

Sesión Especial 2

Polinomios ortogonales, funciones especiales y aplicaciones

Organizadores:

- Blanca Bujanda (Universidad Pública de Navarra)
- Óscar Ciaurri (Universidad de La Rioja)
- Alberto Lastra (Universidad de Alcalá)
- Pablo Palacios (Universidad Pública de Navarra)
- Víctor Soto-Larrosa (Universidad de Alcalá)

Descripción:

La sesión especial tiene como objetivo abordar problemas de actualidad en las distintas líneas de investigación relacionadas con el estudio de polinomios ortogonales, funciones especiales y sus aplicaciones en distintos ámbitos de la ciencia y la tecnología. El estudio de relaciones estructurales, propiedades algebraicas u otros aspectos a nivel teórico de las funciones especiales y los polinomios ortogonales son de especial interés dentro de la matemática pura. Sin embargo, también presentan múltiples aplicaciones en otras áreas de la matemática, especialmente reseñables son sus relaciones con la cuadratura Gaussiana, la aproximación asintótica de integrales, y otras aplicaciones en el análisis funcional y complejo, la física matemática, la teoría de la aproximación, análisis numérico, las matrices aleatorias, etc.

Sesión especial en recuerdo del Profesor Diego Dominici.

Programa

LUNES, 22 de enero:

- 16:00 – 16:30 Francisco Marcellán (Universidad Carlos III de Madrid)
Truncated classical orthogonal polynomials
- 16:30 – 17:00 Amílcar Branquinho (Universidade de Coimbra)
Polinomios ortogonales y cadenas de Markov
- 17:00 – 17:30 Manuel Mañas (Universidad Complutense)
Ortogonalidad múltiple mixta y la teoría espectral de matrices banda acotadas
- 17:30 – 18:00 Lidia Fernández (Universidad de Granada)
Los polinomios de Zernike y la visualización de estrellas

MARTES, 23 de enero:

- 11:30 – 12:00 Yamilet Quintana (Universidad Carlos III de Madrid)
Mixed-type hypergeometric Bernoulli-Gegenbauer polynomials: some properties
- 12:00 – 12:30 Juan J. Moreno-Balcázar (Universidad de Almería)
Análisis asintótico de una familia de polinomios ortogonales Δ -Sobolev
- 12:30 – 13:00 Juan F. Mañas-Mañas (Universidad de Almería)
Cálculo simbólico de una ecuación en diferencias de segundo orden para polinomios ortogonales tipo Sobolev
- 13:00 – 13:30 Luz Roncal (Basque Center for Applied Mathematics)
A Landis-type result for the semidiscrete heat equation
- 16:00 – 16:30 Misael E. Marriaga (Universidad Rey Juan Carlos)
Approximation by polynomials in Sobolev spaces associated with classical moment functionals
- 16:30 – 17:00 Edmundo J. Huertas (Universidad de Alcalá)
On CMV mixed multiple orthogonal Laurent polynomials on the unit circle
- 17:00 – 17:30 Jorge Arvesú (Universidad Carlos III de Madrid)
Nearest neighbor recurrence relations for some Angelesco multiple orthogonal polynomials
- 17:30 – 18:00 Edgar Labarga Varona (Universidad de la Rioja)
Discrete Appell-Dunkl sequences

JUEVES, 25 de enero:

- 11:30 – 12:00 José Luis López García (Universidad Pública de Navarra)
El método de saddle point en dos o más dimensiones
- 12:00 – 12:30 Ester Pérez Sinusía (Universidad de Zaragoza)
New asymptotic expansions of two new special functions: the \mathcal{H} -function of communication theory and the Moench Integral Transform of Hydrology
- 12:30 – 13:00 Pablo Palacios Herrero (Universidad Pública de Navarra)
A generalization of the Laplace's method for integrals
- 13:00 – 13:30 Blanca Bujanda (Universidad Pública de Navarra)
Integrales Elípticas simétricas. Algunos desarrollos analíticos para $R_J(x, y, z, p)$
- 16:00 – 16:30 Amparo Gil Gómez (Universidad de Cantabria)
Algoritmos numéricos y software para la evaluación de funciones especiales: qué hay de nuevo y qué se necesita
- 16:30 – 17:00 Diego Ruiz Antolín (Universidad de Cantabria)
Evaluación numérica de los ceros complejos de funciones del cilindro parabólico
- 17:00 – 17:30 Javier Segura Sala (Universidad de Cantabria)
El teorema del círculo en la cuadratura de Gauss-Legendre y relaciones uniformes entre nodos y pesos
- 17:30 – 18:00 Antonio J. Durán (Universidad de Sevilla)
Exceptional Hahn and Jacobi polynomials with an arbitrary number of continuous parameters

Truncated classical orthogonal polynomials

FRANCISCO MARCELLÁN, DIEGO DOMINICI, JUAN CARLOS GARCÍA ARDILA.

Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid

pacomarc@ing.uc3m.es

Resumen: En esta comunicación presentamos resultados recientes sobre polinomios ortogonales respecto a distribuciones clásicas (Normal y Gamma) soportadas en un subconjunto de la recta real. En el caso de la distribución Normal consideramos un intervalo simétrico $(-z, z)$ ([1]) y en la distribución Gamma un intervalo $(0, z)$ ([2]). Dichas familias son semiclásicas y, en consecuencia, se determinan las ecuaciones de Laguerre-Freud que verifican los coeficientes de su relación de recurrencia a tres términos (Ecuaciones de Painlevé discretas) así como las ecuaciones diferenciales de Painlevé que satisfacen en términos del parámetro z (véase [5]). Dichos polinomios aparecen en el estudio de Gaussian y Laguerre unitary ensembles en la teoría de matrices aleatorias (véase [3] y [4], respectivamente). Finalmente, se plantean una serie de problemas abiertos en el caso de la distribución Beta simétrica soportada en $(-z, z)$, $|z| < 1$.

Referencias

- [1] D. Dominici, F. Marcellán (2023), Truncated Hermite polynomials. *J. Difference Equ. Appl.* 29, no. 7, 701-732.
- [2] D. Dominici, J. C. García Ardila, F. Marcellán (2023), Symmetrization process and truncated orthogonal polynomials. The Laguerre case. *arXiv:2307.09581 v1[math.CA]*.
- [3] S. Lyu, Y. Chen (2021), Gaussian unitary ensembles with two discontinuities, PDEs and the coupled Painlevé *II* and *IV* system. *Stud. Appl. Math.* 146, no.1, 118-138.
- [4] S. Lyu, Y. Chen, S.-X. Xu (2022), Laguerre Unitary Ensembles with Jump Discontinuities. PDEs and the Coupled Painlevé *V* System. *arXiv:2202.00943 v1[nlin.SI]*.
- [5] W. Van Assche (2018), Orthogonal polynomials and Painlevé equations. Australian Mathematical Society, Lecture Series 27. Cambridge University Press, Cambridge.

Agradecimientos: Este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto PID2021-122154NB-I00 financiado por FEDER/Ministerio de Ciencia e Innovación-Agencia Estatal de Investigación.

Polinomios ortogonales y cadenas de Markov

AMÍLCAR BRANQUINHO, JUAN E. F. DÍAZ, ANA FOULQUIÉ-MORENO, MANUEL MAÑAS

Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra

ajplb@mat.uc.pt

Resumen: Dada una familia de polinomios ortogonales o de polinomios ortogonales múltiples, con una matriz de la recurrencia no negativa, usando el teorema de Perron–Frobenius, construimos una infinidad de cadenas de Markov finitas, describiendo sus propiedades probabilísticas. Las expresiones hipergeométricas para las familias de polinomios ortogonales en el diagrama de Askey, con matrices de recurrencia no negativas, permite la construcción explícita de una diversidad de ejemplos.

Referencias

- [1] A. Branquinho, J. E. F. Díaz, A. Foulquié-Moreno, and M. Mañas (2023), Finite Markov chains and multiple orthogonal polynomials, arXiv:2308.00182.

Ortogonalidad múltiple mixta y la teoría espectral de matrices banda acotadas

AMÍLCAR BRANQUINHO, ANA FOULQUIÉ-MORENO, MANUEL MAÑAS

Departamento de Física Teórica, Universidad Complutense

manuel.manas@ucm.es

Resumen: En esa charla explicamos un teorema de Favard espectral para matrices banda acotadas T , mas allá del caso tridiagonal, con un número finito y arbitrario de super-diagonales y sub-diagonales. Es necesario que la matriz T , tras una traslación por la identidad, admita una factorización bi-diagonal positiva.

Referencias

- [1] A. Branquinho, A. Foulquié-Moreno, M. Mañas (2023). Spectral theory for bounded banded matrices with positive bidiagonal factorization and mixed multiple orthogonal polynomials. *Advances in Mathematics* 434, 109313.

Los polinomios de Zernike y la visualización de estrellas

LIDIA FERNÁNDEZ, S. BARBERO, A. M. DELGADO, T. E. PÉREZ

Departamento Matemática Aplicada, Universidad de Granada

lidiafr@ugr.es

Resumen: Al observar una estrella en condiciones de poca luz, la mayoría de las personas perciben algunos patrones simétricos estructurados, a los que se ha denominado starbursts. Los patrones starburst pueden ser muy diversos, pero algunos típicos son aquellos en los que un área central brillante está rodeada de picos de intensidad claramente marcados (puntas de estrella) [2, 3]. Un hecho sorprendente de dichos patrones es que suelen presentar una simetría rotacional de orden p , es decir, una simetría de ángulo $2\pi/p$, por lo que el índice p determina el número de puntas de estrella. Resulta también sorprendente que el índice p no es siempre el mismo y, en consecuencia, el número de puntas de estrella difiere entre distintos observadores.

Una de las causas de estos patrones luminosos son las imperfecciones en los elementos ópticos del ojo humano, que se describen matemáticamente mediante una expansión en polinomios de Zernike. En este trabajo proponemos una explicación teórica de los tipos de simetrías y el número de puntas de estrella basándonos en la relación que existe entre la simetría, la preservación de simetría entre frentes de onda y cústicas, y el análisis de los puntos singulares de las funciones de curvatura de la aberración de onda [1].

Referencias

- [1] S. Barbero, A. Bradley, N. López-Gil, J. Rubinstein, L. Thibos (2022). Catastrophe optics theory unveils the localised wave aberration features that generate ghost images. *Ophthalmic Physiol Opt.*, 42, 1074–1091.
- [2] J. Rubinstein (2019). On the geometry of visual starbursts. *J. Opt. Soc. Am. A*, 36(4), B58–B64.
- [3] R. Xu, L. Thibos, N. Lopez-Gil, P. Kollbaum, A. Bradley (2019). Psychophysical study of the optical origin of starbursts. *J. Opt. Soc. Am. A.*, 36(4), B97–B102.

Mixed-type hypergeometric Bernoulli-Gegenbauer polynomials: some properties

DIONISIO PERALTA, YAMILET QUINTANA, SHAHID AHMAD WANI

Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid
Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT), Spain

yaquinta@math.uc3m.es

Abstract: In this talk, we consider a novel family of the mixed-type hypergeometric Bernoulli-Gegenbauer polynomials. This family represents a fascinating fusion between two distinct categories of special functions: hypergeometric Bernoulli polynomials and Gegenbauer polynomials. We focus our attention on some algebraic and differential properties of this class of polynomials, including its explicit expressions, derivative formulas, matrix representations, matrix-inversion formulas, and other relations connecting it with the hypergeometric Bernoulli polynomials.

Referencias

- [1] F. T. Howard (1967). Some sequences of rational numbers related to the exponential function. *Duke Math. J.*, 34, 701–716.
- [2] P. Natalini, A. Bernardini (2003). A generalization of the Bernoulli polynomials. *J. Appl. Math.*, 2003, 155–163.
- [3] D. Peralta, Y. Quintana, S. A. Wani (2023). Mixed-type hypergeometric Bernoulli-Gegenbauer polynomials. *Mathematics*, 11 (18), 13920.
- [4] Y. Quintana, W. Ramírez, A. Urieles (2018). On an operational matrix method based on generalized Bernoulli polynomials of level m . *Calcolo*, 55, 30.

Acknowledgments: The research of Y. Quintana has been partially supported by the grant CEX2019-000904-S funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

Análisis asintótico de una familia de polinomios ortogonales Δ -Sobolev

JUAN J. MORENO-BALCÁZAR, DIEGO DOMINICI

Departamento de Matemáticas, Universidad de Almería

balcazar@ual.es

Resumen: En esta charla se aborda el comportamiento asintótico de una familia de polinomios ortogonales con respecto a un producto escalar Δ -Sobolev, siendo Δ el operador diferencia progresiva (forward operator). En concreto, se obtiene una expansión asintótica para estos polinomios no estándar que involucran a los polinomios de Charlier generalizados.

Referencias

- [1] D. Dominici, J. J. Moreno-Balcázar (2023). Asymptotic analysis of a family of Sobolev orthogonal polynomials related to the generalized Charlier polynomials. *Journal of Approximation Theory*, 293, Art. 105918.

Agradecimientos: Dedicado a la memoria de Diego Dominici.

Investigación financiada por la ayuda PID2021-124472NB-I00 del proyecto financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por “FEDER Una manera de hacer Europa”; Grupo de Investigación FQM229 de la Junta de Andalucía y Centro de Investigación CDTIME de la Universidad de Almería.

Cálculo simbólico de una ecuación en diferencias de segundo orden para polinomios ortogonales tipo Sobolev

JUAN F. MAÑAS–MAÑAS, GALINA FILIPUK, JUAN J. MORENO–BALCÁZAR

Departamento de Matemáticas, Universidad de Almería

jmm939@ual.es

Resumen: En esta charla abordamos el problema de calcular simbólicamente los coeficientes de la ecuación en diferencias/diferencial de segundo orden que satisfacen los polinomios $Q_n(x)$ ortogonales con respecto al producto escalar

$$(f, g)_S = \int f(x)g(x)\varrho(x)dx + M\mathcal{D}_{q,\omega}^{(j)}f(c)\mathcal{D}_{q,\omega}^{(j)}g(c),$$

donde $\varrho(x)$ es una función peso con soporte en la recta real, $c \in \mathbb{R}$, $M > 0$, j es un entero no negativo y $\mathcal{D}_{q,\omega}$ es el operador de Hahn.

En [1] fue probado que los polinomios $Q_n(x)$ satisfacen la siguiente ecuación

$$\sigma_{1,c,n}(x)\mathcal{D}_{q,\omega}^{(2)}Q_n(x) + \sigma_{2,c,n}(x)\mathcal{D}_{q,\omega}Q_n(x) + \sigma_{3,c,n}(x)Q_n(x) = 0, \quad n \geq 2,$$

donde $\sigma_{1,c,n}(x)$, $\sigma_{2,c,n}(x)$ y $\sigma_{3,c,n}(x)$ son funciones explícitamente conocidas. Recientemente, en [2] hemos construido un programa basado en lenguaje MATHEMATICA[®] que calcula simbólicamente estos coeficientes. Este es un trabajo conjunto con Galina Filipuk (Universidad de Varsovia) y Juan J. Moreno–Balcázar (Universidad de Almería).

Referencias

- [1] G. Filipuk, J. J. Mañas–Mañas, J. J. Moreno–Balcázar (2022), Second–order difference equation for Sobolev–type orthogonal polynomials: Part I: Theoretical results. *J. Difference Equ. Appl.* 28 (7), 971–989.
- [2] G. Filipuk, J. J. Mañas–Mañas, J. J. Moreno–Balcázar (2023), Second–order difference equation for Sobolev–type orthogonal polynomials. Part II: Computational tools. *East Asian J. Appl. Math.* 13 (4), 960–979.

Agradecimientos: Investigación financiada por la ayuda PID2021-124472NB-I00 del proyecto financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por “FEDER Una manera de hacer Europa”; Grupo de Investigación FQM229 de la Junta de Andalucía y Centro de Investigación CDTIME de la Universidad de Almería.

A Landis-type result for the semidiscrete heat equation

LUZ RONCAL

Basque Center for Applied Mathematics, Spain

lrncal@bcamath.org

Abstract: The goal of this talk is to show a Landis-type result for the semidiscrete heat equation: it will be shown that, under the assumption of two-time decaying conditions on the solution u , then necessarily $u \equiv 0$. Such conditions are formulated in terms of Macdonald's functions and are motivated by the fundamental solution of the semidiscrete heat equation.

In order to achieve the result, we will investigate quantitative upper and lower estimates for the L^2 -norm of the solution within a spatial lattice $(h\mathbb{Z})^d$. These estimates manifest an interpolation phenomenon between continuum and discrete scales, showing that *close-to-continuous* and *purely discrete* regimes are different in nature.

Joint work with Aingeru Fernández-Bertolin and Diana Stan.

Approximation by polynomials in Sobolev spaces associated with classical moment functionals

MISAEEL E. MARRIAGA, JUAN CARLOS GARCÍA-ARDILA

Departamento de Matemática Aplicada, Ciencia e Ingeniería de Materiales y Tecnología
Electrónica, Universidad Rey Juan Carlos (Spain)

misael.marriaga@urjc.es

Abstract: Let \mathbf{u} be a moment functional associated with the Hermite, Laguerre, or Jacobi classical orthogonal polynomials. We study approximation by polynomials in $H^r(\mathbf{u})$, the Sobolev space consisting of functions whose derivatives of consecutive orders up to r belong to the L^2 space associated with \mathbf{u} . This requires the simultaneous approximation of a function f and its consecutive derivatives up to order $N \leq r$. We explicitly construct orthogonal polynomials that achieve such simultaneous approximation and provide error estimates in terms of $E_n(f^{(r)})$, the error of best approximation of $f^{(r)}$ in $L^2(\mathbf{u})$.

On CMV mixed multiple orthogonal Laurent polynomials on the unit circle

EDMUNDO J. HUERTAS, MANUEL MAÑAS

Dpto. de Física y Matemáticas, Universidad de Alcalá
Ctra. Madrid-Barcelona, Km. 33,600. Campus Científico-Tecnológico
Facultad de Ciencias - C.P.: 28805 - Alcalá de Henares, Madrid, Spain.

edmund.huertas@uah.es

Abstract: We explore two sets of CMV mixed multiple orthogonal Laurent polynomials on the step-line on the unit circle, through a Gauss–Borel decomposition of the corresponding moment matrix. We provide expressions for the matrix recurrence relations for both sets, as well as detailed orthogonality properties. The corresponding analysis of the Christoffel–Darboux kernels theory is performed, and connected with a complete description of the Christoffel and Geronimus transformations of the matrix of measures, which are given in terms of a diagonal perturbation matrix with prepared Laurent polynomials at their entries. These analysis lead to quasideterminantal Christoffel and Geronimus formulas for these transformations.

Acknowledgments: This research was conducted while EJH was visiting the ICMAT (Instituto de Ciencias Matemáticas) from jan-2023 to jan-2024, under the Program *Ayudas de Recualificación del Sistema Universitario Español para 2021-2023 (Convocatoria 2022)* - R.D. 289/2021 de 20 de abril (BOE de 4 de junio de 2021). This author wish to thank the ICMAT, Universidad de Alcalá, and the Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia (NextGenerationEU) of the Spanish Government for their support.

Nearest neighbor recurrence relations for some Angelesco multiple orthogonal polynomials

J. ARVESÚ, A. J. QUINTERO-ROBA

Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid

jarvesu@math.uc3m.es

Abstract: This contribution studies some new families of Angelesco multiple orthogonal polynomials [1, 6] with shared orthogonality conditions with respect to a system of weight functions, which are complex analogues of Poisson and Pascal distributions on a legged star-like set [2, 3]. The emphasis is placed on the algebraic properties such as the zero location theorem, the raising operators, the Rodrigues-type formulas, and the explicit expressions of the polynomial families. Finally, the nearest neighbor recurrence relations are given. The used approach differs from those given in the continuous cases [4, 5].

Referencias

- [1] A. Angelesco, Sur deux extensions des fractions continues algébriques (1919). *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 168, 262–265.
- [2] J. Arvesú, A. J. Quintero-Roba (2023). On Two families of Discrete Multiple Orthogonal Polynomials on a Star-like Set, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, In press.
- [3] J. Arvesú, A. J. Quintero-Roba (2023). Nearest neighbor recurrence relations for Meixner-Angelesco multiple orthogonal polynomials of the second kind, Submitted.
- [4] M. Leurs, W. Van Assche (2020). Jacobi-Angelesco multiple orthogonal polynomials on an r -star, *Constr. Approx.*, 51 353-381.
- [5] M. Leurs, W. Van Assche (2020). Laguerre-Angelesco multiple orthogonal polynomials on an r -star, *J. Approx. Theory*, 250 105324 30 pages.
- [6] E. M. Nikishin, V. N. Sorokin (1991). *Rational Approximation and Orthogonality*, Translations of Mathematical Monographs, 92, American Mathematical Society, Providence, RI.

Acknowledgments: J. Arvesú acknowledges support by Agencia Estatal de Investigación of Spain, grant number PID2021-122154NB-I00.

Discrete Appell-Dunkl sequences

EDGAR LABARGA VARONA

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de la Rioja (Spain)

edgar.labarga@unirioja.es

Abstract: The corresponding discrete versions of the classical Bernoulli and Euler polynomials are the Bernoulli polynomials of the second kind and Boole polynomials. They are particular cases of discrete Appell sequences; that is, sequences of polynomials $\{p_k\}_{k \geq 0}$ which satisfy

$$p_k(x+1) - p_k(x) = kp_{k-1}(x), \quad k \geq 1.$$

In this talk, we will introduce a generalization of these sets in the Dunkl context. The role of the ordinary translation will now be played by the Dunkl translation. As an application of this extension, we will define the Bernoulli-Dunkl and Boole-Dunkl polynomials.

El método de *saddle point* en dos o más dimensiones

JOSÉ L. LÓPEZ

Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas, Universidad Pública de Navarra.
INAMAT2.

jl.lopez@unavarra.es

Resumen: Todos los métodos asintóticos clásicos para integrales se formulan inicialmente para integrales uni-dimensionales. Posteriormente se generalizan a integrales dobles y múltiples en general. Con la excepción del famoso método de "saddle point" para integrales sobre caminos complejos, método muy utilizado en la aproximación de funciones especiales. Esto se debe a la imposibilidad de extender el concepto de *camino de máximo descenso* utilizado en el método en una dimensión al concepto *desuperficie de máximo descenso* que habría que utilizar en integrales dobles, o en general *hipersuperficie de máximo descenso* que habría que utilizar en integrales múltiples. Y es imposible porque simplemente no existe tal concepto en 2 o más dimensiones complejas [1]. Por otra parte en [2] simplificamos el método de "saddle point" demostrando que podemos prescindir del tedioso y dificultoso cálculo del *camino de máximo descenso* y reemplazarlo por el sencillo y sistemático cálculo de la *recta de descenso*. Entonces, la pregunta natural es: ¿en lugar de intentar generalizar el método clásico de "saddle point", podríamos generalizar el método simplificado de "saddle point" de una a dos o más dimensiones? No existe en 2 o más dimensiones una superficie o hipersuperficie de máximo descenso, pero quizá no sea necesaria, bastando con un plano o hiper-plano de descenso. La respuesta es que parece ser que sí. En esta charla mostramos como dar los primeros pasos en esta dirección.

Referencias

- [1] D. Kaminski (1990). On the n-variable saddle point and steepest descent methods. Lecture Notes Pure Appl. Math., 124. 627-637
- [2] J. L. López, P. Pagola and E. Pérez (2009). A systematization of the saddle point method. Application to the Airy and Hankel functions. J. Math. Anal. Appl., 354, 347-359.

New asymptotic expansions of two new special functions: the \mathcal{H} -function of communication theory and the Moench Integral Transform of Hydrology.

ESTER PÉREZ SINUSÍA, CHELO FERREIRA, JOSÉ LUIS LÓPEZ, PEDRO PAGOLA

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza

ester.perez@unizar.es

Abstract: In this talk we derive asymptotic expansions of two new special functions: the \mathcal{H} -function of communication theory, which plays an important role in the error rate analysis in digital communication, and the Moench Integral Transform of Hydrology, useful to study the water level in aquifers. In both cases, we investigate asymptotic expansions in a region of the parameters that is of interest in practical situations, but that has not yet been analyzed. We provide explicit and/or recursive algorithms for the computation of the coefficients of the expansions. Numerical examples illustrate the accuracy of the approximations.

Referencias

- [1] C. Ferreira, J. L. López, Ester Pérez Sinusía (2023). New series expansions for the \mathcal{H} -function of communication theory. *Integral Transforms and Special Functions*, published online, 1-15
- [2] J. L. López, P. Pagola, Ester Pérez Sinusía (2023). Asymptotic Expansions for Moench's Integral Transform of Hydrology. *Integral Mathematics*, 11(14), 3053, 1-14.

A generalization of the Laplace's method for integrals

PABLO PALACIOS, JOSÉ L. LÓPEZ, PEDRO J. PAGOLA

Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas, Universidad Pública de Navarra,
INAMAT2

pablo.palacios@unavarra.es

Abstract: In [1] a modification of the Laplace's method for deriving asymptotic expansions of Laplace integrals was introduced. This modification simplifies the computations, giving explicit formulas for the coefficients of the expansion. On the other hand, motivated by the approximation of special functions with two asymptotic parameters, Nemes [2] has generalized Laplace's method by considering Laplace integrals with a linear dependence of the phase function on two asymptotic parameters of a different asymptotic order.

In this talk, we investigate if the simplifying ideas introduced in [1] for Laplace integrals with one large parameter may also be applied to the more general Laplace integrals considered in Nemes's theory. We show not only that the answer is yes, but also that those simplifying ideas can be applied to more general Laplace integrals where the phase function depends on the asymptotic variable in a more general way. We derive new asymptotic expansions for this more general kind of integrals with simple formulas for the coefficients of the expansion. In particular, this theory can be applied to special functions with two or more large parameters of a different asymptotic order. We give some examples of special functions that illustrate the theory.

Referencias

- [1] J. L. López, P. J. Pagola, E. Pérez Sinusía (2009). A simplification of Laplace's method: applications to the gamma function and Gauss hypergeometric function. *J. Approx. Theory*, 161, no.1, 280-291.
- [2] G. Nemes (2020). An extension of Laplace's method. *Constr. Approx.*, 51, no.2, 247-272.

Integrales Elípticas simétricas. Algunos desarrollos analíticos para $R_J(x, y, z, p)$

BLANCA BUJANDA, JOSÉ LUIS LÓPEZ, PEDRO PAGOLA, PABLO PALACIOS

Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas, Universidad Pública de Navarra,
INAMAT2

blanca.bujanda@unavarra.es

Resumen: En 1828 Legendre publicó un libro (ver [3]) considerado como el origen histórico de las funciones especiales denominadas en general *Integrales elípticas*, este tratado surge con la idea de aproximar, de alguna manera eficiente, la longitud de una elipse; una idea tan concreta dió pie a un conjunto de funciones especiales de gran interés en la actualidad ya que se ha visto aparecen en un elevado número de problemas de la física y de las matemáticas.

La falta de desarrollos adecuados (asintóticos, uniformemente convergentes,...) que permitan trabajar con las funciones especiales en diferentes situaciones es un problema matemático habitual. El objeto de esta presentación es mostrar las líneas principales de un estudio realizado por los autores sobre desarrollos analíticos aplicables a las integrales elípticas escritas en la forma de Carlson (ver [2]) que permitan la aproximación de dichas funciones. Siguiendo la idea básica desarrollada en [1] para la primera integral elíptica simétrica $R_F(x, y, z)$ los autores realizaron el estudio de la segunda (la $R_D(x, y, z)$ y algunas funciones similares como casos particulares de la función de Appell). Con el fin de seguir completando el trabajo sobre integrales elípticas y determinar desarrollos analíticos adecuados para ellas se mostrarán los encontrados para $R_J(x, y, z, p)$.

Referencias

- [1] B. Bujanda, J.L. López, P. Pagola, P. Palacios (2022). Uniform approximations of the first symmetric elliptic integral in terms of elementary functions Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM 116 (1), Paper No. 4, 17 pp.
- [2] B.C. Carlson. NIST. Chapter 19. Elliptic Integrals.
- [3] A.M. Legendre (1825). *Traité des Fonctions Elliptiques*. Huzard-Courcier, París.

Algoritmos numéricos y software para la evaluación de funciones especiales: qué hay de nuevo y qué se necesita

AMPARO GIL, JAVIER SEGURA, NICO M. TEMME

Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación, Universidad de Cantabria

amparo.gil@unican.es

Resumen: En esta charla haremos un resumen de algoritmos recientes desarrollados por nuestro grupo enfocados a la evaluación de funciones hipergeométricas confluentes, integrales de Fermi-Dirac y funciones de distribución de probabilidad. Adicionalmente, haremos un rápido repaso de una selección de algoritmos disponibles en las librerías de software matemático para calcular funciones especiales y discutiremos algunos de los aspectos que quedan por abordar y los retos que plantean.

Referencias

- [1] A. Gil, D. Ruiz-Antolín, J. Segura, N. M. Temme. (2023). Computation of the confluent hypergeometric function $U(a, b, x)$ and its derivative for positive arguments. *Numerical Algorithms* 94, 669–679.
- [2] V. Egorova, A. Gil, J. Segura, N. M. Temme. (2023). Computation of the regularized incomplete Beta function. *Dolomites Research Notes on Approximation* 16(3) 10-16.
- [3] Gil, A. Odrzywolek, J. Segura, N.M. Temme. (2023) Evaluation of the generalized Fermi-Dirac integral and its derivatives for moderate/large values of the parameters. *A. Computer Physics Communications* 283, 108563

Evaluación numérica de los ceros complejos de funciones del cilindro parabólico

DIEGO RUIZ-ANTOLIN, AMPARO GIL, JAVIER SEGURA, T. MARK DUNSTER

Departamento de Matemática Aplicada y CC. de la Computación. Universidad de Cantabria

diego.ruizantolin@unican.es

Resumen: En esta charla discutimos la evaluación numérica de los ceros complejos de funciones del cilindro parabólico. En nuestro análisis usamos la combinación de los métodos numéricos descritos en [1] y el método para obtener ceros complejos de soluciones de EDOs de segundo orden introducido en [2]. Este método hace uso de un análisis cualitativo de las líneas aproximadas de Stokes y anti-Stokes (la estructura de los ceros exactos sigue de forma muy aproximada las líneas de anti-Stokes) que se combina con la aplicación de un método de punto fijo de orden cuarto y el uso de funciones de paso cuidadosamente escogidas. La precisión de las aproximaciones numéricas que obtenemos (que se implementan en un algoritmo Matlab) para los ceros de las funciones del cilindro parabólico se compara con aproximaciones asintóticas para estos ceros que involucran ceros de funciones de Airy.

Referencias

- [1] T. Dunster, A. Gil, J. Segura (2023). Computation of parabolic cylinder functions having complex argument. *Enviado*.
- [2] J. Segura (2013). Computing the complex zeros of special functions. *Numer. Math.*, 124, 723–752.

El teorema del círculo en la cuadratura de Gauss-Legendre y relaciones uniformes entre nodos y pesos

JAVIER SEGURA, ÓSCAR LÓPEZ POUSO

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria

javier.segura@unican.es

Resumen: El teorema del círculo es un resultado clásico de la cuadratura Gaussiana [1] que, en su versión para la cuadratura de Gauss-Legendre, establece que, dado cualquier compacto $\Delta \subset (-1, 1)$, para todos los nodos $x_i \in \Delta$ y sus correspondientes pesos w_i se cumple que

$$\frac{nw_i}{\pi\sqrt{1-x_i^2}} \sim 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

siendo n el número de nodos (y pesos). La condición de que sean nodos en un compacto $\Delta \subset (-1, 1)$ es importante ya que, como se discutirá, la relación no es válida para los nodos extremos (que tienden a $+1$ o -1 cuando $n \rightarrow \infty$). En esta charla se discuten otro tipo de relaciones entre nodos y pesos que sí se cumplen uniformemente para todos los nodos y pesos en $(-1, 1)$. Estas relaciones son condiciones necesarias para la convergencia de orden de 2 de ciertos métodos de diferencias finitas basados en mallados de Gauss-Legendre y utilizados en la discretización del operador de difusión angular de Fokker-Planck [2].

Referencias

- [1] P. J. Davis and P. Rabinowitz. Some geometrical theorems for abscissas and weights of Gauss type. *J. Math. Anal. Appl.*, 2:428–437, 1961.
- [2] O. López Pouso, J. Segura. Uniform relations between the Gauss-Legendre nodes and weights. Enviado. <https://arxiv.org/abs/2305.19128>.

Exceptional Hahn and Jacobi polynomials with an arbitrary number of continuous parameters

ANTONIO J. DURÁN

Departamento Análisis Matemático, Universidad de Sevilla

duran@us.es

Abstract: We construct new examples of exceptional Hahn and Jacobi polynomials [1]. Exceptional polynomials are orthogonal polynomials with respect to a positive measure which are also eigenfunctions of a second order difference or differential operator. In mathematical physics, they allow the explicit computation of bound states of rational extensions of classical quantum-mechanical potentials. The most apparent difference between classical or classical discrete orthogonal polynomials and their exceptional counterparts is that the exceptional families have gaps in their degrees, in the sense that not all degrees are present in the sequence of polynomials. The new examples have the novelty that they depend on an arbitrary number of continuous parameters. These families are constructed by using the new families of Krall dual Hahn polynomials depending on an arbitrary number of continuous parameters introduced in [2]. Krall polynomials are orthogonal polynomials which are eigenfunctions of a higher order differential or difference operator. The new Krall dual Hahn families provide further examples for the problem explicitly posed by Richard Askey in 1991.

Referencias

- [1] A. J. Durán (2021). Exceptional Hahn and Jacobi polynomials with an arbitrary number of continuous parameters, *Studies in Applied Mathematics* 12451.
- [2] A. J. Durán (2022). Bispectral dual Hahn polynomials with an arbitrary number of continuous parameters, *Journal of Approximation Theory*, 283, 105811.