

## Sesión Especial 17

# Desarrollo Matemático en Inteligencia Artificial y Machine Learning

### Organizadores:

- Roberto García Aragón (Universidad de Cádiz)
- Laura de Miguel (Universidad Pública de Navarra)
- Manuel Ojeda Hernández (Universidad de Málaga)
- Carlos López Molina (Universidad Pública de Navarra)
- David Lobo (Universidad de Cádiz)

### Descripción:

En la base del desarrollo de la inteligencia artificial y el aprendizaje máquina (o más conocido, *Machine Learning*) se encuentran diferentes modelos y operaciones matemáticas, que van desde las técnicas de análisis y fusión de datos hasta procesos de optimización o el uso del álgebra lineal (que es la base del aprendizaje profundo o *Deep Learning*) o la probabilidad. Esta sesión especial pretende continuar la estela de las sesiones organizadas en las ediciones del congreso RSME de Madrid (2000), Tenerife (2002), Valencia (2005), Oviedo (2009), Ávila (2011), Santiago (2013) y Zaragoza (2017) sobre interacciones entre Informática y Matemática, así como en el II Encuentro RSME-UMA de Ronda (2022). El objetivo principal de la propuesta es la divulgación de los últimos avances en diferentes disciplinas matemáticas cuya aplicación está destinada a la Inteligencia Artificial y el *Machine Learning*.

## Programa

MARTES, 23 de enero:

- 16:00 – 16:30 Mikel Ferrero Jaurrieta (Universidad Pública de Navarra)  
*Fusión de información multivaluada mediante grado de totalness*
- 16:30 – 17:00 Cedric Marco Detchart (Universitat Politècnica de València)  
*Modelización de los datos: fuerzas gravitacionales*
- 17:00 – 17:30 Francisco J. Valverde Albacete (Universidad Rey Juan Carlos)  
*Sobre el Análisis en Conceptos Formales como Modelo de Semántica Cognitiva en IA*
- 17:30 – 18:00 Iosu Rodríguez Martínez (Universidad Pública de Navarra)  
*Combinación de funciones de fusión a través de una extensión de funciones basadas en penalty*

JUEVES, 25 de enero:

- 11:30 – 12:00 Roberto G. Aragón (Universidad de Cádiz)  
*Enlazando retículos de conceptos multiadjuntos*
- 12:00 – 12:30 Cristina Alcalde (Universidad del País Vasco)  
*Composición de contextos L-fuzzy. Una herramienta para el diseño de biomateriales*
- 12:30 – 13:00 Manuel Ojeda Hernández (Universidad de Málaga)  
*Algoritmos CbO para el cálculo del retículo de conceptos*
- 13:00 – 13:30 Nicolás Madrid (Universidad de Cádiz)  
*Caracterización de retículos residuados sobre  $[0, 1]$  a través de los  $f$ -índices de inclusión y del operador composición*

JUEVES, 25 de enero:

- 16:00 – 16:25 Evangelina Santos (Universidad de Granada)  
*Hesitant fuzzy sets y gradual sets: un teorema de representación generalizado*
- 16:25 – 16:50 Carlos Bejines (Universidad de Málaga)  
*Un análisis sobre la agregación de espacios vectoriales difusos*
- 16:50 – 17:15 Noelia Rico (Universidad de Oviedo)  
*Aspectos cuantificables de las distribuciones de votos*
- 17:15 – 17:40 Francisco Pérez Gámez (Universidad de Málaga)  
*Definiendo las álgebras de Heyting débiles*
- 17:40 – 18:00 David Lobo (Universidad de Cádiz)  
*Medidas de inconsistencia de ecuaciones de relaciones difusas*

VIERNES, 26 de enero:

- 11:30 – 11:55 Raquel Fernández Peralta (Universitat de les Illes Balears)  
*Descubrimiento de subgrupos con implicaciones borrosas aplicado al análisis de resultados electorales*
- 11:55 – 12:20 Susana Montes (Universidad de Oviedo)  
*Hacia las funciones promedio para datos intervalares*
- 12:20 – 12:45 Asier Urío Larrea (Universidad Pública de Navarra)  
*Sistema de inferencia difuso basado en la comparación de reglas*
- 12:45 – 13:10 Gilberto Pérez (Universidad de A Coruña)  
*Forks*
- 13:10 – 13:30 M. Eugenia Cornejo (Universidad de Cádiz)  
*Resolución de ecuaciones bipolares de relaciones difusas en retículos*

# Fusión de información multivaluada mediante grado de totalness

M. FERRERO-JAURRIETA, C. LÓPEZ-MOLINA, J. FERNANDEZ, H. BUSTINCE

Dpto. de Estadística, Informática y Matemáticas, Universidad Pública de Navarra

mikel.ferrero@unavarra.es

**Resumen:** La fusión de información es una fase fundamental en cualquier proceso de inteligencia artificial, como por ejemplo la agregación de características de redes neuronales. Algunas funciones de agregación, como la integral de Choquet o Sugeno, requieren la ordenación de los elementos a agregar. Sin embargo, cuando la estructura es multivaluada esta tarea no es trivial. Con el objetivo de obtener un orden lineal para información multivaluada se introdujeron los órdenes admisibles [1]. Para construir éstos órdenes necesitamos tantas funciones de agregación como dimensiones tengan los elementos, lo cual no siempre es manejable. Las permutaciones admisibles [2] nos permiten obtener cuántas ordenaciones posibles hay a partir de los órdenes admisibles. En este trabajo introducimos el grado de totalness. Entendiendo que un orden parcial es una relación crisp, el grado de totalness nos permite obtener un grado en el que esta relación se mantiene. A partir de esta definición, obtenemos un conjunto de las mejores permutaciones admisibles y obtenemos la función de fusión teniendo en cuenta las permutaciones máximas admisibles. Por último, mostramos el uso de este tipo de funciones en el cálculo de los valores de las puertas de un modelo de red neuronal recurrente basado en Peephole LSTM, mejorando los resultados frente a otras funciones.

## Referencias

- [1] L. De Miguel , M. Sesma-Sara, M. Elkano, M. Asiain, H. Bustince (2017). An Algorithm for group decision making using  $n$ -dimensional fuzzy sets, admissible orders and OWA operators. *Information Fusion*, 37, 126-131.
- [2] D. Paternain, L. De Miguel, G. Ochoa, I. Lizasoain, R. Mesiar, H. Bustince (2019). The Interval-Valued Choquet Integral Based on Admissible Permutations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 27, 8, 1638-1647

**Agradecimientos:** Este trabajo ha sido financiado mediante proyecto de investigación PID2022-136627NB-I00 de la Agencia Estatal de Investigación y por Tracasa Instrumental.

## Modelización de los datos: fuerzas gravitacionales

C. MARCO-DETCART, J. A. RINCON, V. JULIAN, C. CARRASCOSA, C. LOPEZ-MOLINA

Dpto. de Sistemas Informáticos y Computación, Universitat Politècnica de València (UPV)

cedmarde@upv.es

**Resumen:** Numerosas técnicas de inteligencia artificial se inspiran en la naturaleza para modelar la percepción y comparación de objetos. Un ejemplo claro lo encontramos en la simulación de conexiones neuronales en el cerebro humano, lo que da lugar a las redes neuronales artificiales. Los algoritmos genéticos, basados en principios evolutivos para generar posibles poblaciones para encontrar soluciones, o el funcionamiento de los enjambres o las colonias de hormigas son otros ejemplos.

Relacionado con la inspiración natural encontramos aproximaciones basadas en la Ley de Gravitación Universal [1]. Aplicada a problemas matemáticos, como el clustering y la optimización, se recurre a ecuaciones y cálculos para modelar el comportamiento de partículas que representan nuestros datos.

El clustering basado en fuerzas [2], por ejemplo, se traduce en ecuaciones que describen el movimiento y la interacción de estas “partículas de datos”. Las matemáticas aquí son fundamentales para comprender cómo se comparan los datos, cómo se agrupan y cómo se configura el resultado final.

Además, encontramos aplicaciones en la regularización de imágenes, donde el modelo de fuerzas define cómo las “partículas de píxeles” se desplazan en el espacio de color para mejorar la calidad de las imágenes.

Incluso en el contexto de la teoría de agentes, donde se modelan sentimientos y emociones, el modelo matemático es la base para describir las relaciones y fuerzas que operan entre estos agentes virtuales.

### Referencias

- [1] I. Newton (1687). *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Pan, p. 510.
- [2] W. E. Wright (1977). Gravitational clustering, *Pattern Recognit.*, vol. 9, no. 3, pp. 151–166.

**Agradecimientos:** Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los proyectos PID2021-123673OB-C31, TED2021-131295B-C32 y PID2022-136627NB-I00 del MCIN/AEI/10.13039/501100011033, por “FEDER Una manera de hacer Europa”, CI-PROM/2021/077 de la Generalitat Valenciana y por el Servicio de Investigación de la Universitat Politècnica de València.

# Sobre el Análisis en Conceptos Formales como Modelo de Semántica Cognitiva en IA

FRANCISCO J. VALVERDE ALBACETE, CARMEN PELÁEZ MORENO

Dpto. Teoría de la Señal Comunicaciones, Sistemas Informáticos y Computación, Universidad Rey Juan Carlos

francisco.valverde@urjc.es

**Resumen:** Uno de los caminos para construir IA incorporada, embebida, extendida y enactivada (Ing. “Embodied, Embedded, Extended and Enacted”, 4E) es conseguir representaciones con un sustrato incorporado que soporten una interacción enactiva con el entorno.

Los requisitos para el modelado de los flujos *cuantitativos* de información entre un agente *situado* (es decir incorporado y embebido) y el entorno han sido ya propuestos anteriormente. En particular, es fácil medir la efectividad de una sola interacción con el entorno como una tarea de Aprendizaje Máquina (ML), aunque es más difícil observar un bucle de interacción.

Sin embargo, no podemos avanzar en la extensión de la cognición, ni su enacción porque no disponemos de una semántica asociada a las informaciones procesadas por las Inteligencias Artificiales (IA). Propiamente, la Semántica Léxica propone que el significado léxico surge de la oposición en presencia (sintagmática) y en ausencia (paradigmática) de unidades del significado, por ejemplo los lexemas y los marcos semánticos.

El Análisis en Conceptos Formales (Ing., Formal Concept Analysis, FCA) es un intento de vigorizar la teoría de retículos de orden encardinando los desarrollos abstractos en la percepción, cognición y acción. Afortunadamente, existen precedentes en el modelado de estructuras léxicas jerárquicas tanto para lexemas como para marcos semánticos utilizando las facilidades de modelado y exploración de datos del FCA.

En particular nos centramos en explorar extensiones del FCA que permiten, en primer lugar, contextos multi-valorados cuya incidencia toma valor en un semicuerpo idempotente, y en segundo lugar diferentes “modos” de crear conceptos formales para modelar diversos fenómenos de conceptualización.

**Agradecimientos:** Esta investigación se ha llevado a cabo bajo patrocinio del Ministerio de Ciencia e Innovación en el proyecto PID2021-125780NB-I00, EMERGE y la Línea de Actuación No 3. Programa de Excelencia para Francisco José Valverde Albacete. Convenio Plurianual entre Comunidad de Madrid y la Universidad Rey Juan Carlos.

# Combinación de funciones de fusión a través de una extensión de funciones basadas en penalty

IOSU RODRIGUEZ-MARTINEZ, ZDENKO TAKÁ?, FRANCISCO HERRERA, HUMBERTO BUSTINCE

Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas, Universidad Pública de Navarra  
iosu.rodriguez@unavarra.es

**Resumen:** La fusión de información es una tarea prevalente en el campo del aprendizaje automático, y las funciones de fusión y agregación son algunas de las herramientas matemáticas más populares para abordarla. No obstante, la elección de la más adecuada puede variar en función del problema.

Las funciones basadas en penalty [1] permiten seleccionar la mejor de entre una lista de funciones con respecto a una distancia y se han utilizado con éxito en áreas como la toma de decisión [2] o la reducción de imagen [3] en el pasado.

Otra estrategia posible es la de usar una combinación convexa de varias funciones de fusión. En este caso se considera la información provista por cada función, y se trata de ponderar adecuadamente cada una de ellas según su importancia.

En este trabajo extendemos el concepto de función basada en penalty con la intención de combinar ambos enfoques: combinar  $n$  funciones de fusión mediante una combinación convexa, ponderando la contribución de cada una a partir de una función basada en penalty. Presentamos métodos de construcción de estas funciones y demostramos su utilidad a la hora de agregar las características extraídas por una red neuronal convolucional, mejorando los resultados obtenidos con soluciones previos.

## Referencias

- [1] T. Calvo, G. Beliakov (2010). Aggregation functions based on penalties. *Fuzzy Sets and Systems*, 161(10), 1420–1436.
- [2] M. Elkan et al. (2018). Consensus via penalty functions for decision making in ensembles in fuzzy rule-based classification systems. *Applied Soft Computing*, 67, 728–740.
- [3] D. Paternain, A. Jurio, G. Beliakov (2012) Color image reduction by minimizing penalty functions. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems, IEEE*, 1–7.

**Agradecimientos:** Los autores agradecen la financiación de los proyectos PID2022-136627NB-I00 y P18-FR4961, la beca VEGA Slovak Republic 1/0267/21 y Tracasa Instrumental.

# Enlazando retículos de conceptos multiadjuntos

ROBERTO G. ARAGÓN, JESÚS MEDINA, SAMUEL MOLINA

Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz

roberto.aragon@uca.es

**Resumen:** El análisis de conceptos formales (FCA, de sus siglas en inglés) es una disciplina de las matemáticas que explota la teoría de retículos con el objetivo último de obtener información a partir de bases de datos relacionales, esto es, bases de datos en las que se pueda identificar un conjunto de objetos, un conjunto de atributos o propiedades, y relaciones entre los elementos de estos conjuntos. En el ambiente del FCA, a esta interpretación formal de la base de datos se llama contexto.

Uno de los principales retos en FCA es el anidamiento o enlace de diferentes contextos. La noción formal de *enlace* (bond, en inglés) está definida en el ambiente clásico de FCA y ha sido ampliamente estudiada en retículos residuados [1, 2]. Dados dos contextos formales, se denomina *enlace* a la relación definida sobre el conjunto de objetos del primer contexto y el conjunto de atributos del segundo contexto, consiguiendo así, vincular/enlazar ambos contextos formales.

En esta contribución se ha estudiado la noción de *enlace débil* y el problema de selección/generación de *enlaces* en el ambiente general de los retículos de conceptos multiadjuntos. Además, se presentará una primera relación entre los bonds y la factorización de contextos formales, que es otro reto relevante en FCA.

## Referencias

- [1] O. Krídlo, L. Antoni, S. Krajčí (2022). Selection of appropriate bonds between  $L$ -fuzzy formal contexts for recommendation tasks. *Information Sciences*, 606:21–37.
- [2] O. Krídlo, D. López-Rodríguez, L. Antoni, P. Eliaš, S. Krajčí, M. Ojeda-Aciego (2023). Connecting concept lattices with bonds induced by external information. *Information Sciences*, 648:119498.

**Agradecimientos:** Esta investigación ha sido parcialmente financiada por el Programa Operativo FEDER en colaboración con la Agencia Estatal de Investigación (AEI) con los proyectos PID2019-108991GB-I00 y PID2022-137620NB-I00, y por Proyectos de Transición Ecológica y Digital 2021 del Ministerio de Ciencias e Innovación con el proyecto TED2021-129748B-I00.

# Composición de contextos $L$ -fuzzy. Una herramienta para el diseño de biomateriales

CRISTINA ALCALDE, ITSASO LECETA

Dpto. Matemática Aplicada. Universidad del País Vasco (UPV/EHU)

c.alcalde@ehu.eus

**Resumen:** La composición de contextos  $L$ -fuzzy [1] permite establecer relaciones entre conjuntos de elementos que comparten una serie de atributos, proporcionando así una interesante herramienta para extraer información con aplicación en multitud de campos. En este trabajo veremos cómo podemos utilizar dicha herramienta en el diseño de biomateriales. En particular, el material diseñado se basa en quitosano, un polisacárido obtenido a partir de residuos derivados de la industria alimentaria, consiguiendo así un producto con valor añadido. Los materiales son diseñados según su aplicación, por lo que las propiedades requeridas van cambiando. El deseo de obtener una modificación en alguna de las propiedades obtenidas o en alguna variable de la formulación conlleva un coste inmenso de recursos, lo que hace que la estimación de las propiedades del material para diversas modificaciones de las formulaciones en la etapa de diseño sea de vital importancia. La utilización de contextos  $L$ -fuzzy ya ha demostrado ser de ayuda en la fase de diseño del material agilizando el proceso y minimizando el coste ambiental y económico [2]. En el presente trabajo, mediante la composición de contextos difusos, se desea estimar el efecto de la variación del peso molecular del quitosano en las propiedades del material, con el ahorro de recursos de todo tipo que esto conlleva.

## Referencias

- [1] C. Alcalde, A. Burusco, R. Fuentes-González (2012). Some Results on the Composition of  $L$ -Fuzzy Contexts. *Advances in Computational Intelligence, Part II*, Springer Berlin Heidelberg, 305-14.
- [2] I. Leceta, C. Alcalde, M. Urdanpilleta, P. Guerrero, K. de la Caba, A. Burusco (2021). New algorithm for the elucidation of functional properties of gelatin-based materials. *Computers & Chemical Engineering*, 153, 107410.

# Caracterización de retículos residuados sobre $[0, 1]$ a través de los $f$ -índices de inclusión y del operador composición

NICOLÁS MADRID

Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz

nicolas.madrid@uca.es

**Resumen:** Los  $f$ -índices de inclusión fueron introducidos originalmente en 2015 como una interesante forma de representar la inclusión entre dos conjuntos difusos [1]. Las investigaciones posteriores mostraron que la elección del  $f$ -índice de inclusión satisfacía, bajo una reescritura conveniente, los principales sistemas axiomáticos para la definición de medidas de inclusión entre conjuntos difusos [2, 3]; representaba una elección óptima de un operador de modus ponens [4]; y se podía representar en un cuadrado de oposición junto al  $f$ -índice de contradicción [5]. En esta charla presentamos un nuevo resultado que caracteriza la clase de retículos residuados que pueden definirse sobre el intervalo unidad  $[0, 1]$ , a través de retículos residuados sobre subconjuntos de  $f$ -índices de inclusión junto con el operador composición de funciones.

## Referencias

- [1] N. Madrid, M. Ojeda-Aciego, and I. Perfilieva (2015).  $f$ -inclusion indexes between fuzzy sets. In Proc. of IFSA- EUSFLAT.
- [2] N. Madrid and M. Ojeda-Aciego (2017). A view of  $f$ -indexes of inclusion under different axiomatic definitions of fuzzy inclusion. Lecture Notes in Artificial Intelligence Science, 10564:307-318.
- [3] N. Madrid and M. Ojeda-Aciego (2020). Functional degrees of inclusion and similarity between  $L$ -fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems 390:1-22.
- [4] N. Madrid and M. Ojeda-Aciego (2024). The  $f$ -index of inclusion as optimal adjoint pair for fuzzy modus ponens. Fuzzy Sets and Systems (accepted).
- [5] N. Madrid and M. Ojeda-Aciego (2024). Approaching the square of opposition in terms of the  $f$ -indexes of inclusion and contradiction. Fuzzy Sets and Systems (accepted).

# Algoritmos CbO para el cálculo del retículo de conceptos

MANUEL OJEDA HERNÁNDEZ, DOMINGO LÓPEZ RODRÍGUEZ, ÁNGEL MORA

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Málaga

manuojeda@uma.es

**Resumen:** En el análisis de conceptos formales (FCA), hay dos estructuras principales de conocimiento, el retículo de conceptos y la base de implicaciones válidas. En este trabajo nos centramos en la primera de ellas. La estrategia Close-by-One (CbO) [2], basada fundamentalmente en que el conjunto de extensiones es un sistema de clausura, es una de las más conocidas para crear algoritmos de cálculo del retículo de conceptos. Recientemente, se han publicado varias mejoras de esta estrategia, entre ellas la conocida como FastCbO [3]; y la familia de algoritmos InClose [1]. Sin embargo, las aportaciones en el entorno difuso están basadas mayoritariamente en el escalado del contexto difuso en uno crisp.

En este trabajo presentamos la extensión de los algoritmos crisp a un entorno nativo difuso, combinando las ventajas de los distintos algoritmos para obtener resultados más rápidamente con menos carga de cálculo. La presentación de estos algoritmos se hace junto con la comparación con las estrategias existentes para mostrar la mejoría tanto en tiempo como en cálculo de intents y número de tests realizados.

## Referencias

- [1] Andrews, S. (2015). A ‘Best-of-Breed’ approach for designing a fast algorithm for computing fixpoints of Galois Connections. *Information Sciences*, 295, 633-649.
- [2] Kuznetsov, S. O. (1993). A fast algorithm for computing all intersections of objects from an arbitrary semilattice. *Nauchno-Tekhnicheskaya Informatsiya Seriya 2-Informatsionnye Protsessy i Sistemy*, (1), 17-20.
- [3] Outrata J., Vychodil V. (2012). Fast Algorithm for Computing Fixpoints of Galois Connections Induced by Object-Attribute Relational Data. *Information Sciences* 185(1), 114-127.

**Agradecimientos:** Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el contrato predoctoral FPU19/01467 (MCIU), el proyecto VALID (PID2022-140630NB-I00 financiado por MCIN/ AEI/ 10.13039/ 501100011033) y el proyecto de investigación con referencia PID2021-127870OB-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

# Hesitant fuzzy sets y gradual sets: un teorema de representación generalizado

EVANGELINA SANTOS, PASCUAL JARA, LUIS MERINO, GABRIEL NAVARRO

Departamento de Álgebra, Universidad de Granada

esantos@ugr.es

**Resumen:** En este trabajo se presenta una propuesta que examina con detalle, desde un punto de vista categórico, la conexión que existe entre las dos formas equivalentes de determinar un conjunto difuso sobre un conjunto  $X$ : como una aplicación de  $X$  en  $[0, 1]$  o como la familia de subconjuntos de  $X$  formada por los cortes de nivel [3]. Esta equivalencia proviene de la adjunción entre los funtores  $Map$  y producto cartesiano  $\times$ , y puede ser vista como parte de un esquema más amplio que involucra a las clases formadas por los hesitant fuzzy sets y los gradual sets. Concretamente se establece un isomorfismo entre  $Map(X, \mathcal{P}([0, 1]))$ , una generalización de los set-valued fuzzy sets (también conocidos como hesitant fuzzy sets [1],[4]), y  $Map([0, 1], \mathcal{P}(X))$  una extensión de los gradual sets en el sentido de [2].

Considerada como un Teorema de Representación esta adjunción es el marco para producir identificaciones entre las dos perspectivas cuando restringimos a otras clases de conjuntos difusos extendidos, como los interval-valued fuzzy sets, y generaliza el establecido en [3] para conjuntos difusos.

## Referencias

- [1] H. Bustince et al., A historical account of types of fuzzy sets, and their relationships, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 24(1) (2016), 179–194.
- [2] D. Dubois, H. Prade, Gradual elements in a fuzzy set, Soft Computing 12 (2008), 165–175.
- [3] C. V. Negoita, D. A. Ralescu, Representation theorems for fuzzy concepts, Kybernetes 4(3) (1976), 65–70.
- [4] V. Torra, Hesitant fuzzy sets, International Journal Intelligence Systems 25 (2019), 529–539.

**Agradecimientos:** IMAG, Proyecto CEX2020-001105-M financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033

# Un análisis sobre la agregación de espacios vectoriales difusos

CARLOS BEJINES

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Málaga

cbejines@uma.es

**Resumen:** Este análisis contribuye a la investigación sobre la agregación de estructuras algebraicas, centrándose principalmente en la agregación de espacios vectoriales difusos, que fueron introducidos en [4]. Un extenso manual sobre funciones de agregación puede ser encontrado en [3]. El reciente artículo [1], que motiva este abstract, está estructurado en tres secciones distintas, y cada una de ellas aborda un aspecto específico del proceso de agregación.

La primera sección del artículo explora la autoagregación dentro de los subespacios vectoriales difusos. La segunda se centra en la agregación de subespacios vectoriales difusos similares, específicamente aquellos que pertenecen a la misma clase de equivalencia [2].

La última sección del artículo adopta un enfoque general y proporciona un análisis del problema de la agregación en el ámbito de los subespacios vectoriales difusos desde una perspectiva amplia. Examina los problemas fundamentales de la agregación de subespacios vectoriales difusos de manera precisa, proponiendo un resultado que caracteriza el hecho en sí. Además, se proporcionan corolarios significativos a partir del teorema principal.

## Referencias

- [1] C. Bejines (2023). Aggregation of fuzzy vector spaces. *Kybernetika*.
- [2] P. S. Das (1981). Fuzzy groups and level subgroups. *J. Math. Anal. And Applic.*, 84(1), 264-269.
- [3] M. Grabisch (2009). Aggregation functions, volume 127.
- [4] A. Katsaras and D. Liu (1977). Fuzzy vector spaces and fuzzy vector topological spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 58, 135-146.

**Agradecimientos:** Carlos Bejines agradece los apoyos financieros al Ministerio de Ciencia e Innovación cuyos códigos son PID2021-124063OB-I00 y PID2022-140630NB-I00.

# Aspectos cuantificables de las distribuciones de votos

NOELIA RICO, IRENE DÍAZ, AGUSTINA BOUCHET

Departamento de Informática, Universidad de Oviedo

noeliarico@uniovi.es

**Resumen:** En el contexto de la toma de decisiones, donde un grupo de votantes expresa sus preferencias sobre varios candidatos, existen diversos métodos de agregación de información. El propósito de todos ellos es fusionar las preferencias individuales en una elección única que busque maximizar, en algún sentido, la satisfacción individual de los votantes. Estos procesos se vinculan con la teoría de la elección social, campo en el que existen axiomas que se utilizan para entender cómo los procesos de agregación se comportan ante ciertas situaciones [1]. Sin embargo, aunque parece evidente que el modo en que se distribuyen las preferencias emitidas por los votantes influye en el proceso y el resultado de la agregación, ninguno de estos axiomas se centra en las particularidades de la votación y su distribución de preferencias.

Dado que utilizar este enfoque resultaría de gran interés para identificar cómo diferentes metodologías se comportan en relación con las características de los votos [2], en esta charla se introducen definiciones formales para medir diversos aspectos de la distribución de las preferencias emitidas por los votantes. Estas definiciones ofrecen una manera de caracterizar situaciones como la existencia de subpoblaciones con preferencias comunes entre los miembros de una subpoblación y diferentes a las de otras subpoblaciones, así como la identificación de candidatos que son ampliamente populares aunque no alcancen la máxima popularidad. Esto contribuye a comprender la incertidumbre inherente en estos procesos de toma de decisiones, permitiendo un abordaje más eficiente en la agregación de información.

## Referencias

- [1] A. Prasad, H. Pareek, P. Ravikumar (2015). Distributional rank aggregation, and an axiomatic analysis. In International Conference on Machine Learning, 2104-2112.
- [2] N. Rico, C. R. Vela, I. Díaz (2023). Reducing the time required to find the Kemeny ranking by exploiting a necessary condition for being a winner. European Journal of Operational Research, 305, 3, 1323-1336.

**Agradecimientos:** Esta investigación ha sido respaldada por el proyecto PID2022-139886NB-I00 financiado por el Gobierno de España.

# Definiendo las álgebras de Heyting débiles

FRANCISCO PÉREZ GÁMEZ, CARLOS BEJINES,

Departamento Matemática aplicada, Universidad de Málaga

franciscoperezgamez@uma.es

**Resumen:** Las álgebras de Heyting es una estructura matemática que tiene aplicación en distintas áreas como son la lógica, la topología o las ciencias de la computación. Cuando se definieron, se presentaron como una generalización de las álgebras de Boole (ver [2]). Estas álgebras tienen unas propiedades que las hacen bastante útiles para modelar sistemas con información parcial o desconocida considerando un marco difuso. Por ejemplo, [1].

Las álgebras de Heyting son estructuras que cumplen un conjunto de axiomas que generalizan a las álgebras de Boole. Un álgebra de Heyting es un retículo completo junto a una operación residuo ( $\rightarrow$ ) que cumple la siguiente propiedad de adjunción, para todo  $a, b, c \in L$ :  $a \wedge b \leq c$  si y solo si  $b \leq a \rightarrow c$ .

Es bien conocido que una condición necesaria para poder definir un álgebra de Heyting es que el retículo sobre el que se trabaja tiene que ser distributivo. En este trabajo vamos a introducir una nueva estructura que se llamará álgebra de Heyting débil, la cual, deben cumplir una debilitación de las condiciones de las álgebras de Heyting. Esta debilitación nos permitirá definir esta estructura sobre retículos no distributivos. También estudiaremos las condiciones necesarias y suficientes para poder definir esta nueva álgebra y daremos una caracterización de estas.

## Referencias

- [1] Stanimirović, Stefan and Micić, Ivana and Ćirić, Miroslav (2020). Approximate bisimulations for fuzzy automata over complete heyting algebras. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 30,2 437-447.
- [2] Heyting, Arend (1930). Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. *Sitzungsbericht PreuBische Akademie der Wissenschaften Berlin, physikalisch-mathematische Klasse II*. 42–56

**Agradecimientos:** Queremos agradecer la ayuda económica recibida de los proyectos del Ministerio de Ciencia e Innovación PID2022-140630NB-I00 y PID2021-127870OB-I00.

# Medidas de inconsistencia de ecuaciones de relaciones difusas

DAVID LOBO, VÍCTOR LÓPEZ-MARCHANTE, JESÚS MEDINA

Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz

david.lobo@uca.es

**Resumen:** Las ecuaciones de relaciones difusas (FRE), introducidas por E. Sánchez, son una teoría ampliamente estudiada en la literatura, con aplicación en campos como la toma de decisiones, la optimización y el procesamiento de imágenes. Con frecuencia, las bases de datos disponibles contienen información incierta o imperfecta, lo que deriva en la presencia de inconsistencias. Como resultado, una FRE asociada a dichos datos puede ser irresoluble.

Existen algunos trabajos que estudian cómo modificar el término independiente de una FRE irresoluble de forma que el resultado sea una FRE resoluble. Por un lado, el estudio presentado en [1] permite recuperar la resolubilidad de una FRE aumentando todas las componentes del término independiente o bien disminuyéndolas todas. Por su parte, el método definido en [2] se basa en las técnicas de reducción de atributos del análisis formal de conceptos (FCA), dando lugar a un proceso que fija algunas componentes del término independiente y modifica las restantes.

El objetivo de este trabajo es diseñar medidas que permitan comparar el término independiente de una FRE irresoluble con el término independiente obtenido mediante alguno de los métodos mencionados.

## Referencias

- [1] M. E. Cornejo, J. C. Díaz-Moreno, J. Medina (2017). Multi-adjoint relation equations: A decision support system for fuzzy logic. *International Journal of Intelligent Systems*, 32(8), 778–800.
- [2] D. Lobo, V. López-Marchante, J. Medina (2023). Reducing fuzzy relation equations via concept lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 463, 108465.

**Agradecimientos:** Parcialmente financiada por el Ministerio de Ciencia e Innovación con los proyectos PID2019-108991GB-I00 y PID2022-137620NB-I00, con el Proyecto de Transición Ecológica y Digital TED2021-129748B-I00, y por el Departamento de Economía, Conocimiento, Empresa y Universidad de la Junta de Andalucía con el proyecto FEDER-UCA18-108612, y por la Acción CA17124 de Cooperación Europea en Ciencia y Tecnología (COST).

# Descubrimiento de subgrupos con implicaciones borrosas aplicado al análisis de resultados electorales

RAQUEL FERNANDEZ-PERALTA, SEBASTIA MASSANET

Dpto. Ciencias Matemáticas e Informática, Universitat de les Illes Balears

r.fernandez@uib.es

**Resumen:** El descubrimiento de subgrupos es una técnica popular de minería de datos diseñada para identificar subgrupos de datos que son interesantes respecto de una variable objetivo fijada [1]. La importancia de un subgrupo se cuantifica numéricamente a través de una medida de calidad, que se selecciona de acuerdo con el objetivo concreto o los deseos del experto. Cada subgrupo se representa normalmente en forma de una regla *Condición*  $\rightarrow$  *Objetivo*, donde “*Objetivo*” representa la variable de interés y “*Condición*” es una conjunción de diferentes características. Recientemente, se ha introducido una nueva perspectiva para este tipo de técnicas basada en el uso de implicaciones borrosas [2]. A diferencia de las perspectivas existentes, la introducción del uso de estos operadores permite interpretar los subgrupos como implicaciones lógicas y que los algoritmos correspondientes puedan aplicarse a variables objetivo numéricas modeladas como variables lingüísticas borrosas. En esta contribución, se profundiza en el diseño e implementación de técnicas de descubrimiento de subgrupos basadas en implicaciones borrosas y en sus aplicaciones. En particular, como caso práctico se analizan los resultados de las últimas elecciones generales en España.

## Referencias

- [1] Atzmueller, M. (2015). Subgroup discovery. *Data Min. Knowl. Discov.*, 5, 35-49.
- [2] R. Fernandez-Peralta, S. Massanet, M. Gupta, K. Nanavati and B. Jayaram (2023). Subgroup Discovery through Sharp Transitions using Implicative Type Rules. 2023 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE).

**Agradecimientos:** Esta publicación es parte del Proyecto I+D+i PID2020-113870GBI00-“Desarrollo de herramientas de Soft Computing para la Ayuda al Diagnóstico Clínico y a la Gestión de Emergencias (HESOCODICE)”, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/.

# Hacia las funciones promedio para datos intervalares

SUSANA MONTES, SERGIO FERNÁNDEZ, PELAYO S. DOSANTOS, SUSANA DÍAZ

Departamento de Estadística e I.O. y D.M., Universidad de Oviedo

montes@uniovi.es

**Resumen:** Las funciones de agregación [2] han demostrado ser de utilidad en numerosos campos durante los últimos años. Es especialmente relevante las distintas aplicaciones que tienen un tipo especialmente importante de funciones de agregación, las funciones promedio [1]. Tanto unas como otras, son habitualmente establecidas como aplicaciones sobre el intervalo cerrado  $[0, 1]$  y como tal han sido aplicadas con éxito en la lógica difusa. No obstante, las funciones promedio son además herramientas fundamentales en el área de la estadística descriptiva, donde los datos a agregar son números reales cualesquiera. Parece, por tanto, lógico plantearse el análisis de este tipo de medidas para valores reales cualesquiera. Por otro lado, en los últimos años han surgido numerosos campos donde los datos a tratar no son números sino intervalos y, aunque se podrían representar mediante algún tipo de marca de clase, lo lógico sería mantener toda la información contenida en dicho intervalo, sin necesidad de reducir el mismo a un número. Surge así la idea de definir las funciones promedio para datos intervalares. En concreto se va a trabajar con intervalos reales cerrados cualesquiera. Al no existir en el conjunto de tales intervalos un orden total clásico, en este trabajo se va a analizar la influencia de los distintos órdenes considerados, pasando por el orden reticular y los órdenes admisibles [3], en este tipo de medidas. Por coherencia con el tipo de datos a tratar, los órdenes serán extendidos a intervalos cerrados de extremos reales cualesquiera.

## Referencias

- [1] G. Beliakov, H. Bustince, T. Calvo (2016). A Practical Guide to Averaging Functions. Springer.
- [2] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo (2007). Aggregation Functions: A Guide for Practitioners. Springer.
- [3] F. Santana, B. Bedregal, P. Viana, H. Bustince (2020). On admissible orders over closed subintervals of  $[0, 1]$ . Fuzzy Sets and Systems, 399, 44-54.

**Agradecimientos:** Esta investigación ha sido financiada parcialmente por el proyecto PID2022-139886NB-I00 financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

# Sistema de inferencia difuso basado en la comparación de reglas

ASIER URÍO-LARREA, JAVIER FERNÁNDEZ, GRAÇALIZ DIMURO, HUMBERTO BUSTINCE

Departamento Estadística Matemáticas e Informática, Universidad Pública de Navarra

asier.urio@unavarra.es

**Resumen:** Zadeh introdujo en 1965 el modus ponens generalizado [1], un sistema que ha sido ampliamente usado para crear sistemas de inferencia que trabajan con información imprecisa. Estos sistemas emplean reglas si-entonces las cuales tienen conjuntos difusos tanto en los antecedentes como en los consecuentes. Inicialmente Zadeh propuso el mecanismo de inferencia denominado regla de inferencia composicional [2] y posteriormente el mecanismo de interpolación [3]. Otros autores también han desarrollado una variedad de mecanismos con el objetivo de implementar el modus ponens generalizado. La aportación principal de este trabajo es establecer una medida de comparación de reglas difusas. Esta medida emplea diferentes índices entre conjuntos difusos. Estos índices se aplican a cada par de conjuntos en los antecedentes y consecuentes de cada regla y finalmente se agregan todos los valores individuales obtenidos. El segundo objetivo es la presentación de un método basado en la comparación de reglas difusas que permita resolver el modus ponens generalizado.

## Referencias

- [1] L.A. Zadeh (1965). Fuzzy sets. Inform. Control 8 , 338-353.
- [2] L. A. Zadeh (1973). Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics SMC-3 (1), 28-44.
- [3] L. Zadeh (1983). The role of fuzzy logic in the management of uncertainty in expert systems. Fuzzy Sets and Systems 11 (1), 199-227.

**Agradecimientos:** Este trabajo está financiado por los proyectos de investigación PID2022-136627NB-I00 de la Agencia Estatal de Investigación y los proyectos CNPq (301618/2019-4,305805/2021-5) y FAPERGS (19/2551-0001660-3). Asier Urio-Larrea es beneficiario de una ayuda predoctoral Santander-UPNA 2021/22.

## Forks

GILBERTO PÉREZ, FELICIDAD AGUADO, PEDRO CABALAR, JORGE FANDIÑO, DAVID  
PEARCE, CONCEPCIÓN VIDAL

Departamento de Ciencias de la Computación y Tecnologías de la Información, Universidad  
de A Coruña

gilberto.pvega@udc.es

**Resumen:** Abordamos el problema de comprobar la equivalencia fuerte (strong equivalence) de programas lógicos que contienen átomos auxiliares locales, y son eliminados de sus modelos estables y prohibidos en cualquier contexto externo. Esta propiedad, que se denomina equivalencia proyectiva fuerte (Projective Strong Equivalence, PSE) de programas lógicos, garantiza que dos programas lógicos tienen el mismo comportamiento (bajo la semántica de modelos estables) independientemente de un contexto común e ignorando el efecto de los átomos auxiliares. Se sabe que no se puede reformular cualquier programa lógico con átomos auxiliares como otro programa lógico sin ellos bajo PSE, esto se conoce como *strongly persistent forgetting*.

Presentamos una extensión de Equilibrium Logic y su base monótona, la lógica del Here-and-There, en la que se trata con una nueva conectiva  $|$  a la que llamamos *fork*. Dados dos programas  $P$  y  $P'$  (entendiendo un programa como la conjunción de sus reglas) el significado intuitivo de esta conectiva es que los modelos estables de  $P | P'$  corresponden a la unión de modelos estables de  $P$  y  $P'$  en cualquier contexto  $Q$ , esto es  $SM[(P | P') \wedge Q] = SM[P \wedge Q] \cup SM[P' \wedge Q]$ . Proporcionamos una caracterización semántica de PSE para *forks* que se utiliza para demostrar que, en esta extensión, siempre es posible olvidar átomos auxiliares bajo persistencia fuerte. También demostramos que los *forks* pueden traducirse de nuevo a programas lógicos introduciendo nuevos átomos auxiliares, esta traducción es exponencial en el caso peor. Esto nos permite demostrar que el razonamiento con *forks* tiene la misma complejidad que la de los programas lógicos ordinarios allanando el camino para una implementación eficiente de los *forks*.

### Referencias

- [1] F. Aguado, P. Cabalar, J. Fandiño, D. Pearce, G. Pérez, C. Vidal. A polynomial reduction of forks into logic programs. *Artificial Intelligence*. 308 (2022) 1037121.
- [2] F. Aguado, P. Cabalar, J. Fandiño, D. Pearce, G. Pérez, C. Vidal. Syntactic ASP forgetting with forks. *Artificial Intelligence*. 326 (2024) 104033.

# Resolución de ecuaciones bipolares de relaciones difusas en retículos

M. EUGENIA CORNEJO, ELENA JARAMILLO-ROSADO, DAVID LOBO

Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz

mariaeugenia.cornejo@uca.es

**Resumen:** Las ecuaciones bipolares de relaciones difusas ya se han empleado con éxito en problemas de optimización, en cambio, la literatura específica sobre la resolución de estas ecuaciones no es abundante. De hecho, la mayoría de las publicaciones sobre ecuaciones bipolares de relaciones difusas están restringidas al intervalo unidad, considerando las composiciones máximo-norma triangular (Gödel, producto y Lukasiewicz) y la negación estándar. Recientemente se han obtenido avances en el desarrollo de esta teoría, los resultados presentados en [1] han ampliado el marco algebraico de las ecuaciones bipolares al contexto teórico de los retículos no lineales, considerando al mismo tiempo la clase más general posible de normas triangulares, una negación involutiva arbitraria y un elemento supremo irreducible del retículo como término independiente. En este trabajo, siguiendo el enfoque planteado en [2], se propone una estrategia alternativa a la proporcionada en [1], para hallar el conjunto de soluciones de dichas ecuaciones mediante el estudio de inecuaciones bipolares de relaciones difusas. Esta nueva estrategia nos permitirá abordar el estudio de la resolución de ecuaciones bipolares con término independiente supremo reducible.

## Referencias

- [1] M. Eugenia Cornejo, David Lobo, Jesús Medina, Bernard De Baets (2022). Bipolar equations on complete distributive symmetric residuated lattices: The case of a join-irreducible right-hand side. *Fuzzy Sets and Systems*, 442, 92-108.
- [2] Bernard De Baets (1995). An Order-Theoretic Approach to Solving Sup-T Equations. In: Ruan, D. (eds) *Fuzzy Set Theory and Advanced Mathematical Applications*. International Series in Intelligent Technologies, 4, 67-87. Springer, Boston, MA.

**Agradecimientos:** Esta investigación ha sido parcialmente financiada por el Ministerio de Ciencia e Innovación con los proyectos PID2019-108991GB-I00 y PID2022-137620NB-I00, con el Proyecto de Transición Ecológica y Digital TED2021-129748B-I00, por el Departamento de Economía, Conocimiento, Empresa y Universidad de la Junta de Andalucía con el proyecto FEDER-UCA18-108612, y por la Acción CA17124 de Cooperación Europea en Ciencia y Tecnología (COST).