

Sesión Especial 14

Métodos numéricos para la resolución de problemas no lineales

Organizadores:

- José Antonio Ezquerro Fernández (Universidad de La Rioja)
- José Manuel Gutiérrez Jiménez (Universidad de La Rioja)
- Miguel Ángel Hernández Verón (Universidad de La Rioja)

Descripción: La resolución de ecuaciones no lineales es uno de los problemas matemáticos que aparecen con mayor frecuencia en las diferentes disciplinas científicas y los métodos iterativos son una pieza clave en la resolución de este tipo de ecuaciones. Esta sesión especial se sitúa en el marco general de la aplicación de métodos iterativos para la resolución de problemas no lineales, centrandó nuestro interés en el tratamiento numérico de la resolución de diversos tipos de problemas en los que aparecen ecuaciones no lineales de diversa índole: ecuaciones escalares, sistemas de ecuaciones, ecuaciones matriciales, ecuaciones integrales, problemas de valores en la frontera, ecuaciones en derivadas parciales, problemas de optimización, etc. Y los objetivos de esta sesión se centran en mostrar los últimos avances llevados a cabo en este campo.

Programa

JUEVES, 25 de enero:

- 11:30 – 12:00 Alicia Cordero (Universitat Politècnica de València)
Estimación de inversas matriciales mediante métodos iterativos con funciones peso y su análisis de estabilidad
- 12:00 – 12:30 Juan R. Torregrosa (Universitat Politècnica de València)
Familia paramétrica vectorial de métodos iterativos de orden 4 libres de Jacobianas
- 12:30 – 13:00 Vicente F. Candela (Universitat de València)
Iterative methods for solving noisy nonlinear equations
- 13:00 – 13:30 José M. Gutiérrez (Universidad de La Rioja)
Algunas sorpresas en el estudio dinámico de la familia Chebyshev-Halley
- 16:00 – 16:30 Eva G. Villalba (Universidad Internacional de La Rioja)
Análisis dinámico y numérico de métodos clásicos para encontrar raíces múltiples aplicados a diferentes multiplicidades
- 16:30 – 17:00 Juan C. Trillo (Universidad Politécnica de Cartagena)
Una reconstrucción no lineal, local y simétrica de clase casi C^3 que conserva la convexidad
- 17:00 – 17:30 Víctor Álvarez-Aparicio (Universidad de La Rioja)
Una clasificación topológica de las funciones racionales complejas para la resolución de ecuaciones racionales
- 17:30 – 18:00 Domingo Gámez (Universidad de Granada)
Solución numérica de sistemas de ecuaciones integrales intervalares

VIERNES, 26 de enero:

- 11:30 – 12:00 Ana I. Garralda-Guillem (Universidad de Granada)
Solución aproximada de un problema inverso asociado a un sistema de ecuaciones variacionales mixtas en dominios perforados
- 12:00 – 12:30 María I. Berenguer (Universidad de Granada)
Aproximación de números difusos y de funciones difuso valuadas
- 12:30 – 13:00 Manuel Ruiz Galán (Universidad de Granada)
Un enfoque geométrico para la estimación de parámetros en algunos problemas convexos
- 13:00 – 13:30 Jesús Cortés (Universidad de Castilla-La Mancha)
Un método de orden reducido local para un problema de Rayleigh-Bénard

Estimación de inversas matriciales mediante métodos iterativos con funciones peso y su análisis de estabilidad

ALICIA CORDERO, ELAINE A. SEGURA, JUAN R. TORREGROSA, MARÍA P. VASSILEVA

Inst. Matemáticas Multidisciplinar, Universitat Politècnica de València

acordero@mat.upv.es

Resumen: En este trabajo mostramos una familia biparamétrica de métodos iterativos sin memoria para calcular la inversa de una matriz no singular, sin usar operadores inversos en su fórmula iterativa. Dicha familia se diseña utilizando la técnica de funciones peso y tiene al método clásico de Homeier [1] como caso particular,

$$\begin{aligned}y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\x_{k+1} &= x_k - \frac{1}{2}f(x_k) \left(\frac{1}{f'(x_k)} + \frac{1}{f'(y_k)} \right).\end{aligned}$$

Todos los elementos de la familia tienen orden de convergencia cúbico, tanto en el caso escalar como en el matricial.

Por otra parte, presentamos un análisis dinámico específico para el cálculo de inversas matriciales que, no sólo refleja los resultados teóricos en cuanto a condiciones de convergencia, sino que hace visibles regiones de comportamiento estable fuera de la región donde se ha demostrado su convergencia. Estos resultados se corroboran en las pruebas numéricas con matrices aleatorias de gran tamaño.

Referencias

- [1] H. H. H. Homeier (2005). On Newton-type methods with cubic convergence. J. Comput. Appl. Math. 176, 425-432.

Familia paramétrica vectorial de métodos iterativos de orden 4 libres de Jacobianas

JUAN R. TORREGROSA, ALICIA CORDERO, RENSO ROJAS, PAULA TRIGUERO-NAVARRO

Inst. Matemáticas Multidisciplinar, Universitat Politècnica de València

jrortor@mat.upv.es

Resumen: En este trabajo, presentamos una familia paramétrica de métodos iterativos, libres de matrices Jacobianas, para aproximar la solución de sistemas no lineales $F(x) = 0$.

Los autores diseñaron en [1] una clase de esquemas para la resolución de sistemas no lineales, óptimos según la conjetura publicada en [2]. A partir de este trabajo, se intenta eliminar las matrices Jacobianas utilizadas en el proceso iterativo, manteniendo el orden de convergencia. El resultado es la siguiente familia biparamétrica, cuya expresión iterativa es

$$\begin{aligned}y^{(k)} &= x^{(k)} - [x^{(k)} + rF(x^{(k)}), x^{(k)} - rF(x^{(k)}); F]^{-1} F(x^{(k)}), \\x^{(k+1)} &= y^{(k)} - [x^{(k)} + rF(x^{(k)}), x^{(k)} - rF(x^{(k)}); F]^{-1} (p_k F(y^{(k)}) + q_k F(x^{(k)})),\end{aligned}$$

donde

$$\nu_k = \frac{F(y^{(k)})^T F(y^{(k)})}{F(x^{(k)})^T F(x^{(k)})}, \quad K_k = \frac{1}{1 + \lambda \nu_k}, \quad p_k = K_k(1 + \psi \nu_k), \quad \text{y } q_k = 2K_k \nu_k.$$

Demostramos que todos los métodos de la familia tienen orden 4, con independencia del valor de los parámetros r , λ y ψ . Analizamos el índice de eficiencia de estos esquemas, comparándolos con otros existentes, así como su comportamiento sobre ejemplos académicos y aplicados.

Referencias

- [1] A. Cordero, R. Rojas-Hiciano, J. R. Torregrosa, M. Penkova (2023). A highly efficient class of optimal fourth-order methods for solving nonlinear systems. *Numerical Algorithms*, 116 <https://doi.org/10.1007/s11075-023-01631-9>
- [2] V. Arroyo, A. Cordero, J. R. Torregrosa (2011). Approximation of artificial satellites' preliminary orbits: The efficiency challenge. *Mathematical and Computer Modelling*, 54 (7), 1802-1807.

Iterative methods for solving noisy nonlinear equations

VICENTE F. CANDELA

Departament Matemàtiques, Universitat de València

candela@uv.es

Abstract: Iterative methods for solving nonlinear equations allow a certain amount of error due to contractivity. However, convergence theorems (local, semilocal or global) require deterministic regularity conditions.

Is it possible to consider Newton type methods when the function is corrupted by stochastic noise? How can a method deal with Gaussian noise? How can we modify convergence theorems like Kantorovich's in order to obtain good bounds of convergence?

In this talk, we provide some hints to answer these questions, and we propose some strategies which help to solve these problems.

Algunas sorpresas en el estudio dinámico de la familia Chebyshev-Halley

JOSÉ M. GUTIÉRREZ

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

jmguti@unirioja.es

Resumen: En este trabajo presentamos algunos resultados novedosos y, en cierta medida sorprendentes, sobre el estudio de la famosa familia de procesos iterativos de Chebyshev-Halley ([1], [3]) para resolver ecuaciones polinómicas $p(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}$. Estos métodos están definidos por una relación recurrente $z_{n+1} = G_\alpha(z_n)$, $n \geq 0$, donde

$$G_\alpha(z) = z - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{L_p(z)}{1 - \alpha L_p(z)}\right) \frac{p(z)}{p'(z)}, \quad L_p(z) = \frac{p(z)p''(z)}{p'(z)^2}.$$

Entre estas sorpresas dinámicas podemos destacar el comportamiento del infinito cuando el dominio se extiende al plano complejo ampliado $\widehat{\mathbb{C}}$ o la existencia de parejas método iterativo y polinomio para los cuales la función racional $G_\alpha(z)$ asociada tiene un doble mal comportamiento como método para encontrar raíces. Este doble mal comportamiento viene propiciado por la presencia tanto de puntos fijos extraños como de ciclos (distintos de las raíces de $p(z)$) con un carácter atractor. Veremos que este doble mal comportamiento se pone de manifiesto, por ejemplo, en el método de Chebyshev [2].

Referencias

- [1] A. Cordero, J. R. Torregrosa, P. Vindel (2013). Dynamics of a family of Chebyshev-Halley type methods. *Appl. Math. Comput.*, 2019:16, 8568-8583.
- [2] J. M. Gutiérrez, J. L. Varona (2020). Superattracting extraneous fixed points and n -cycles for Chebyshev's method on cubic polynomials. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 19:54, 1-23.
- [3] W. Werner (1981). Some improvements of classical iterative methods for the solution of nonlinear equations. *Numerical Solution of Nonlinear equations. Lecture Notes in Math.*, 878, 427-440.

Análisis dinámico y numérico de métodos clásicos para encontrar raíces múltiples aplicados a diferentes multiplicidades

EVA G. VILLALBA, BEATRIZ CAMPOS, PURA VINDEL

Universidad Internacional de la Rioja

eva.garciavillalba@unir.net

Resumen: En este trabajo estudiamos los métodos clásicos para raíces múltiples de Newton, Chebyshev y Halley definidos en [1, 2, 3], respectivamente. El esquema iterativo que los define depende del parámetro m , que representa la multiplicidad de la raíz que queremos aproximar. Uno de los inconvenientes de usarlos radica en que tenemos que ajustar la expresión de los esquemas si queremos aproximar soluciones con distintas multiplicidades. Por este motivo, también trabajamos con el método de Schröder (ver [1]), que aproxima las raíces múltiples de una función sin emplear la multiplicidad m en su esquema iterativo.

Así, nuestro objetivo principal en este trabajo es comprobar la robustez de los métodos mencionados cuando los aplicamos a funciones cuyas raíces poseen diferentes multiplicidades. Para ello, realizamos un estudio exhaustivo de la dinámica compleja de los métodos al aplicarlos sobre el polinomio:

$$p(z) = z^m(z - 1)^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Posteriormente, hacemos un estudio numérico de los métodos cuando aproximamos raíces con distintas multiplicidades en los casos de funciones no polinómicas.

Referencias

- [1] E. Schröder (1870). Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. *Mathematische Annalen* volume, 2, 317-365.
- [2] B. Neta (2008). New third order nonlinear solvers for multiple roots. *Applied Mathematics and Computation*, 202, 162-170.
- [3] E. Hansen, M. Patrick (1976). A family of root finding methods. *Numerische Mathematik*, 27, 257-269.

Una reconstrucción no lineal, local y simétrica de clase casi C^3 que conserva la convexidad

JUAN CARLOS TRILLO, ISABEL JIMÉNEZ INIESTA

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística, Universidad Politécnica de Cartagena

jc.trillo@upct.es

Resumen: El propósito de este trabajo es introducir un operador de reconstrucción no lineal que se construye localmente guardando simetría y preservando la convexidad de los datos iniciales. Se analizan importantes propiedades como la reproducción de polinomios hasta de segundo grado, el orden de aproximación, la suavidad de la reconstrucción, la propiedad de Lipschitz y la preservación de la convexidad. Más concretamente, obtenemos un operador de clase casi C^3 simétrico y local por construcción que mantiene importantes propiedades sobre convexidad siempre que estén presentes en los datos iniciales. Se presentan algunos test testando el orden de aproximación numérico y la preservación de la convexidad.

Este trabajo sigue la línea de un trabajo anterior [2], y busca extender las ideas a mayor orden como en [1], pero manteniendo la convexidad de los datos iniciales.

Referencias

- [1] S. Amat, K. Dadourian, J. Liandrat, J. C. Trillo (2013). High order nonlinear interpolatory reconstruction operators and associated multiresolution schemes. *J. Comput. Appl. Math.* 253, 163-180.
- [2] P. Ortiz, J. C. Trillo (2021). On the convexity preservation of a quasi C^3 nonlinear interpolatory reconstruction operator on σ quasi-uniform grids. *Mathematics*, 9(4), 310. <https://doi.org/10.3390/math9040310>.

Una clasificación topológica de las funciones racionales complejas para la resolución de ecuaciones racionales

V. ÁLVAREZ-APARICIO, L.J. HERNÁNDEZ-PARICIO, M.T. RIVAS-RODRÍGUEZ

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de la Rioja

valvarezaparicio@gmail.com

Resumen: La familia de funciones racionales complejas es de gran interés tanto a nivel numérico como dinámico. Algunos de los métodos de aproximación a las raíces más estudiados y empleados para resolver problemas no lineales involucran la construcción de este tipo de funciones (como el famoso método de Newton o el método de Chebyshev, aplicados sobre polinomios). El comportamiento dinámico de la composición iterada de este tipo de funciones es objeto de numerosos estudios de carácter numérico, analítico, topológico, e incluso algebraico, por su relevancia en diversos contextos y por sus complejas y sorprendentes propiedades fractales.

En esta comunicación se propondrá una clasificación de las funciones racionales complejas como cubiertas ramificadas de la esfera de Riemann, que nos permitirá aprovechar técnicas topológicas de levantamiento de caminos para aproximar todas las soluciones (junto con sus respectivas multiplicidades) de una ecuación racional. Los resultados teóricos obtenidos darán lugar a una serie de algoritmos, que han sido implementados en el lenguaje Julia, que ilustraremos a través de ejemplos.

Referencias

- [1] V. Álvarez-Aparicio (2023). PathLifting.jl. [Online].
- [2] J. Bezanson, A. Edelman, S. Karpinski, V. B. Shah (2017). Julia: A Fresh Approach to Numerical Computing. ArXiv, abs/1411.1607.
- [3] R. H. Fox (1957). Covering spaces with singularities. Princeton University Press, 243–257.
- [4] A. Hatcher (2002). Algebraic Topology. Cambridge University Press.

Solución numérica de sistemas de ecuaciones integrales intervalares

D. GÁMEZ, M. I. BERENGUER, A. I. GARRALDA GUILLEM, M. RUIZ-GALÁN

Departamento Matemática Aplicada, Universidad de Granada

domingo@ugr.es

Resumen: En este trabajo extendemos los resultados obtenidos en [1] para abordar el estudio de sistemas de ecuaciones integrales de Volterra en ambiente de incertidumbre. Los métodos numéricos obtenidos en trabajos anteriores para sistemas de ecuaciones integrales de Volterra para funciones reales [2], los ampliamos a funciones intervalares. Tratamos también el estudio de problemas inversos, donde la determinación de ciertos parámetros asociados a un modelo dado, se basan en una versión perturbada del Teorema del Collage, el cual nos permite transformar el problema de estimación de parámetros en otro de minimización de una determinada familia de distancias collage asociadas. Finalizamos con algunos ejemplos numéricos que confirman la validez y precisión de los métodos teóricos empleados.

Referencias

- [1] M. Arana-Jiménez, M. I. Berenguer, D. Gámez, A. I. Garralda-Guillem, M. Ruiz Galán (2020). A perturbed collage theorem and its application to inverse interval integral problems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 90, 105365, 10 pages.
- [2] M. I. Berenguer, D. Gámez, A. I. Garralda-Guillem, M. Ruiz Galán, M. C. Serrano Pérez (2011). Biorthogonal systems for solving Volterra integral equation system of the second kind. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235, 1875-1883.

Agradecimientos: Investigación parcialmente financiada por la Junta de Andalucía, Proyecto FQM359.

Solución aproximada de un problema inverso asociado a un sistema de ecuaciones variacionales mixtas en dominios perforados

A. I. GARRALDA-GUILLEM, M.I. BERENGUER, D. GÁMEZ, H. KUNZE, D. LA TORRE,
M. RUIZ GALÁN

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Granada

agarral@ugr.es

Resumen: En este trabajo analizamos en primer lugar condiciones que aseguran la existencia de solución de un problema inverso, en el sentido del Teorema del collage (ver [2]), asociado a una variante de un sistema de ecuaciones variacionales mixtas. Partiendo de los resultados de [3], introducimos una perturbación en una de las ecuaciones y consideramos un dominio con agujeros, que llamaremos dominio perforado. Estas modificaciones vienen motivadas por las aplicaciones de estos modelos. Posteriormente estudiamos la influencia en el resultado del tamaño de los agujeros y establecemos ciertos resultados de convergencia (ver [1]). Finalmente ilustramos los resultados con ejemplos numéricos.

Referencias

- [1] M. I. Berenguer, D. Gámez, A. I. Garralda-Guillem, H. Kunze, D. La Torre, M. Ruiz Galán (2023). Solving inverse problems for mixed-variational equations on perforated domains. *Computational and Applied Mathematics*, 42:297, 1-12.
- [2] M. I. Berenguer, H. Kunze, D. La Torre, M. Ruiz Galán (2016). Galerkin method for constrained variational equations and a collage-based approach to related inverse problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 292, 67–75.
- [3] A. I. Garralda-Guillem, M. Ruiz Galán (2019). A minimax approach for the study of systems of variational equations and related Galerkin schemes. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 354, 103–111.

Agradecimientos: Investigación parcialmente financiada por la Junta de Andalucía, Proyecto FQM359.

Aproximación de números difusos y de funciones difuso valuadas

M. I. BERENGUER, D. GÁMEZ, A. I. GARRALDA-GUILLÉM, M. RUIZ GALÁN

Departamento de Matemática Aplicada e Instituto de Matemáticas (IMAG), E.T.S. de Ingeniería de Edificación, Universidad de Granada

maribel@ugr.es

Resumen: La aproximación de números difusos y de funciones difuso valuadas de variable real se ha abordado a lo largo de los años desde varias perspectivas, dependiendo del uso previsto de la aproximación (véase [3, 4]). En este trabajo se exponen los resultados recientemente obtenidos en ambos contextos (véase [1, 2]). Concretamente, proponemos métodos constructivos que se basan en el uso de apropiadas bases de Schauder en ciertos espacios de Banach. Dichos métodos amplían algunas de las aproximaciones previamente conocidas. Ilustramos los métodos en algunos casos particularmente interesantes proporcionando algoritmos de gran simplicidad

Referencias

- [1] M. Arana-Jiménez, M. I. Berenguer, D. Gámez, A. I. Garralda-Guillem, M. Ruiz Galán (2020). A perturbed collage theorem and its application to inverse interval integral problems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 90, 105365.
- [2] M. I. Berenguer, D. Gámez, A. I. Garralda-Guillem, M. Ruiz Galán (2023). A generalized and unified approach to the approximation of fuzzy numbers and its arithmetic and characteristics. *Fuzzy Sets and Systems*, 473, 108727.
- [3] L. Coroianu, M. Gagolewski, P. Grzegorzewski (2019). Piecewise linear approximation of fuzzy numbers: Algorithms, arithmetic operations and stability of characteristics. *Soft Computing* 23, 9491-9505.
- [4] V. L. G. Nayagam, J. Murugan (2021). Hexagonal fuzzy approximation of fuzzy numbers and its applications in MCDM. *Complex & Intelligent Systems* 7, 1459-1487.

Agradecimientos: Investigación parcialmente financiada por Junta de Andalucía, Proyecto FQM359.

Un enfoque geométrico para la estimación de parámetros en algunos problemas convexos

M. RUIZ GALÁN, A. I. GARRALDA-GUILLEM

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Granada

mruizg@ugr.es

Resumen: La estimación de parámetros en ciertos problemas no lineales, y más concretamente, en los asociados a la subdiferencial de una función fuertemente convexa, constituye el objetivo fundamental de este trabajo. Para diseñar un algoritmo numérico que lleve a cabo tal identificación, establecemos una serie de propiedades, como la estabilidad, que no solo admiten un enfoque analítico, también geométrico, adoptando esencialmente este último a lo largo de la comunicación. Aplicamos nuestros resultados al caso concreto del operador p -laplaciano.

Referencias

- [1] A. I. Garralda-Guillem, H. Kunze, D. La Torre, M. Ruiz Galán (2020). Using the generalized collage theorem for estimating unknown parameters in perturbed mixed variational equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 91, Art. ID 105433.
- [2] A. I. Garralda-Guillem, P. Montiel López (2021). Numerical solution for an inverse variational problem. *Optimization and Engineering*, 22, 2537-2552.
- [3] A. I. Garralda-Guillem, M. Ruiz Galán (2023). Parameter estimation for the subdifferential of a strongly convex function and its application to the p -Laplacian. Preprint.
- [4] M. Ruiz Galán (2010). Convex numerical radius. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 361, 481-491.

Agradecimientos:

Proyecto FQM359, Junta de Andalucía, y Unidad de Excelencia “María de Maeztu” IMAG, referencia CEX2020-001105-M, financiada por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/.

Un método de orden reducido local para un problema de Rayleigh-Bénard

J. CORTÉS, H. HERRERO, F. PLA

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias y Tecnologías Químicas de Ciudad Real,
Universidad de Castilla-La Mancha

jesus.cortes@uclm.es

Resumen: En este trabajo se presenta un método de orden reducido local para calcular diagramas de bifurcación en un problema de convección de Rayleigh-Bénard bidimensional. El método tiene cierta similitud con el método propuesto en [1], en el sentido de que se calculan múltiples bases locales diseñadas para representar las soluciones del problema en distintas regiones del diagrama de bifurcación. La principal diferencia es que nuestro método es capaz de procesar distintas ramas del diagrama de bifurcación simultáneamente. Para ello, el criterio de selección de base local en la fase online, se hace respecto al espacio de soluciones. Los snapshots del método se agrupan mediante un algoritmo de k -medias y las bases locales se calculan a través de Proper Orthogonal Decomposition (POD). Todos los hiperparámetros del método, como el número de bases locales o el número de modos POD se calculan mediante criterios deterministas controlados por tolerancias. Finalmente, un enriquecimiento del espacio de velocidades nos permite calcular la presión en un contexto de ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles. Los resultados muestran que el método local puede generar diagramas de bifurcación con errores pequeños y un coste computacional reducido respecto a Colocación Legendre, el método de alta fidelidad.

Referencias

- [1] M. Hess, A. Alla, A. Quaini, G. Rozza, M. Gunzburger (2019). A localized reduced-order modeling approach for PDEs with bifurcating solutions. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 351, 379-403.