unirioja.es, pilar.benito@unirioja.es, jorge.roldanl@unirioja.es

Abstract: A Lie algebra $\mathfrak{g}$ admitting a positive natural grading, $\mathfrak{g} = \oplus_{i\geq 1}^{\infty}\mathfrak{g}_i$, is called naturally graded or $\mathbb{N}$-graded. In the finite-dimensional case, these algebras are also known as Carnot algebras and they appear in the study of nilpotent Lie algebras and the associated Lie and discrete groups [1]. In 1997, Shalev and Zelmanov introduced the notion of *narrow Lie algebras*, a class of positively graded Lie algebras in which the homogeneous components are uniformly bounded. Since then, there have been attempts of the classification of $\mathbb{N}$-graded algebras by imposing strong conditions on their narrowness (see [3] and references therein). According to [2], finite-dimensional Carnot algebras appear as quotients of free-nilpotent Lie algebras by homogeneous ideals. In this talk, we will introduce this class of algebras and give constructions that provide examples with broader dimensions of homogeneous components.

Referencias

[1] Y. Cornulier (2016). Gradings on Lie algebras, systolic growth and cohopfian properties of nilpotent groups. Bulletin de la Societé Mathémat,ique de France, 144 (4), 693-744.

[2] G. F.. Leger (1963). Derivations of Lie algebras III. Duke Mathematica Journal, 30 (4), 637-645.

[3] D.V. Millonshchivok (2019). Naturally graded Lie algebras of slow growth. Sbornik Mathematics, 210:6, 862-909114.

Acknowledgments: The authors have been supported by research grant MTM2017-83506-C2-1-P of 'Ministerio de Economía, Industria y Competitividad, Gobierno de España' (Spain) until 2022 and by grant PID2021-123461NB-C21, funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and by "ERDF A way of making Europe" since then.

Deconstruyendo álgebras de Lie cuadráticas

JORGE ROLDÁN-LÓPEZ, PILAR BENITO

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

jorge.roldanl@unirioja.es

Resumen: Un álgebra de Lie cuadrática L es un álgebra de Lie que tiene asociada una forma bilineal φ no degenerada e invariante respecto a su corchete de Lie, es decir,

$$\varphi([x,y],z) + \varphi(x,[y,z]) = 0, \quad \forall x,y \in L.$$

Aunque la familia de álgebras cuadráticas es muy amplia, es posible hacer un estudio deconstructivo que nos permita ir reduciendo los casos a subfamilias más pequeñas, que luego serán ampliadas mediante extensiones. Así, todas las álgebras cuadráticas se pueden obtener como dobles extensiones de álgebras resolubles y estas a su vez proceden de álgebras nilpotentes. Esta deconstrucción sigue el esquema mostrado en [4, Chapter 3] que expande y generaliza resultados de [1], [2] y [3].

Referencias

[1] M. Bordemann (1997). Nondegenerate invariant bilinear forms on nonassociative algebras. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae. New Series*, 66(2):151–201.

[2] G. Favre, L. J. Santharoubane (1987). Symmetric, invariant, nondegenerate bilinear form on a Lie algebra. *Journal of Algebra* 105: 451–464.

[3] V. S. Keith (1984). On invariant bilinear forms on finite-dimensional Lie algebras. *PhD Thesis, Tulane University.*

[4] J. Roldán-López (2023). Quadratic Lie algebras. Algorithms and (de)constructions. *PhD Thesis, Universidad de La Rioja.*

Agradecimientos: Esta investigación ha sido parcialmente financiada por la ayuda MTM2017-83506C2-1-P del 'Ministerio de Economía, Industria y Competitividad' del Gobierno de España desde 2017 hasta 2022 y por la ayuda PID2021-123461NBC21, financiada por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por "ERDF A way of making Europe" desde 2023 en adelante. El autor también ha recibido un contrato predoctoral FPI-2018 de la Universidad de La Rioja y recibido la ayudas ATUR18/43, ATUR19/40 y ATUR21/34 de la misma universidad.