Sesión Especial 11

Análisis Geométrico

Organizadores:

- Luis J. Alías Linares (Universidad de Murcia)
- Florent Balacheff (Universitat Autònoma de Barcelona)
- Eduardo García Río (Universidade de Santiago de Compostela)

Descripción:
El Análisis Geométrico se encuentra en la interacción entre la Geometría Diferencial y las Ecuaciones Diferenciales, y tiene aplicaciones en varias ramas de la matemática como la Geometría Riemanniana, la Topología y el Análisis Complejo, y con derivaciones en otros campos científicos (Relatividad General, Cristalografía, Ciencia de Materiales o Arquitectura). Así muchos problemas geométricos pueden formularse como problemas variacionales o como problemas sobre sistemas de ecuaciones diferenciales parciales. En la otra dirección, se puede obtener información importante sobre las soluciones de los problemas variacionales o de ecuaciones diferenciales a partir del conocimiento de la geometría subyacente. El objetivo de esta sesión es dar a conocer algunas contribuciones recientes de relevancia en la teoría así como proporcionar un foro de encuentro entre investigadores de distintos grupos de la Red Española de Análisis Geométrico.

Programa

Lunes, 22 de enero:

16:00 – 16:30	Joan Porti (Universitat Autònoma de Barcelona) *Finsler metrics on symmetric spaces*
16:30 – 17:00	Alma L. Albujer (Universidad de Córdoba) *Hipersuperficies complejas holomorfas pseudosimétricas en un espacio forma complejo*
17:00 – 17:30	Miguel Brozos Vázquez (Universidade da Coruña) *Rigidez de variedades Einstein ponderadas*
17:30 – 18:00	Rafael López Camino (Universidad de Granada) *Estabilidad de cilindros capilares entre varias superficies soporte*

Martes, 23 de enero:

11:30 – 12:00	Ildefonso Castro (Universidad de Jaen) *Generalizando un problema de S.T. Yau sobre el elipsoide de revolución*
12:00 – 12:30	Víctor Sanmartín-López (Universidade de Santiago de Compostela) *Solitones de Ricci como subvariedades del espacio hiperbólico complejo*
12:30 – 13:00	Erik Sarrión Pedralva (Universidad Rey Juan Carlos) *Area-based symmetrization and first Dirichlet eigenvalue of a geodesic bal*
13:00 – 13:30	Jesús Castro Infantes (Universidad Politécnica de Madrid) *Construcciones conjugadas para H-superficies en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$*
16:00 – 16:30	Esther Cabezas-Rivas (Universitat de València) *¿Cómo definir un flujo por la curvatura media inversa para cristales?*
16:30 – 17:00	Jaime Santos-Rodríguez (Universidad Autónoma de Madrid) *Grupos fundamentales de espacios RCD*
17:00 – 17:30	José Manuel Fernández-Barroso (Universidad de Extremadura) *Studying symmetric-like properties on Riemannian manifolds via the spectrum of the Laplace-Beltrami operator*
17:30 – 18:00	Antonio Martínez (Universidad de Granada) *Stationary surfaces of height-dependent weighted area functionals*

Finsler metrics on symmetric spaces

JOAN PORTI, MICHAEL KAPOVICH, BERNHARD LEEB

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona

joan.porti@uab.cat

Abstract: Let X be a symmetric space of non-compact type, its sectional curvature is ≤ 0. If X has rank $r \geq 2$, then it is said to be of higher rank and it contains flats of dimension r, in particular the sectional curvature vanishes for some directions.
We construct natural Finsler metrics on X associated to its structure of symmetric space, so that we recover the behavior of strictly negative curvature. We prove analog results of hyperbolic space in this setting.

Referencias

[1] M. Kapovich, B. Leeb, J. Porti (2017). Anosov subgroups: dynamical and geometric characterizations. Eur. J. Math. 3, no. 4, 808–898.

[2] M. Kapovich, B. Leeb, J. Porti (2018). A Morse lemma for quasigeodesics in symmetric spaces and Euclidean buildings. Geom. Topol. 22, no. 7, 3827–3923.

[3] M. Kapovich, B. Leeb (2018). Finsler bordifications of symmetric and certain locally symmetric spaces. Geom. Topol. 22, no. 5, 2533–2646.

Hipersuperficies complejas holomorfas pseudosimétricas en un espacio forma complejo

Alma L. Albujer, Jorge Alcázar, Magdalena Caballero

Departamento de Matemáticas, Universidad de Córdoba

alma.albujer@uco.es

Resumen: Las condiciones de simetría de hipersuperficies complejas de variedades Kaehler con curvatura seccional holomorfa constante han sido ampliamente estudiadas por diversos autores. Es de destacar, en primer lugar, el conocido trabajo de Smyth [4] en el que clasifica las hipersuperficies complejas Einstein de un espacio forma complejo y prueba que tales hipersuperficies son localmente simétricas. Posteriormente, de los trabajos de Ryan [3] y Abe [1] se deduce una clasificación completa de las hipersuperficies complejas semisimétricas de un espacio forma complejo. Dando un paso más, en esta charla consideramos hipersuperficies complejas holomorfas pseudosimétricas en un espacio forma complejo y obtenemos una caracterización de estas en función de su segunda forma fundamental, dando ejemplos concretos de dichas hipersuperficies. Esta charla se basa parcialmente en los resultados contenidos en [2].

Referencias

[1] K. Abe (1972). A complex analogue of Hartman-Nirenberg cylinder theorem. J. Differential Geometry, 7, 453-460.

[2] A.L. Albujer, J. Alcázar, M. Caballero. Holomorphically pseudosymmetric complex hypersurfaces of complex space forms. Preprint.

[3] P.J. Ryan (1972). A class of complex hypersurfaces. Colloq. Math., 26, 175-182.

[4] B. Smyth (1967). Differential geometry of complex hypersurfaces. Ann. of Math., 85, 246-266.

Rigidez de variedades Einstein ponderadas

Miguel Brozos Vázquez, Diego Mojón-Álvarez

CITMAga, Universidade da Coruña

miguel.brozos.vazquez@udc.es

Resumen: Consideramos una variedad Riemanniana (M, g) dotada de una función de densidad diferenciable f, que da lugar a una medida $e^{-f} dvol_g$ en la variedad. Añadimos además un parámetro dimensional $m \in \mathbb{R}^+$ y otro de curvatura $\mu \in \mathbb{R}$. Estos objetos dan lugar a un quíntuple (M, g, f, m, μ) denominado *smooth metric measure space* (*SMMS* para abreviar). En este contexto, se define el tensor de Ricci de Bakry-Émery como $\rho_f^m = \rho + \text{Hes}_f - \frac{1}{m} df \otimes df$ y, a partir de él, tensores geométricos ponderados relacionados con la curvatura, como el tensor de Schouten ponderado P_f^m [1]. Estos tensores generalizan los análogos de una variedad Riemanniana sin densidad al tiempo que proporcionan información sobre la densidad del espacio.
Un ejemplo de condición sobre variedades Riemannianas que se generaliza a SMMSs es la de ser Einstein. Así, decimos que (M, g, f, m, μ) es Einstein ponderado si su tensor de Schouten es un múltiplo del tensor métrico, es decir, si $P_f^m = \lambda g$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Aunque esta propiedad generaliza la condición Einstein de una variedad Riemanniana, no tiene las mismas implicaciones. Ejemplo de ello es que una variedad Riemanniana Einstein tiene tensor de Weyl armónico, pero esto no se traslada al contexto con densidad. Por este motivo, resulta natural estudiar la estructura geométrica de los SMMSs que son Einstein ponderados y su tensor de Weyl ponderado es armónico en el sentido ponderado. Con el fin de describir estas estructuras, haremos un recorrido por propiedades de SMMSs, observando que los que son Einstein ponderados tienen densidad y tensor métrico analíticos en coordenadas armónicas. Introduciremos análogos de los modelos espacio-forma en el contexto ponderado y veremos que desempeñan un papel fundamental en las clasificaciones que aportaremos de SMMS que son weighted Einstein y tienen tensor de Weyl ponderado armónico. En primer lugar daremos una clasificación local de los SMMSs buscados para ver posteriormente que, bajo condiciones de completitud, los únicos ejemplos son espacios-forma o pertenecen a una familia particular de productos warped.

Referencias

[1] J. S. Case, (2019). The weighted σ_k-curvature of a smooth metric measure space. Pacific. J. Math. , 299 (2), 339-399.

Estabilidad de cilindros capilares entre varias superficies soporte

Rafael López

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada. Granada, España

rcamino@ugr.es

Resumen: En teoría de capilaridad, es interesante conocer la estabilidad de puentes líquidos que unan varias superficies soportes. En esta charla, se estudia la estabilidad de cilindros que conectan dos esferas del mismo radio y entre dos cilindros paralelos [2, 3]. También se analiza la estabilidad de un cilindro sobre una superficie cilíndrica [4] y se extiende el estudio cuando el espacio ambiente es el espacio hiperbólico [1].

Referencias

[1] A. Bueno, R. López, On the stability of Killing cylinders in hyperbolic space, 2023, sometido.

[2] R. López, An analysis of the Sturm-Liouville eigenvalue problem of a cylinder between two spheres of equal radius, 2023, sometido.

[3] R. López, Stability of a circular cylinder fluid in a system of two parallel cylinders, 2023, sometido.

[4] R. López, Capillary liquid channels in cylindrical support surfaces: stability and bifurcation, 2023, sometido.

Generalizando un problema de S.T.Yau sobre el elipsoide de revolución

Ildefonso Castro, Paula Carretero
Departamento de Matemáticas, Universidad de Jaén; IMAG, Universidad de Granada
icastro@ujaen.es

Resumen: Es bien conocido ([2]) que el elipsoide de revolución $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ verifica la relación $k_{\mathrm{m}}=\frac{a^4}{b^2}\,k_{\mathrm{p}}^3$ entre sus curvaturas principales a lo largo de meridianos (m) y paralelos (p). Inspirado por algunos resultados de S.S. Chern [2], S.T. Yau propuso en [6] el siguiente problema: *Si las curvaturas principales κ_1, κ_2, de una superficie cerrada en $\mathbb{R}^3$ satisfacen la relación $\kappa_1=\mu\,\kappa_2^3$, $\mu>0$ (en algún orden), ¿es la superficie un elipsoide de revolución?* Analizaremos las respuestas positivas de [4] y [5] al citado problema en el caso (real) analítico, y la respuesta negativa de [3] para superficies de clase C^2. Presentaremos un teorema de [1] caracterizando las superficies cuádricas de revolución en términos de una relación cúbica entre sus curvaturas principales.

Referencias

[1] P. Carretero, I. Castro (2022). A new approach to rotational Weingarten surfaces. Mathematics, 2022 10(4), 578; https://doi.org/10.3390/math10040578

[2] S.S Chern (1945). Some new characterizations of the Euclidean sphere. Duke Math. J., 12, 279–290.

[3] I. Fernández, P. Mira (2023). Elliptic Weingarten surfaces: Singularities, rotational examples and the halfspace theorem. Nonlinear Anal., 232, 113244.

[4] W. Kühnel, M. Steller (2005). On closed Weingarten surfaces. Monatsh. Math., 146, 113–126.

[5] U. Simon (2007). Yau's problem on a characterization of rotational ellipsoids. Asian J. Math., 11, 361–372.

[6] S.T. Yau (1982). Problem section, Seminar on Differential Geometry. Annals of Mathematical Studies. Princeton University Press, vol. 102, 669–706.

Agradecimientos: Proyecto PID2020-117868GB-I00 y Unidad de Excelencia "Maria de Maeztu" IMAG CEX2020-001105-M financiada por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/

Solitones de Ricci como subvariedades del espacio hiperbólico complejo

Víctor Sanmartín-López

Departamento de Matemáticas, Universidade de Santiago de Compostela

victor.sanmartin@usc.es

Resumen: Esta charla se encuadra en la intersección entre la geometría de subvariedades de espacios simétricos de tipo no compacto y el estudio de métricas homogéneas Einstein o de solitón de Ricci. En primer lugar, veremos que el estudio de los solitones de Ricci homogéneos expanding, en particular de las variedades homogéneas Einstein con curvatura escalar negativa, pasa por la investigación de ciertos subgrupos de Lie de la descomposición de Iwasawa asociada a espacios simétricos de tipo no compacto. En esta línea, presentaremos ejemplos y algunas clasificaciones parciales de este tipo de subgrupos de Lie, centrándonos en aquellos procedentes de la descomposición de Iwasawa asociada a los espacios hiperbólicos complejos.

Area-based symmetrization and first Dirichlet eigenvalue of a geodesic ball

Erik Sarrión Pedralva, Vicent Gimeno i Garcia, Vicente Palmer

Departamento de Matemática Aplicada, Ciencia e Ingeniería de los Materiales y Tecnología Electrónica, Universidad Rey Juan Carlos

erik.sarrion@urjc.es

Abstract: Given a Riemmanian manifold, we will see a new method to compute a sharp upper bound for the first eigenvalue of the Laplacian for the Dirichlet problem on a geodesic ball of radius less than the injectivity radius of the manifold. This upper bound is obtained by transforming the metric tensor into a rotationally symmetric metric tensor that preserves the area of the geodesic spheres. Moreover, we will show that the provided upper bound can be computed using only the area function of the geodesic spheres contained in the geodesic ball and it is sharp in the sense that the first eigenvalue of geodesic ball coincides with our upper bound if and only if the mean curvature pointed inward of each geodesic sphere is a radial function.

Referencias

[1] V. Gimeno, E. Sarrión-Pedralva (2022). First eigenvalue of the Laplacian of a geodesic ball and area-based symmetrization of its metric tensor. Journal of Mathematical Inequalities, vol. 16.1, 371-391.

Construcciones conjugadas para H-superficies en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Jesús Castro Infantes

Departamento de Matemática Aplicada a las TIC, ETS de Ingenieros Informáticos,
Universidad Politécnica de Madrid

jesus.castro@upm.es

Resumen: En esta charla se pretende presentar una técnica de construcción de H-superficies (superficies de curvatura media constante H) en el espacio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ conocida como construcción conjugada y basada en la correspondencia de Daniel para H-superficies en los espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. Presentaremos construcciones para H-superficies en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con k finales y género 0 y 1.

¿Cómo definir un flujo por la curvatura media inversa para cristales?

Esther Cabezas-Rivas, Salvador Moll, Marcos Solera

Departament de Matemàtiques, Universitat de València

Esther.Cabezas-Rivas@uv.es

Resumen: Obtenemos existencia y unicidad de minimizantes para el funcional p-capacidad definido con respecto a una anisotropía simétrica para $1 < p < \infty$, incluyendo el caso de normas cristalinas en $\mathbb{R}^N$. Esto se prueba en [1] mediante una caracterización de la subdiferencial correspondiente y se aplica para dominios no acotados de la forma $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ bajo hipótesis débiles de regularidad (frontera Lipschitz-continua) y sin requisitos de convexidad para Ω. Si asumimos una condición de bola interior (donde la forma de Wulff juega el papel de bola), entonces cualquier minimizante es Lipschitz-continuo.

Mediante un método de aproximación introducido por Moser, como límites de estos minimizantes (tras un cambio de variable), en [2] construimos soluciones débiles del flujo anisotrópico por la curvatura media inversa bajo suposiciones muy suaves tanto sobre la anisotropía (que es simplemente una norma en $\mathbb{R}^N$ sin requisitos de elipticidad ni regularidad, para incluir el caso cristalino) como sobre los datos iniciales.

Nuestra noción de solución sigue recuperando definiciones variacionales y geométricas similares a las introducidas por Huisken-Ilmanen, pero requiere trabajar en el contexto más amplio de las funciones BV. A pesar de ello, seguimos alcanzando resultados clásicos como la continuidad y el crecimiento exponencial del perímetro, así como propiedades de minimización hacia el exterior de los subconjuntos de nivel. Además, asumiendo la regularidad extra dada por una condición de bola interior, se demuestra que las soluciones son continuas y satisfacen una desigualdad tipo Harnack. Por último, se construyen ejemplos de soluciones explícitas.

Referencias

[1] E. Cabezas-Rivas, S. Moll and M. Solera (2023). Characterization of the subdifferential and minimizers for the anisotropic p-capacity, *preprint* `arxiv:2305.03498`.

[2] E. Cabezas-Rivas, S. Moll and M. Solera (2023). Weak solutions of Anisotropic (and crystalline) inverse mean curvature flow as limits of p-capacitary potentials, *preprint*.

Grupos fundamentales de espacios RCD

Jaime Santos-Rodríguez, Qin Deng, Sergio Zamora-Barrera, Xinrui Zhao

Departamento Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid

jaime.santos@uam.es

Resumen: Dadas $K \in \mathbb{R}$ y $N \geq 1$ la clase de los espacios $\mathrm{RCD}(K, N)$ consiste de espacios métricos de medida que satisfacen una noción sintética de cota inferior en la curvatura de Ricci. Ejemplos de estos espacios incluyen límites de Gromov-Hausdorff de variedades Riemannianas y a los espacios de Alexandrov.
Un problema clásico en geometría es estudiar la relación entre la curvatura y la topología. Por ejemplo, uno puede estudiar propiedades del grupo fundamental de tales espacios. Sin embargo, dado que los espacios RCD no son necesariamente variedades primeramente era necesario probar que el recubridor universal existe (Mondino-Wei [2]) y que es simplemente conexo (Wang [4]).
En esta charla primero nos centraremos en dar una motivacón para el estudio de nociones sintéticas de cotas de curvatura. Después daremos ejemplos de espacios RCD y describiremos algunas de sus propiedades. Finalmente, presentaremos algunos de los resultados obtenidos con respecto al grupo fundamental. Esta charla está basada en colaboraciones con S. Zamora-Barrera [3] y con Q. Deng, S. Zamora-Barrera, X. Zhao [1].

Referencias

[1] Q. Deng, J. Santos-Rodríguez, S. Zamora-Barrera, X. Zhao (2023). Margulis Lemma on $\mathrm{RCD}(K, N)$ spaces. arXiv:2308.15215

[2] A. Mondino, G. Wei (2019) On the universal cover and the fundamental group of an $\mathrm{RCD}^*(K, N)$-space. J. Reine Angew. Math., 753, 211–237.

[3] J. Santos-Rodríguez, S. Zamora-Barrera (2023). On fundamental groups of RCD spaces. J. Reine Angew. Math.,799, 249–286.

[4] J. Wang (2023). $\mathrm{RCD}^*(K, N)$ spaces are semi-locally simply-connected. Journal Reine Angew. Math. `https://doi.org/10.1515/crelle-2023-0058`

Studying symmetric-like properties on Riemannian manifolds via the spectrum of the Laplace-Beltrami operator

José Manuel Fernández-Barroso

Departamento de Matemáticas, Universidad de Extremadura

ferbar@unex.es

Abstract: *Symmetric-like* properties are those which generalize the local symmetry on Riemannian manifolds. The study of the determination of a geometric property using the information provided by the eigenvalues of the Laplace-Beltrami operator is a problem concerning to the Spectral geometry namely the *Audibility problem*. In that context, two Riemannian manifolds are said to be *isospectral* if there exists an operator which intertwines their Laplace-Beltrami operator. If the Riemannian manifolds are compact, the existence of the intertwining operator is equivalent to the fact that both Riemannian manifolds have the same spectrum for the Laplace-Beltrami operator. Moreover, a geometric property is said to be *inaudible* if there exists a pair of isospectral Riemannian manifolds where that property differs.
In this talk we treat the isospectrality between different pairs of Riemannian manifolds in order to establish the inaudibility of different symmetric-like properties.
Joint work with Teresa Arias-Marco.

Stationary surfaces of height-dependent weighted area functionals

Antonio Martínez

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada

amartine@ugr.es

Abstract: Our main goal is to show some recent advances in the study of stationary surfaces for the following weighted area functional

$$\mathcal{A}^{\varphi}(\Sigma) = \int_{\Sigma} e^{\varphi}\, d\Sigma \tag{1}$$

on isometric immersions of Riemannian surfaces Σ in a domain $\mathfrak{D}^3$ of $\mathbb{R}^3$ (or $\mathbb{L}^3$) when φ is the restriction on Σ of a smooth function depending only on the coordinate of $\mathfrak{D}^3$ in the direction of $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ and where $d\Sigma$ denotes the volume element induced on Σ by the Euclidean (or Lorentzian) metric $\langle\cdot,\cdot\rangle := dx^2 + dy^2 + dz^2$ ($\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{L}^3} := dx^2 + dy^2 - dz^2$).
The Euler-Lagrange equation of (1) is given in terms of the mean curvature vector $\mathbf{H}$ of Σ as follows

$$\mathbf{H} = (\overline{\nabla}\varphi)^{\perp} = \dot{\varphi}\ \vec{e}_3^{\,\perp}, \tag{2}$$

here $\perp$ denotes the projection on the normal bundle, and $\overline{\nabla}$ stands the usual gradient operator in $\mathbb{R}^3$ (or $\mathbb{L}^3$).

Any critical point of (1) in $\mathbb{R}^3$ (or $\mathbb{L}^3$) will be called $[\varphi,\vec{e}_3]$-*minimal* (or *spacelike* $[\varphi,\vec{e}_3]$-*maximal*) surface. Interesting examples of these families of surfaces are:

- the classical minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ and the the spacelike maximal surfaces in $\mathbb{L}^3$ when φ is a constant.

- the translating solitons: if φ is just the height function, $\varphi(p) = \langle p, \vec{e}_3\rangle$, that is, surfaces such that
$$t \to \Sigma + t\vec{e}_3$$
is a mean curvature flow, i.e. the normal component of the velocity at each point is equal to the mean curvature at that point.

- the singular α-minimal (spacelike α-maximal) surfaces: if $\varphi(p) = \alpha \log\langle p, \vec{e}_3\rangle$, α=const. For surfaces in $\mathbb{R}^3$ and when $\alpha = 1$, Σ describes the shape of a "hanging roof", i.e. a heavy surface in a gravitational field that, are of importance for the construction of perfect domes.