

## Sesión Especial 12

# Geometría Diferencial y Teoría de Subvariedades

### Organizadores:

- Fidel Fernández Villaseñor (Universidad de Granada)
- Rodrigo Morón Sanz (Universidad de Málaga)

### Descripción:

Esta sesión generalista de geometría diferencial está pensada para que abarque temas relacionados con la teoría de subvariedades así como otros temas difíciles de enmarcar en un ámbito más especializado.

## Programa

LUNES, 22 de enero:

- 16:00 – 16:30 Adela Latorre (Universidad Politécnica de Madrid)  
*Nuevos ejemplos de variedades con estructuras complejas simplécticas*
- 16:30 – 17:00 Jorge Hidalgo (Universidad de Granada)  
*Superficies CMC-1 en  $\mathbb{H}^3$  y CMC-1 caras en  $\mathbb{S}_1^3$  con estructura compleja arbitraria*
- 17:00 – 17:30 Tjaša Vrhovnik (Universidad de Granada)  
*Mittag-Leffler theorem for meromorphic  $A$ -immersions*
- 17:30 – 18:00 Enrique Pendás (Universidad de Murcia)  
*Ley de Snell generalizada a través de la geometría de Finsler*

MARTES, 23 de enero:

- 11:30 – 12:00 Benjamín Olea (Universidad de Málaga)  
*Gravedad superficial de una hipersuperficie luz*
- 12:00 – 12:30 Rafael López (Universidad de Granada)  
*Clasificación de superficies de traslación y separables con curvatura constante*
- 12:30 – 13:00 José S. Santiago (Universidad de Jaén)  
*El problema de Bonnet en espacios homogéneos lorentzianos*
- 13:00 – 13:30 José A. S. Pelegrín (Universidad de Córdoba)  
*Superficies atrapadas en plane fronted waves*
- 16:00 – 16:30 Rodrigo Morón (Universidad de Málaga)  
*Inmersiones espaciales a través de hipersuperficies luz en variedades de Lorentz*
- 16:30 – 17:00 Martín de la Rosa (Universidad de Córdoba)  
*Dinámica de partículas relativistas con curvatura y torsión en espaciotiempos Robertson-Walker generalizados*
- 17:00 – 17:30 Alma L. Albuje (Universidad de Córdoba)  
*Subvariedades completas atrapadas en espacio-tiempos globalmente hiperbólicos*
- 17:30 – 18:00 Francisco J. Palomo (Universidad de Málaga)  
*Sobre el primer autovalor del operador de Laplace para subvariedades compactas en  $\mathbb{L}^{m+2}$  y  $\mathbb{E}^{m+1}$*

# Nuevos ejemplos de variedades con estructuras complejas simplécticas

A. LATORRE, G. BAZZONI, M. FREIBERT, N. TARDINI

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Madrid

adela.latorre@upm.es

**Resumen:** Una variedad compleja simpléctica es una variedad diferenciable  $M$  de dimensión  $4n$  que admite una estructura compleja  $J$  y una forma simpléctica  $\omega$  tales que  $\omega(JX, Y) = \omega(X, JY)$ , para todo par de campos de vectores diferenciables  $X, Y$ . Un ejemplo especial de este tipo de variedades son las variedades hyperkähler, aunque existen variedades complejas simplécticas que no son hyperkähler. De hecho, es posible hallar estructuras complejas simplécticas  $(J, \omega)$  sobre variedades no Kählerianas. En esta charla construiremos ejemplos de este tipo haciendo uso de álgebras de Lie casi Abelianas  $\mathfrak{g}$ , que son aquellas que se caracterizan por tener un ideal Abeliano de codimensión 1. De hecho, veremos que es posible proporcionar una clasificación de aquellas  $\mathfrak{g}$  que admiten estructuras complejas simplécticas  $(J, \omega)$ .

## Agradecimientos:

Proyecto PID2020-115652GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

# Superficies CMC-1 en $\mathbb{H}^3$ y CMC-1 caras en $\mathbb{S}_1^3$ con estructura compleja arbitraria

JORGE HIDALGO

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada

jorgehcal@ugr.es

**Resumen:** Esta charla se basa en un trabajo con A.Alarcón y I.Castro-Infantes. Concretamente, explicaré las ideas principales de [1], donde probamos un teorema de aproximación e interpolación tipo Runge-Mergelyan, Weierstrass-Florack (ver [2]) para curvas holomorfas nulas en  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^*$  ( con  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ). Después, usando las proyecciones al espacio hiperbólico y al de Sitter de dimensión 3:

$$\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{H}^3, \quad \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{S}_1^3,$$

que llevan curvas holomorfas nulas en  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^*$  a superficies CMC-1 (ver [3]) y a CMC-1 caras (ver [4]), respectivamente, obtenemos que toda superficie de Riemann abierta  $M$  admite una inmersión conforme CMC-1 casi propia  $M \rightarrow \mathbb{H}^3$  y una inmersión conforme débilmente completa  $M \rightarrow \mathbb{S}_1^3$  como una CMC-1 cara.

En [1] no podemos hacer casi propias estas últimas inmersiones. Para finalizar, daré una idea de cómo, estudiando la proyección  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ , se podrían construir CMC-1 caras casi propias con estructura compleja arbitraria.

## Referencias

- [1] A. Alarcón, I. Castro-Infantes, J. Hidalgo (2023). Complete CMC-1 surfaces in hyperbolic space with arbitrary complex structure. Preprint, arXiv:2306.14482.
- [2] A. Alarcón, F.Forstneri, F.J. López (2021). Minimal surfaces from a complex analytic viewpoint. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Cham.
- [3] R.L. Bryant (1988). Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space. Asterisque 353, 154-155.
- [4] S. Fujimori (2006). Spacelike CMC 1 surfaces with elliptic ends in de Sitter 3-space. Hokkaido Mathematical Journal, 35(2), 289-320.

# Mittag-Leffler theorem for meromorphic $A$ -immersions

TJAŠA VRHOVNIK

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada

vrhovnik@ugr.es

**Abstract:** Given an open Riemann surface  $M$ , a finite subset  $E \subset M$  and a closed conical complex subvariety  $A \subset \mathbb{C}^n$ , a holomorphic map  $F = (F_1, \dots, F_n): M \setminus E \rightarrow \mathbb{C}^n$  that meromorphically extends to  $M$  with effective poles in  $E$  is called a meromorphic  $A$ -immersion, if its complex derivative  $F'$  on  $M \setminus E$  with respect to any local holomorphic coordinate on  $M$  assumes values in  $A_* = A \setminus \{0\}$ . When the subvariety equals  $A = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_1^2 + \dots + z_n^2 = 0\}$ , a holomorphic  $A$ -immersion  $F: M \rightarrow \mathbb{C}^n$  is a null curve, and its real and imaginary parts are minimal surfaces in  $\mathbb{R}^n$ . Alarcón and López in [2] proved the Mittag-Leffler theorem for minimal surfaces (see also [3, Chapter 3]). We generalize the latter and results in [1] to a family of meromorphic  $A$ -immersions, as well as present some developments. In particular, how fixing component functions leads to a Mittag-Leffler theorem for proper meromorphic  $A$ -immersions.

## Referencias

- [1] A. Alarcón and F. Forstnerič (2014). Null curves and directed immersions of open Riemann surfaces. *Invent. Math.*, 196(3), 733-771.
- [2] A. Alarcón and F. J. López (2022). Algebraic approximation and the Mittag-Leffler theorem for minimal surfaces. *Anal. PDE*, 15(3), 859-890.
- [3] A. Alarcón, F. Forstnerič, and F. J. López (2021). Minimal surfaces from a complex analytic viewpoint. Springer Monogr. Math. Cham: Springer.

# Ley de Snell generalizada a través de la geometría de Finsler

ENRIQUE PENDÁS RECONDO

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

e.pendasrecondo@um.es

**Resumen:** La ley de Snell clásica es una conocida fórmula física que describe la relación entre los ángulos de incidencia y refracción, cuando la luz (o en general, cualquier onda) cruza la superficie de separación entre dos medios de propagación isótropos. En el caso anisótropo, cuando la velocidad de la onda depende de la dirección, esta ley se puede generalizar haciendo uso de la geometría de Finsler. Junto con la análoga generalización de la ley de la reflexión, esto proporciona una representación geométrica completa del comportamiento de la onda en la interfaz entre dos medios anisótropos, así como la descripción de algunos fenómenos relevantes como la reflexión total. Esta charla está basada principalmente en el artículo [1], en colaboración con el profesor Steen Markvorsen (Technical University of Denmark).

## Referencias

- [1] S. Markvorsen, E. Pendás-Recondo (2023). Snell's law revisited and generalized via Finsler geometry. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, vol. 20, no. 8, 2350138.

**Agradecimientos:** Esta investigación es parte del proyecto PID2021-124157NB-I00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por FEDER "Una manera de hacer Europa".

# Gravedad superficial de una hipersuperficie luz

BENJAMÍN OLEA, IVAN P. COSTA E SILVA, JOSÉ L. FLORES

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Málaga

benji@uma.es

**Resumen:** Una hipersuperficie luz de una variedad de Lorentz es una hipersuperficie donde la métrica heredada degenera en todo punto. Las hipersuperficies luz aparecen frecuentemente en Física (horizontes de sucesos), pero también son importantes desde un punto de vista matemático debido a su abundancia. En efecto, cualquier cono luz de una variedad de Lorentz es, al menos localmente, una hipersuperficie luz.

En cada punto de una hipersuperficie luz hay una única dirección luz, por lo que, asumiendo alguna condición sencilla, podemos suponer que existe una sección luz global, es decir, un campo  $\xi$  que es luz y tangente a la hipersuperficie. La *gravedad superficial* respecto de  $\xi$  es la función  $\kappa$  tal que  $\nabla_\xi \xi = \kappa \xi$ . Como la sección luz de una hipersuperficie luz no es única, la gravedad superficial tampoco. De hecho, si cambiamos la sección luz, entonces la gravedad superficial también cambia, aunque de forma controlada. Una cuestión importante es encontrar condiciones que aseguren la existencia de una sección luz cuya gravedad superficial sea lo más simple posible, es decir, constante. Esta cuestión tiene una respuesta positiva en algunos casos. Por ejemplo, si existe un campo conforme transversal a la hipersuperficie luz [2], si se cumple la condición de energía dominante (DEC) y la hipersuperficie es un horizonte Killing (ley cero de la termodinámica de agujeros negros) o si se cumple la DEC y la hipersuperficie luz es totalmente geodésica y compacta [3]. En esta comunicación revisaremos los resultados anteriores y probaremos la existencia de una sección luz con gravedad superficial constante bajo condiciones geométricas diferentes a las usadas normalmente en la literatura.

## Referencias

- [1] I.P. Costa e Silva, J.L. Flores, B. Olea, On the existence of sections with constant surface gravity on null hypersurfaces, preprint.
- [2] M. Gutiérrez, B. Olea (2016). Induced Riemannian structures on null hypersurfaces. Math. Nachr., 289, 1219-1236.
- [3] S. Gurriaran, E. Minguzzi (2022). Surface gravity of compact non-degenerate horizons under the dominant energy condition. Commun. Math. Phys., 395, 679-713.

# Clasificación de superficies de traslación y separables con curvatura constante

RAFAEL LÓPEZ

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada. Granada, España

rcamino@ugr.es

**Resumen:** Se propone el estudio de superficies del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$  que tienen especiales parametrizaciones. Así, una superficie se dice que es de traslación si se puede parametrizar como  $X(t, s) = \alpha(s) + \beta(t)$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son dos curvas espaciales. Una superficie se dice que es separable si se puede expresar de forma implícita como  $f(x) + g(y) + h(z) = 0$ , donde  $f$ ,  $g$  y  $h$  son funciones de una variable. En esta charla se muestran recientes avances en la clasificación de las superficies de traslación y superficies separables que tienen curvatura media constante [2, 3, 8], y curvatura de Gauss constante [4, 5, 7]. También se proponen generalizaciones de los resultados [1, 6].

## Referencias

- [1] M. Evren Aydin, R. López, G-E. Vilcu, Classification of separable hypersurfaces with constant sectional curvature, *sometido*.
- [2] T. Hasanis, R. López (2020), Classification and construction of minimal translation surfaces in Euclidean space. *Results Math.* 75, Paper No. 2.
- [3] T. Hasanis, R. López (2020), A characteristic property of Delaunay surfaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* 148, 5291-5298.
- [4] T. Hasanis, R. López (2021), Classification of separable surfaces with constant Gaussian curvature. *Manuscripta Math.* 166, 403-417.
- [5] T. Hasanis, R. López (2021), Translation surfaces in Euclidean space with constant Gaussian curvature. *Comm. Anal. Geom.* 29, 1415-1447.
- [6] S. Kaya, R. López (2022), Classification of zero mean curvature surfaces of separable type in Lorentz-Minkowski space. *Tohoku Math. J.* 74, 263-286.
- [7] R. López, M. Moruz (2015), Translation and homothetical surfaces in Euclidean space with constant curvature. *J. Korean Math. Soc.* 52, 523-535.
- [8] R. López, O. Perdomo (2017), Minimal translation surfaces in Euclidean space. *J. Geom. Anal.* 27, 2926-2937.



# El problema de Bonnet en espacios homogéneos lorentzianos

JOSÉ S. SANTIAGO, ILDEFONSO CASTRO, JOSÉ M. MANZANO

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Jaén

jssantia@ujaen.es

**Resumen:** Es bien sabido que una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^3$  está totalmente determinada por su métrica y por su segunda forma fundamental, esto es, si una superficie riemanniana  $(\Sigma, ds^2)$  y un endomorfismo autoadjunto  $S : T\Sigma \rightarrow T\Sigma$  verifican las ecuaciones de Gauss y Codazzi, entonces existe una única inmersión de esta superficie en  $\mathbb{R}^3$  salvo isometrías del ambiente. En 1867, Bonnet propuso un problema más general: ¿qué puede decirse sobre las inmersiones de superficies riemannianas si tan sólo conocemos la traza de  $S$ ? Este problema ha sido ampliamente tratado por Bonkeno, Kamberov, Pedit y Pinkall. De forma más reciente, Gálvez, Martínez y Mira han dado una respuesta a este problema para espacios homogéneos  $E(k,t)$  con grupo de isometrías de dimensión 4. En esta charla trataremos este problema en espacios homogéneos lorentzianos.

# Superficies atrapadas en plane fronted waves

JOSÉ ANTONIO SÁNCHEZ PELEGRÍN

Departamento de Informática y Análisis Numérico, Universidad de Córdoba

jpelegrin@uco.es

**Resumen:** En esta conferencia presentaremos nuevos resultados de existencia y unicidad para subvariedades espaciales de codimensión arbitraria en espaciotiempos de tipo pp-wave. En concreto, para la familia de plane fronted waves obtendremos resultados de rigidez para subvariedades espaciales débilmente atrapadas. Además, obtendremos condiciones suficientes para garantizar que una subvariedad espacial de codimensión dos y curvatura media cero es un frente de onda del plane fronted wave.

## Referencias

- [1] F. Palomo, J.A.S. Pelegrín, A. Romero (2022). Rigidity results for complete spacelike submanifolds in plane fronted waves. *RACSAM Rev. R. Acad. A*, 116 , 179, 1–10.
- [2] J.A.S. Pelegrín, A. Romero, R.M. Rubio (2016). On maximal hypersurfaces in Lorentz manifolds admitting a parallel lightlike vector field, *Classical Quant. Grav.*, 33, 055003, 1–8.

# Inmersiones espaciales a través de hipersuperficies luz en variedades de Lorentz

RODRIGO MORÓN, FRANCISCO J. PALOMO

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Málaga

ruyman@uma.es

**Resumen:** Los espaciotiempos de Schwarzschild generalizados se presentan como variedades alabeadas donde la base es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  equipado con una métrica de Lorentz y la fibra es una variedad de Riemann. Esta familia incluye espaciotiempos físicamente relevantes estrechamente relacionados con modelos de agujeros negros. Los espaciotiempos de Schwarzschild generalizados están dotados de distribuciones involutivas que proporcionan foliaciones por hipersuperficies luminosas. En esta charla, veremos resultados sobre subvariedades espaciales inmersas en los espaciotiempos de Schwarzschild generalizados, principalmente, bajo el supuesto de que dichas subvariedades se encuentran en una hoja de las foliaciones anteriores. En este escenario, proporcionaremos una fórmula explícita para el campo vectorial curvatura media y estableceremos relaciones entre la geometría extrínseca e intrínseca de las subvariedades. Presentaremos varias caracterizaciones de los cortes y profundizaremos en el caso concreto donde la función de alabeo es la coordenada radial. Esta subfamilia incluye los espaciotiempos de Schwarzschild y Reissner-Nordström. Los resultados están incluidos en [2].

## Referencias

- [1] L.J. Alías, V.L. Canovas and M. Rigoli (2018), Codimension two spacelike submanifolds into the light cone of Lorentz-Minkowski space, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics, 149(6), 1523-1553.
- [2] R. Morón, F.J. Palomo, Spacelike immersions in certain Lorentzian manifolds with lightlike foliations, preprint, <https://arxiv.org/pdf/2309.12749.pdf>

**Agradecimientos:** Esta trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto Spanish MICINN PID2020-118452GB-I00.

# Dinámica de partículas relativistas con curvatura y torsión en espaciotiempos Robertson-Walker generalizados

MARTÍN DE LA ROSA, JÓNATAN HERRERA, RAFAEL M. RUBIO

Departamento de Matemáticas, Universidad de Córdoba

f42rodim@uco.es

**Resumen:** En este trabajo [1] se estudian modelos de partículas relativistas que generalizan la dinámica geodésica de un cuerpo en caída libre. Para ello, se añaden a la acción términos que dependen de las curvaturas de Frenet de la trayectoria, siguiendo la idea introducida por M. S. Plyushchay [2]. Concretamente, consideramos funcionales construidos a partir de una combinación lineal de las dos primeras curvaturas (también conocidas como curvatura y torsión) y un término constante. Además de establecer las ecuaciones de movimiento generales en un espaciotiempo de dimensión  $2 + 1$ , obtenemos resultados que caracterizan las soluciones en espaciotiempos Robertson-Walker generalizados. A diferencia de estudios previos en la misma familia de espaciotiempos [3], [4] la técnica desarrollada en este trabajo posibilita la determinación de trayectorias temporales, más realistas desde el punto de vista relativista. Además de exhibir relaciones interesantes entre la curvatura y torsión de las trayectorias críticas con la curvatura de la fibra de los modelos cosmológicos, se encuentran ciertas cantidades conservadas que sugieren una posible generalización para la noción de masa de partículas en espaciotiempos con curvatura no necesariamente constante.

## Referencias

- [1] J. Herrera, M. de la Rosa, R. M. Rubio (2024). On the geometry and dynamics of relativistic particles in generalized Robertson–Walker spacetimes. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2450048.
- [2] M. S. Plyushchay (1989). Massive relativistic point particle with rigidity. *International Journal of Modern Physics A* 4, 15, 3851-3865.
- [3] M. Barros, M. Caballero, M. Ortega (2006). Massless particles in warped three spaces. *International Journal of Modern Physics A*, 21(3), 461-473.
- [4] J. Herrera, M. de la Rosa, R. M. Rubio (2021). Relativistic particles with torsion in three-dimensional non-vacuum spacetimes. *Journal of Mathematical Physics* 62, 062502.

# Subvariedades completas atrapadas en espacio-tiempos globalmente hiperbólicos

ALMA L. ALBUJER, JÓNATAN HERRERA, RAFAEL M. RUBIO

Departamento de Matemáticas, Universidad de Córdoba

alma.albuje@uco.es

**Resumen:** En esta charla mostramos resultados de rigidez y de no existencia de subvariedades espaciales parabólicas con vector curvatura media causal en espacio-tiempos que admiten una descomposición ortogonal. Estos espacio-tiempos contemplan, en particular, a la familia de espacio-tiempos globalmente hiperbólicos. Por otro lado, también damos un resultado sobre la geometría de una familia más general de subvariedades en dichos espacio-tiempos, asumiendo la no existencia de mínimos o máximos locales de una determinada función. Como una aplicación de nuestros resultados en el ámbito de la relatividad general, obtenemos algunos resultados sobre superficies atrapadas (no necesariamente cerradas) en una familia muy amplia de espacio-tiempos. Los resultados presentados en esta charla están parcialmente incluidos en [1].

## Referencias

- [1] A.L. Albuje, J. Herrera, R.M. Rubio (2023). On complete trapped submanifolds in Globally Hyperbolic spacetimes. J. Phys. A, 56, Paper No. 345202, 20 pp.

# Sobre el primer autovalor del operador de Laplace para subvariedades compactas en $\mathbb{L}^{m+2}$ y $\mathbb{E}^{m+1}$

FRANCISCO J. PALOMO

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Málaga

fpalomo@uma.es

**Resumen:** Presentaremos una nueva familia de cotas superiores extrínsecas para el primer autovalor del operador de Laplace de una subvariedad espacial compacta del espacio de Minkowski  $\mathbb{L}^{m+2}$ . En particular, las cotas obtenidas para subvariedades en una copia totalmente geodésica del espacio euclídeo  $\mathbb{E}^{m+1}$  en  $\mathbb{L}^{m+2}$  son inferiores a la cota de Reilly en [3]. Además, cada una de las cotas obtenidas es óptima para una clase geoméricamente notable de subvariedades.

## Referencias

- [1] F.J. Palomo, A. Romero (2022), On the first eigenvalue of the Laplace operator for compact spacelike submanifolds in Lorentz-Minkowski spacetime  $\mathbb{L}^m$ , *P. Roy. Soc. Edinb. A Mat.*, 152, 311-330.
- [2] F.J. Palomo, A. Romero, New extrinsic upper bounds on the first eigenvalue of the Laplace operator for compact submanifolds in Euclidean spaces, en preparación.
- [3] R.C. Reilly (1977), On the first eigenvalue of the Laplace operator for compact submanifolds of Euclidean space, *Comment. Mat. Helvetici*, 52, 525-533.

**Agradecimientos:** Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto Spanish MICINN PID2020-118452GB-I00.