

Sesión Especial 19

Resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales y aplicaciones

Organizadores:

- Blanca Bujanda Cirauqui (Universidad Pública de Navarra)
- María Jesús Moreta Santos (Universidad Complutense de Madrid)

Descripción:

Las Ecuaciones en Derivadas Parciales son claves en el desarrollo de la Ciencia y Tecnología debido a la gran cantidad de fenómenos físicos que modelan; su complicada resolución analítica (imposible en muchos casos) hace necesario el desarrollo de métodos numéricos que permitan resolverlas de manera eficiente. Con esta idea en mente, durante las últimas décadas se han realizado muchos estudios matemáticos que han permitido mejorar notablemente la resolución numérica de dichas ecuaciones. El análisis numérico es una ciencia que presenta una gran evolución adaptada a la evolución de la informática y de los problemas matemáticos que reflejan situaciones cada vez más complicadas y más ajustadas a la realidad física que dichas EDP's representan.

El propósito de este minisimposio es mostrar los últimos avances en la integración numérica de diversos problemas mediante el uso de diferentes métodos ajustados cada vez más a problemas concretos, permitiendo su resolución con técnicas cada vez más eficientes. En este sentido se presentan nuevos estudios realizados que son eficientes en la integración de problemas no lineales, en problemas en los que los dominios son complicados y parece necesario aplicar técnicas de descomposición de dominios, en problemas en 3D en los que la geometría utilizada tiene gran importancia, en tipos concretos de ecuaciones como las correspondientes a aguas someras, ecuaciones de tipo Schrödinger o leyes de conservación, en problemas en los que condiciones de frontera no nulas hacen que se produzca una reducción en el orden del método aplicado...

Programa

JUEVES, 25 de enero:

- 11:30 – 12:00 Francisco Pla (Universidad de Castilla la Mancha)
2D Newton Schwarz domain decomposition method applied to the Rayleigh-Bénard convection problem
- 12:00 – 12:30 Henar Herrero (Universidad de Castilla la Mancha)
A Schwarz alternating method for an evolution convection problem
- 12:30 – 13:00 Juan Carlos Jorge (Universidad Pública de Navarra)
Un método multisplitting para la resolución de sistemas evolutivos 2D singularmente perturbados de convección-difusión-reacción
- 13:00 – 13:30 Carmelo Clavero (Universidad de Zaragoza)
Un método numérico eficiente para sistemas parabólicos unidimensionales singularmente perturbados con turning points interiores
- 13:30 – 14:00 Eneko Garaio (Universidad Pública de Navarra)
Resolución de Ecuaciones en Derivadas Parciales por Elementos Finitos para la Optimización de Recolectores de Energía Vibracional
- 16:00 – 16:30 Irene Gómez-Bueno (Universidad de Málaga)
Avances recientes en el diseño de métodos bien equilibrados para sistemas de leyes de equilibrio
- 16:30 – 17:00 Celia Caballero-Cárdenas (Universidad de Málaga)
Esquemas semi-implícitos bien equilibrados para todas las soluciones estacionarias de las ecuaciones de aguas someras
- 17:00 – 17:30 María Luz Muñoz (Universidad de Málaga)
Esquemas Lagrangiano-Proyectados de tipo implícito-explicito para las ecuaciones de Ripa
- 17:30 – 18:00 Sergio Amat (Universidad Politécnica de Cartagena)
Estabilidad de algunas reconstrucciones de alto orden para la aproximación de leyes de conservación

VIERNES, 26 de enero:

- 11:30 – 12:00 Begoña Cano (Universidad de Valladolid)
Modified exponential Rosenbrock methods to increase their accuracy
- 12:00 – 12:30 Fernando Casas (Universidad Jaume I)
Symmetric-conjugate splitting methods for evolution equations of parabolic type
- 12:30 – 13:00 José Luis Gracia (Universidad de Zaragoza)
Numerical approximation of a singularly perturbed convection-diffusion parabolic problem with incompatible initial and boundary data
- 13:00 – 13:30 Aderito Araujo (Universidad de Coimbra)
Very high-order accurate discontinuous Galerkin method for curved boundaries with polygonal meshes
- 13:30 – 14:00 Nuria Reguera (Universidad de Burgos)
Order reduction presented when integrating linear problems with General Linear Methods and how to avoid it

2D Newton Schwarz domain decomposition method applied to the Rayleigh-Bénard convection problem

FRANCISCO PLA, DARÍO MARTÍNEZ, HENAR HERRERO

Departamento de Matemáticas, Universidad de Castilla-La Mancha, Ciudad Real (Spain)

Francisco.Pla@uclm.es

Abstract: In this paper we present an alternate Schwarz-type domain decomposition (DD) method applied to the Rayleigh-Bénard convection problem in a 2D fluid layer. The problem is modeled with the incompressible Navier-Stokes equations together with the heat equation in a rectangular domain and the Boussinesq approximation is considered [5]. The problem is numerically solved with a Legendre collocation method and the mesh used is defined by Legendre-Gauss-Lobatto collocation points [1]. Since the spectral methods are ill-conditioned it is necessary to use a DD method by dividing the problem into smaller subdomains and in this way, the ill-conditioning of Legendre collocation is overcome. Then, solutions can be obtained for large aspect ratios and/or for larger Rayleigh numbers [2, 4]. The stationary problem by means of the Schwarz alternating DD method and the solutions with this method are compared to reference solutions obtained with finite elements by COMSOL Multiphysics [3].

Referencias

- [1] C. Bernardi, Y. Maday (1991). *Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques*. Springer-Verlag.
- [2] H. Herrero, F. Pla, M. Ruiz-Ferrández (2019). A Schwarz Method for a Rayleigh-Bénard Problem. *J. of Scientific Computing*, 78, 376-392.
- [3] D. Martínez, H. Henar, F. Pla (2022). 2D Newton Schwarz Legendre Collocation Method for a Convection Problem. *Mathematics*, 10, 3718.
- [4] D. Martínez, F. Pla, H. Henar, A. Fernández-Pérez (2023). A Schwarz alternating method for an evolution convection problem. *Applied Numerical Mathematics*, 192, 179-196.
- [5] F. Pla, A.M. Mancho, H. Herrero (2008). Bifurcation phenomena in a convection problem with temperature dependent viscosity at low aspect ratio. *Physica D*, D238, 572-580.

A Schwarz alternating method for an evolution convection problem

HENAR HERRERO, DARÍO MARTÍNEZ, FRANCISCO PLA

Departamento Matemáticas, Universidad de Castilla-La Mancha

Henar.Herrero@uclm.es

Resumen: En este trabajo se propone un método de descomposición de dominios de Schwarz para resolver un problema de Rayleigh-Bénard [1]. Legendre colocación es un método mal condicionado. No es posible aumentar el tamaño de la malla para conseguir soluciones en régimen turbulento, que se alcanzan para valores grandes del número de Rayleigh. Esta propuesta consigue mallas gruesas en muchos subdominios, de esta forma el problema en cada subdominio está bien condicionado, el tamaño de la malla total puede crecer aumentando el número de subdominios, y se supera el mal condicionamiento.

Las ecuaciones modelo son las de Navier-Stokes, continuidad y calor en el caso de número de Prandtl infinito en un dominio bidimensional. El problema de evolución no lineal se trata con un esquema de diferencias finitas de orden dos en el tiempo y un método de colocación en el espacio. Cada paso del problema de evolución se resuelve con un método de descomposición de dominios de Schwarz. El dominio se divide en varios subdominios con condiciones de interfaz adecuadas. Sus propiedades de convergencia se estudian teóricamente en un dominio simplificado dividido en dos subdominios. La tasa de convergencia es inferior a uno cuando se considera un solapamiento. La resolución numérica del problema confirma los resultados teóricos. Una comparación con soluciones numéricas obtenidas con otros métodos valida el método. Se alcanza la convergencia para grandes mallas espaciales, que son inabordables para el método de colocación Legendre estándar. Otra ventaja de esta metodología es la paralelización. Los resultados están publicados en [2].

Referencias

- [1] F. Pla, A. M. Mancho, H. Herrero (2009). Bifurcation phenomena in a convection problem with temperature dependent viscosity at low aspect ratio. *Physica D*, 238, 572-280.
- [2] D. Martínez, F. Pla, H. Herrero, A. Fernández-Pérez (2023). A Schwarz alternating method for an evolution convection problem. *Applied Numerical Mathematics*, 192, 179-196.

Un método *multisplitting* para la resolución de sistemas evolutivos 2D singularmente perturbados de convección-difusión-reacción

J.C. JORGE, C. CLAVERO

Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas, Universidad Pública de Navarra

jcjorge@unavarra.es

Resumen: En esta comunicación se presenta un método uniformemente convergente y altamente eficiente desde el punto de vista computacional para resolver sistemas parabólicos dados por

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon(t)\mathbf{u} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{L}_{\mathbf{x}, \varepsilon}(t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in Q \equiv \Omega \times (0, T], \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

donde $\Omega = (0, 1)^2$, $\mathbf{x} = (x, y)^T$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t))^T$ y

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}, \varepsilon}(t)\mathbf{u} \equiv -\mathcal{D}\Delta\mathbf{u} + \mathcal{B}_1(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{B}_2(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{A}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}, \quad (2)$$

siendo $\mathcal{D} = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ la matriz de difusión, en la que los coeficientes de difusión ε_1 y ε_2 pueden ser muy pequeños y de diferentes órdenes de magnitud. Los términos convectivos se agrupan en las matrices $\mathcal{B}_1(\mathbf{x}) = \text{diag}(b_{11}(\mathbf{x}), b_{12}(\mathbf{x}))$ y $\mathcal{B}_2(\mathbf{x}) = \text{diag}(b_{21}(\mathbf{x}), b_{22}(\mathbf{x}))$, compuestas de elementos diagonales positivos; asimismo, se supone que la matriz de reacción \mathcal{A} es una M -matriz. Debido al carácter multiescala de la solución de (3), en la que aparecen capas límite solapadas en la frontera saliente del dominio espacial, es necesario recurrir a métodos de discretización espacial uniformemente convergentes para obtener aproximaciones fiables. Los sistemas diferenciales resultantes de este proceso de discretización espacial son costosos de resolver debido a su complejidad y a su elevada rigidez; estos inconvenientes se superan mediante el uso de un integrador temporal apropiado, de tipo pasos fraccionarios, combinado con una descomposición del operador en diferencias por direcciones y por componentes. El algoritmo resultante de este doble proceso de discretización es uniformemente convergente, propiedad que se corrobora en la práctica con la resolución numérica de varios problemas test.

Un método numérico eficiente para sistemas parabólicos unidimensionales singularmente perturbados con *turning points* interiores

C. CLAVERO, J.C. JORGE

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza

clavero@unizar.es

Resumen: En esta comunicación se presenta un método uniformemente convergente para resolver sistemas parabólicos singularmente perturbados dados por

$$\begin{cases} \mathbf{L}_\varepsilon \mathbf{u} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, t) + \mathcal{L}_{x, \varepsilon}(t) \mathbf{u}(x, t) = \mathbf{f}(x, t), & (x, t) \in (-1, 1) \times (0, T], \\ \mathbf{u}(-1, t) = \mathbf{g}_0(t), \mathbf{u}(1, t) = \mathbf{g}_1(t), t \in [0, T], \mathbf{u}(x, 0) = \boldsymbol{\varphi}(x), & x \in (-1, 1), \end{cases} \quad (3)$$

donde $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ y el operador diferencial lineal que contiene los términos de convección, difusión y reacción está dado por

$$\mathcal{L}_{x, \varepsilon}(t) \mathbf{u} \equiv -\mathcal{D}_\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + x^q \mathcal{B}(x) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathcal{A}(x, t) \mathbf{u}, \quad (4)$$

o bien por

$$\mathcal{L}_{x, \varepsilon}(t) \mathbf{u} \equiv -\mathcal{D}_\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} - x^q \mathcal{B}(x) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathcal{A}(x, t) \mathbf{u}, \quad (5)$$

siendo $\mathcal{D}_\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ la matriz de difusión, q un entero impar positivo, $\mathcal{B}(x) = \text{diag}(b_{11}(x), b_{22}(x))$, con $b_{kk} \geq \beta > 0$, $k = 1, 2$, la matriz de convección y $\mathcal{A}(x, t) = (a_{kp}(x, t))$, $k, p = 1, 2$, la matriz de reacción, es una M -matriz.

Cuando se considera (4), se dice que (3) presenta un *turning point* de tipo repulsivo en $x = 0$, mientras que en el caso (5) se dice que el *turning point* es de tipo atractivo. En el primero de los casos, en general, en la solución exacta aparecen capas límite solapadas en $x = -1$ y $x = 1$ de anchuras $\mathcal{O}(\varepsilon_1)$ y $\mathcal{O}(\varepsilon_2)$; por otro lado, en el segundo caso, sólo cuando el término fuente tiene una discontinuidad de salto en $x = 0$, aparecen capas internas solapadas en $x = 0$ de anchuras $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon_1})$ y $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon_2})$.

El problema continuo se resuelve usando un integrador temporal apropiado, de tipo pasos fraccionarios, combinado con una descomposición del operador en diferencias por componentes, junto con el esquema *upwind* definido sobre una malla adecuada de tipo Shishkin para discretizar en espacio. El algoritmo resultante es uniformemente convergente respecto a ambos parámetros de difusión.

Los ensayos numéricos realizados en varios problemas test validan en la práctica la fiabilidad y la eficiencia del método numérico construido.

Resolución de Ecuaciones en Derivadas Parciales por Elementos Finitos para la Optimización de Recolectores de Energía Vibracional

E. GARAIO, D. GANDIA, I. ROYO-SILVESTRE, J.C. JORGE, C. GÓMEZ-POLO

Departamento Ciencias, Universidad Pública de Navarra

eneko.garayo@unavarra.es

Resumen: El término ‘recolector de energía’ se refiere a un dispositivo o sistema diseñado para capturar y almacenar energía presente en el entorno, para posteriormente alimentar pequeños dispositivos o sistemas electrónicos, como redes de sensores. Estos dispositivos resultan valiosos cuando no es posible o recomendable depender de fuentes de energía convencionales, como baterías o conexiones a la red eléctrica.

En concreto, los recolectores de energía vibracional tienen la capacidad de transformar pequeñas oscilaciones presentes en el entorno en energía eléctrica. Los materiales magnetostrictivos ofrecen un rendimiento superior a bajas frecuencias (< 100 Hz), como por ejemplo, en las vibraciones de un puente. En este caso, la conversión de energía mecánica a eléctrica se logra a través del efecto Villari, en el que las deformaciones del material magnetostrictivo da lugar a variaciones en la imanación y por tanto en una fuerza electromotriz V en una bobina receptora. Sin embargo, para que estos recolectores de energía vibracional funcionen de manera óptima, es necesario llevar a cabo una optimización tanto de la plataforma vibrante y sus frecuencias de resonancia mecánica, como del campo magnético estático y las bobinas receptoras encargadas de captar la energía eléctrica. Por lo tanto, se plantea la necesidad de abordar un problema de optimización mecánica y electromagnética.

En este trabajo, se propone la utilización del método de elementos finitos (FEM) para resolver ecuaciones en derivadas parciales con el fin de optimizar un recolector de energía vibracional magnetostrictivo. Este estudio se enfoca en la optimización de recolectores de energía magnetostrictivos basados en una estructura con forma de U. Las vibraciones generadas en la estructura en forma de U son transmitidas a una lámina magnetostrictiva compuesta de Galio y Hierro (GaFe), la cual es imantada mediante imanes permanentes. Las ecuaciones en derivadas parciales a abordar incluyen la de elasticidad lineal y las ecuaciones de Maxwell. El acoplamiento entre el sistema mecánico y electromagnético se lleva a cabo ajustando los coeficientes de amortiguación. También se presenta un esquema de integración temporal (transitorio) para obtener la fuerza electromotriz en función del tiempo.

Agradecimientos: El trabajo es parte del proyecto TED2021-130884B-I00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por la Unión Europea “NextGenerationEU”/PRTR.

Avances recientes en el diseño de métodos bien equilibrados para sistemas de leyes de equilibrio

I. GÓMEZ-BUENO¹, S. BOSCARINO, M.J. CASTRO, C. PARÉS, G. RUSSO

¹Universidad de Sevilla

igomez1@us.es

Resumen: El objetivo de este trabajo es presentar una estrategia general para diseñar métodos numéricos de volúmenes finitos de alto orden explícitos, implícitos y semi-implícitos bien equilibrados para sistemas hiperbólicos de leyes de equilibrio no lineales en una dimensión. Estos métodos se obtienen extendiendo una estrategia general basada en el cálculo de estados estacionarios locales introducida por dos de los autores en [1] para métodos explícitos, cuya clave es la aplicación de operadores de reconstrucción exactamente bien equilibrados. Dicha estrategia requiere conocer las soluciones estacionarias del sistema. Si no es el caso, se diseñan esquemas que son bien equilibrados siguiendo la metodología presentada en los trabajos[2]-[3]. Además, para el desarrollo de esquemas implícitos y semi-implícitos, este procedimiento se combina, siguiendo [4], con un método de discretización temporal de tipo RK-IMEX o RK-implícito. Se mostrarán diferentes aplicaciones y se discutirán algunos trabajos posteriores, como el diseño de esquemas que preservan todas las soluciones estacionarias hidrostáticas de las ecuaciones de Euler con gravedad y el modelo de Ripa.

Referencias

- [1] M.J. Castro, C. Parés (2020). Well-balanced high-order finite volume methods for systems of balance laws. *Journal of Scientific Computing*, 82(2), 1-48.
- [2] I. Gómez-Bueno, M.J. Castro, C. Parés (2021). High-order well-balanced methods for systems of balance laws: a control-based approach. *Applied Mathematics and Computation*, 394, 125820.
- [3] I. Gómez-Bueno, M.J. Castro, C. Parés, G. Russo (2021). Collocation Methods for High-Order Well-Balanced Methods for Systems of Balance Laws. *Mathematics*, 9(15), 1799.
- [4] I. Gómez-Bueno, S. Boscarino, M.J. Castro, C. Parés, G. Russo (2023). Implicit and semi-implicit well-balanced finite-volume methods for systems of balance laws. *Applied Numerical Mathematics*, 184, 18-48.

Esquemas semi-implícitos bien equilibrados para todas las soluciones estacionarias de las ecuaciones de aguas someras

C. CABALLERO-CÁRDENAS, M. J. CASTRO, C. CHALONS, T. MORALES DE LUNA, M. L. MUÑOZ-RUIZ

Departamento Análisis Matemático, Estadística e Investigación Operativa y Matemática Aplicada, Universidad de Málaga

celiacaba@uma.es

Resumen: Presentamos esquemas numéricos semi-implícitos de primer y segundo orden bien equilibrados para todas las soluciones estacionarias para las ecuaciones de aguas someras (*shallow water equations*) basados en técnicas de *splitting* y relajación. En concreto, el sistema de aguas someras se divide primero en dos sistemas: el de presión y el de transporte. A continuación, se aplica una técnica de relajación al sistema de presión.

Una de las ventajas de este enfoque es que el paso de presión puede hacerse de forma explícita o implícita, y este último nos permite considerar pasos de tiempo mayores, ya que tiene una condición CFL menos restrictiva. De hecho, para números de Froude pequeños, la principal restricción sobre el paso de tiempo viene dada por el término de presión.

El carácter bien equilibrado del esquema se consigue considerando las fluctuaciones temporales con respecto a un estado estacionario local en cada celda, congelado en el tiempo t^n como se propone en [1] y el uso de un operador de reconstrucción exactamente equilibrado [2].

Referencias

- [1] I. Gómez-Bueno, S. Boscarino, M. J. Castro, C. Parés, G. Russo (2023). Implicit and semi-implicit well-balanced finite-volume methods for systems of balance laws. *Applied Numerical Mathematics*, 184, 18-48.
- [2] M. J. Castro, C. Parés (2020). Well-balanced high-order finite volume methods for systems of balance laws. *Journal of Scientific Computing*, 82, 48.

Esquemas Lagrangiano-Proyectados de tipo implícito-explicito para las ecuaciones de Ripa

MARÍA LUZ MUÑOZ-RUIZ, CELIA CABALLERO-CÁRDENAS,
MANUEL J. CASTRO, TOMÁS MORALES DE LUNA

Departamento de Análisis Matemático, Estadística e I.O. y Matemática Aplicada,
Universidad de Málaga

mlmunoz@uma.es

Resumen: En este trabajo consideramos el sistema de ecuaciones de aguas someras que incluye los gradientes de temperatura horizontales, conocido como sistema de Ripa. Presentamos un esquema numérico para dicho sistema basado en una formulación de tipo volúmenes finitos de tipo Lagrangiano-Proyectado. Aunque también consideraremos una versión implícita de los esquemas propuestos, la experiencia previa obtenida con el sistema de ecuaciones de aguas poco profundas nos hace decantarnos por la utilización de un esquema implícito-explicito, ya que la ligera mejora obtenida en los resultados del esquema puramente implícito respecto al implícito-explicito no justifica la mayor complejidad que supone el mismo. Así pues, en cada iteración temporal, comenzamos resolviendo nuestro sistema en coordenadas lagrangianas, para después proyectar las soluciones obtenidas en las coordenadas eulerianas. Es ese primer paso el que podemos considerar tanto completamente implícito como implícito-explicito, mientras que la etapa de proyección se realiza siempre de forma explícita.

Referencias

- [1] C. Caballero-Cárdenas, M.J. Castro, T. Morales de Luna, M.L. Muñoz-Ruiz (2023). Implicit and implicit-explicit lagrange-projection finite volume schemes exactly wellbalanced for 1d shallow water system. *Applied Mathematics and Computation*, 443:127784.
- [2] M.J. Castro, C. Chalons, T. Morales (2018). A fully well-balanced Lagrange-Projection-type scheme for the shallow water equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 56(5), 3071-3098.
- [3] I. Gómez-Bueno, S. Boscarino, M.J. Castro, C. Parés, G. Russo (2023). Implicit and semi-implicit well-balanced finite-volume methods for systems of balance laws. *Applied Numerical Mathematics*. vol. 184, 18-48.

Estabilidad de algunas reconstrucciones de alto orden para la aproximación de leyes de conservación

S. AMAT, S. BUSQUIER, M.J. CASTRO, C.M. PARÉS

Departamento Matemática Aplicada y Estadística, Universidad Politécnica de Cartagena

sergio.amat@upct.es

Resumen: En este trabajo estudiaremos la estabilidad de algunos procedimientos de reconstrucción e interpolación de alto orden que se usan en la aproximación de leyes de conservación. La estabilidad se entiende en el sentido de que el salto de los valores puntuales reconstruidos en cada interfaz de celda tiene el mismo signo que el salto de los promedios de las celdas subyacentes a través de esa interfaz. Además, se verá que el tamaño de estos saltos después de la reconstrucción en relación con el salto de los promedios de las celdas subyacentes está acotado.

Referencias

- [1] S. Amat, S. Busquier and V.F. Candela (2003). A Polynomial Approach to the Piecewise Hyperbolic Method. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 17 (3), 205–217.
- [2] U.S. Fjordholm, S. Mishra and E. Tadmor (2013). ENO Reconstruction and ENO Interpolation Are Stable. *Found Comput Math*, 13, 139–159.

Modified exponential Rosenbrock methods to increase their accuracy

BEGOÑA CANO, MARÍA JESÚS MORETA

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Valladolid, IMUVA

bcano@uva.es

Abstract: In this talk a technique will be described to avoid order reduction when integrating reaction-diffusion initial boundary value problems with explicit exponential Rosenbrock methods. The technique does not require to impose any stiff order condition but to add some terms related to the information on the boundary. Theoretical results on local and global error will be given as well as some numerical experiments which corroborate the theoretical results, and in which a big gain in efficiency with respect to applying the standard method of lines can be observed. Moreover, we justify that, for most methods, no numerical differentiation is required to calculate the information on the boundary up to order 3 (and even to get order 4 with Dirichlet boundary conditions) and we give some comparisons with several other methods in the literature, with the corresponding stiff order.

Referencias

- [1] B. Cano, M. J. Moreta (2023). Exponential Rosenbrock methods without order reduction when integrating nonlinear initial boundary value problems. <https://arxiv.org/pdf/2307.12722.pdf>
- [2] B. Cano, M. J. Moreta (2023). Efficient exponential Rosenbrock methods till order four, submitted for publication.

Acknowledgments: This research was supported by Junta de Castilla y León and Feder through project VA169P20 and GIR ANEODA at University of Valladolid.

Symmetric-conjugate splitting methods for evolution equations of parabolic type

FERNANDO CASAS

Departament de Matemàtiques & IMAC, Universitat Jaume I, 12071-Castellón

casas@uji.es

Abstract: In this talk I will provide a short introduction to a class of operator splitting methods with complex coefficients which possess a special symmetry, the so-called symmetric-conjugate methods, and analyze their application for the time integration of linear evolution problems. Including complex coefficients with non-negative real parts permits the design of favorable high-order schemes that remain stable in the context of parabolic problems. This sets aside the second-order barrier for standard splitting methods with real coefficients as well as the fourth-order barrier for modified splitting methods involving double commutators. Relevant applications include non-reversible systems and ground state computations for Schrödinger equations based on the imaginary time propagation method.

This is joint work with Sergio Blanes, Cesáreo González and Mechthild Thalhammer.

Numerical approximation of a singularly perturbed convection-diffusion parabolic problem with incompatible initial and boundary data

JOSÉ LUIS GRACIA, EUGENE O'RIORDAN

IUMA y Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza

jlgracia@unizar.es

Abstract: A singularly perturbed parabolic problem of convection-diffusion type with incompatible inflow boundary data and initial conditions is examined. In the case of constant coefficients, a singular function is identified which matches the incompatibility in the data and also satisfies the associated homogenous differential equation. In the case of non-constant coefficients, the difference between a natural extension of this singular function and the solution of the parabolic problem is approximated numerically. When the convective coefficient only depends on the time variable and the initial/boundary data is discontinuous, then a mixed analytical/numerical approach is taken. A numerical method is constructed whose order of global convergence is shown to depend on the levels of compatibility satisfied by the data of the problem. Numerical results are presented to support the error bounds established in this talk.

This research is joint work with Eugene O'Riordan from the *Dublin City University, Ireland*.

Referencias

- [1] J.L. Gracia, E. O'Riordan (2023). A singularly perturbed convection-diffusion parabolic problem with incompatible boundary/initial data. *Appl. Numer. Math.*, 190, 168–186.

Acknowledgments: This research was partially supported by the Institute of Mathematics and Applications (IUMA), the Gobierno de Aragon (E24_23R) and the projects PID2022-141385NB-I00 and PID2022-137334NB-I00.

Very high-order accurate discontinuous Galerkin method for curved boundaries with polygonal meshes

ADÉRITO ARAÚJO, MILENE SANTOS, SÍLVIA BARBEIRO, STÉPHANE CLAIN, RICARDO
COSTA, GASPAR J. MACHADO

CMUC, Centre of Mathematics, University of Coimbra, 3000-143 Coimbra, Portugal

alma@mat.uc.pt

Abstract: Preserving the optimal convergence order of discontinuous Galerkin (DG) discretisations in curved domains is a critical and well-known issue. The proposed approach relies on the reconstruction for off-site data (ROD) method developed originally within the finite volume framework. The main advantages are simplicity, since only piecewise linear boundary approximations are used, and versatility, since any type of boundary condition can be imposed. The developed DG-ROD method consists in splitting the boundary conditions treatment and the leading discrete equations from a classical DG formulation into two independent solvers coupled in a simple and efficient iterative procedure. A numerical benchmark is provided to assess the capability of the method with Dirichlet and Neumann boundary conditions prescribed on curved boundaries, demonstrating that the optimal convergence order is effectively achieved.

Order reduction presented when integrating linear problems with General Linear Methods and how to avoid it

NURIA REGUERA, ISAÍAS ALONSO-MALLO

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de Burgos

nreguera@ubu.es

Abstract: General linear methods (GLMs) are a class of multistep and multistage methods used for the temporal integration of systems of ordinary differential equations. They were introduced in the literature by Burrage and Butcher [1] and have been used since then, being particular cases of GLMs some of the most common time integrators used to solve numerically ordinary differential equations, such as Runge-Kutta and linear multistep methods.

When a GLM is applied to a rigid problem, the effective order of convergence is governed by its stage order, which is less than or equal to the classical order of the method. This results in an order reduction phenomenon in all GLMs except those of high stage order.

In this work [2], we study the order reduction that arises when GLMs are used as time integrators in the method of lines to numerically solve initial boundary value problems with time-dependent boundary values. Moreover, we propose a technique with which it is possible to recover a unit of order.

Referencias

- [1] K. Burrage, J.C. Butcher (1980). Nonlinear stability of a general class of differential equation methods. *BIT Numer. Math.* 20, 185–203.
- [2] I. Alonso-Mallo, N. Reguera (2024). Avoiding order reduction phenomenon for general linear methods when integrating linear problems with time dependent boundary values. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 439.