Sesión Especial 10

Red Española de Topología

Organizadores:

- Enrique Artal (Universidad de Zaragoza)
- Raquel Díaz (Universidad Complutense de Madrid)
- Antonio Viruel (Universidad de Málaga)

Descripción:
La Red Española de Topología incorpora a investigadores/as en materias donde la topología juega un papel esencial. Esta sesión pretende ser un escaparate de algunas de las muchas líneas de investigación que miembros de la RET llevan a cabo en la actualidad. Tienen cabida desde áreas tan aplicadas como el análisis topológico de datos, hasta temáticas tan conceptuales como las infinito- categorías, pasando por disciplinas más clásicas como la teoría de homotopía, de singularidades o la topología diferencial.

Programa

LUNES, 22 de enero:

16:00 – 16:30	Enrique Artal (Universidad de Zaragoza) *Intersecciones singulares de cuádricas coaxiales*
16:30 – 17:00	Sergio Ardanza-Trevijano (Universidad de Navarra) *Some questions over topological data analysis with persistent homology*
17:00 – 17:30	Rocío González Díaz (Universidad de Sevilla) *Computational Topology to Measure the Quality of Training Data*
17:30 – 18:00	Juan Antonio Moya Pérez (Universitat de València) *Topología de gérmenes de aplicación de tipo pliegue de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^5$*

MARTES, 23 de enero:

11:30 – 12:00	Clementa Alonso-González (Universidad de Alicante) *Una generalización a dimensión tres de la descomposición sectorial de Poincaré para campos de vectores planos*
12:00 – 12:30	José Ignacio Royo Prieto (Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea UPV/EHU) *Sucesiones y trenzas de Gysin*
12:30 – 13:00	Federico Cantero (Universidad Autónoma de Madrid) *On the cohomology of spaces of non-singular almost-complex hypersurfaces*
13:00 – 13:30	Raquel Díaz (Universidad Complutense de Madrid) *Esferas de homología hiperbólicas con género de Heegaard arbitrariamente grande*
16:00 – 16:30	Víctor Carmona (MPI Leipzig) *La teoría de Morita derivada*
16:30 – 17:00	Mario Fuentes (CIMAT Mérida) *¡Todas las teorías de homotopía racional son compatibles!*
17:00 – 17:30	Raquel Villacampa (Universidad de Zaragoza IUMA) *Aspectos geométricos y topológicos de nilvariedades*
17:30 – 18:00	Carles Broto (Universitat Autònoma de Barcelona) *Sistemas de fusión sobre grupos p-torales discretos*

Intersecciones singulares de cuádricas coaxiales

Enrique Artal, Santiago López de Medrano, María Teresa Lozano

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza

artal@unizar.es

Resumen: En una serie de trabajos que incluyen un libro reciente, Santiago López de Medrano ha realizado un intensivo estudio de las intersecciones transversas de cuádricas (reales y en ocasiones complejas), especialmente de su topología. En este trabajo estudiamos los casos de intersecciones singulares con especial atención a las singularidades más sencillas, a las que llamamos genéricas. Definimos los alisamientos de estas intersecciones y los estudiamos en algunos casos especialmente interesante en dimensión 3. Es un trabajo conjunto con Santiago López de Medrano y María Teresa Lozano.

Some questions over topological data analysis with persistent homology

Sergio Ardanza-Trevijano

Departamento de Física y Matemática Aplicada, Universidad de Navarra

sardanza@unav.es

Abstract: During the past decade persistent homology has been succesfully used to extract insights from data in different areas of Science. Topological data analysis using persistent homology is a multi-step process. First, a filtered simplicial complex is constructed from the original data and its persistent homology is computed. The output of this step is a persistent diagram or barcode. Then some kind of vectorization of the persistent diagram is obtained. Finally a statistical/machine learning analyisis is performed. There are many possible choices for each of these steps. We will show some implications of these choices and how the aggregation of the information obtained gives a better insight into questions motivated by the analyzed data.

Computational Topology to Measure the Quality of Training Data

Rocío González-Díaz, Álvaro Torras-Casas, Eduardo Paluzo-Hidalgo

Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla

rogodi@us.es

Abstract: Current deep learning models take a substantial amount of data and computational resources and training processes can take months to complete due to, in part, the size of the datasets used to train them. Furthermore, the training data used to feed the model influences performance, for example, inducing biases that can affect AI applications in social use cases. In this way, data quality aims to measure the degree to which data provide enough information to the model for a specific task. In [1], we introduce the new concept of k-dimensional topological quality, which is based on partial matching between persistence modules that are built on the persistent homology of the Vietoris-Rips filtration computed from the dataset. We propose to use this new concept to explain when and why a small training dataset generalizes well.

Specifically, our study is done for the case of finite point clouds X and Y together with an inclusion $f : X \hookrightarrow Y$. We compute the induced morphism between their respective persistent homologies $\mathrm{PH}_k(X)$ and $\mathrm{PH}_k(Y)$. Our topological quality indicator is based on the block function $\mathcal{M}_f$ that relates the barcodes (i.e., the interval decompositions of $\mathrm{PH}_k(X)$ and $\mathrm{PH}_k(Y)$) by relying on the inclusion f.

Referencias

[1] A.Torras-Casas, E. Paluzo-Hidalgo, R. Gonzalez-Diaz (2023). A Topological Approach to Measuring Training Data Quality, arXiv eprint 2306.02411

Topología de gérmenes de aplicación de tipo pliegue de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^5$

Juan Antonio Moya Pérez, Juan José Nuño Ballesteros

Departamento de Matemáticas, Universitat de València

juan.moya@uv.es

Resumen: Sea $f\colon (\mathbb{R}^3, 0) \to (\mathbb{R}^5, 0)$ un germen de aplicación analítico con inestabilidad aislada. Definimos su link como la aplicación estable obtenida intersectando la imagen de f con una 4-esfera suficientemente pequeña S^4_ϵ centrada en el origen en $\mathbb{R}^5$. Si f es de tipo pliegue, definimos un árbol etiquetado que codifica toda la topología de su link y probamos que se trata de un invariante topológico completo . Como aplicación obtenemos la clasificación topológica de los gérmenes de la $\mathcal{A}^2$-clase $(x, y, z^2, xz, 0)$.
Este es un trabajo conjunto con Juan José Nuño Ballesteros.

Una generalización a dimensión tres de la descomposición sectorial de Poincaré para campos de vectores planos

Clementa Alonso-González, Fernando Sanz Sánchez

Departamento de Matemáticas, Universidad de Alicante

clementa.alonso@ua.es

Resumen: Sea ξ un campo de vectores analítico en $\mathbb{R}^3$ con una singularidad aislada en el origen y teniendo únicamente singulariades de tipo hiperbólico tras una reducción de singularidades $\pi : M \to \mathbb{R}^3$. En esta charla presentaremos un resultado en el que se establece una descomposición de la dinámica de ξ alrededor del origen, generalizando a dimensión tres el teorema clásico de Poincaré sobre la descomposición en sectores elípticos, hiperbólicos y parabólicos de la dinámica de campos de vectores en el plano. Este es una trabajo en colaboración con Fernando Sanz Sánchez (Universidad de Valladolid).

Referencias

[1] C. Alonso-González, F. Sanz Sánchez (2023). Stratification of three-dimensional real flows I: Fitting domains, Journal of Differential Equations, 361, 40-96.

[2] C. Alonso-González, F. Sanz Sánchez, Stratification of three-dimensional real flows II: A generalization of Poincaré's planar sectorial decomposition. Preprint: `https://arxiv.org/abs/2306.15822`

Sucesiones y trenzas de Gysin

José Ignacio Royo Prieto, Martintxo Saralegi-Aranguren

Departamento de Matemáticas, Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea UPV/EHU

joseignacio.royo@ehu.eus

Resumen: La clásica *sucesión exacta larga de Gysin* aparece en el contexto de un fibrado con fibra esférica, y describe la relación entre la cohomología de la base y la del espacio total. Es el caso, por ejemplo, de que $\mathbb{S}^1$ o $\mathbb{S}^3$ actúen libremente sobre una variedad, siendo la base el espacio de órbitas. Si esta acción deja de ser libre, la situación torna a más compleja, ya que aparecen diferentes estratos que impiden que el espacio de órbitas sea una variedad, y dejamos de tener la estructura de fibrado. Sin embargo, las órbitas de la acción definen una foliación cuya *cohomología básica* ha demostrado ser un sustituto adaptado y rico de la cohomología de la base. Para estas acciones con singularidades también se tiene una sucesión de Gysin que relaciona la cohomología de la variedad y la cohomogía básica (ver [1, 2]), y donde pueden aparecer nuevos términos que dependen de la geometría de la acción. Si introducimos además la *cohomología de intersección* obtenemos nuevas sucesiones que se relacionan formando una trenza exacta [3].

Referencias

[1] G. Hector, M. Saralegi-Aranguren (1993). Intersection cohomology of $\mathbb{S}^1$-actions. Trans. Amer. Math. Soc. 338, no.1, 263–288.

[2] J.I. Royo Prieto, M. Saralegi-Aranguren (2013). The Gysin sequence for $\mathbb{S}^3$-actions on manifolds. Publ. Math. Debrecen 83, no. 3, 275–289.

[3] J.I. Royo Prieto, M. Saralegi-Aranguren, The Gysin braid for $\mathbb{S}^3$-actions on manifolds. arXiv:2301.09002

On the cohomology of spaces of non-singular almost-complex hypersurfaces

Federico Cantero, Ángel Alonso

Departamento Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid

federico.j.cantero@gmail.com

Abstract: Twenty years ago, Peters and Steenbrink found that the cohomology of the space of non-singular projective hypersurfaces of degree at least 3 contains a copy of the cohomology of a general linear group. In this talk we will extend their result to the space of almost-complex hypersurfaces, while recovering theirs with different methods coming from rational homotopy theory. This is a joint work with Ángel Alonso (U. Graz).

Esferas de homología hiperbólicas con género de Heegaard arbitrariamente grande

Raquel Díaz, José Luis Estévez

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad Complutense

radiaz@mat.ucm.es

Resumen: Las esferas de homología son 3-variedades que tienen la misma homología que la esfera tridimensional, y su existencia motivó la creación del concepto de grupo fundamental por parte de Poincaré y la formulación de su famosa conjetura a principios del siglo XX. En la década de los 70 las ideas de Thurston revolucionaron el área de la topología de dimensión 3, dando lugar al estudio de estructuras geométricas, principalmente la geometría hiperbólica, en las 3-variedades.

Las esferas de homología hiperbólica son muy abundantes y en la literatura se han dado varias construcciones que muestran sus propiedades diversas. En esta charla incidimos en la misma idea, dando una construcción explícita de una familia de esferas de homología hiperbólicas con género de Heegaard arbitrariamente grande. La construcción se lleva a cabo a partir de enlaces hiperbólicos de los que se mantiene un buen control de su poliedro-dominio fundamental.

Este es un trabajo conjunto con José Luis Estévez de la UNED.

La teoría de Morita derivada

Victor Carmona

Max-Planck Institute Leipzig, Alemania

vcarmona1@us.es

Resumen: ¿Hasta qué punto una equivalencia de categorías de módulos a derecha $Mod{-}R \simeq Mod{-}S$ relaciona los anillos R y S? K. Morita resolvió esta pregunta y caracterizó cuando R y S tienen categorías de módulos equivalentes. Sorprendentemente, muchos invariantes de anillos son realmente "invariantes de Morita"(moralmente, se pueden construir a partir de la categoría de módulos, sin hacer referencia al anillo) y esta es una de las razones que indican la utilidad de esta noción. Un ejemplo sencillo es el centro del anillo, $Z(R)$, y de la invariancia de Morita del centro se deduce directamente: dos anillos conmutativos A y B son isomorfos sí, y sólo si, $Mod{-}A \simeq Mod{-}B$. Nótese como esto es la primera parada hacia la geometría no-conmutativa.
Las ideas de Morita, lejos de quedarse ahí y aplicarse exclusivamente al álgebra (no conmutativa), han sido ampliamente generalizadas y empleadas en contextos más generales. Por ejemplo, los "tilting complexes"de J. Rickard responden a la pregunta que resulta al sustituir las categorías de módulos, $Mod - R$ y $Mod - S$, por categorías derivadas, $D(R)$ y $D(S)$. Más generalmente, y de manera extremadamente poco precisa, podemos pensar en "teoría de Moritaçomo la respuesta a la pregunta: Dados dos objetos O y O' (e.g. espectros anillos, dg-categorías...), ¿cuánta información podemos extraer de una equivalencia entre sus representaciones $Rep - O \simeq Rep - O'$? En términos homotópicos, lo que queremos es estudiar la teoría de homotopía de los objetos $\{O, O'...\}$ con respecto a los morfismos que inducen equivalencias entre sus representaciones (equivalencias débiles).
En esta charla: (i) repasaremos las ideas fundamentales de la teoría de Morita, aplicaciones importantes de la misma en álgebra homotópica y teoría de dg-categorías; (ii) explicaremos cómo entender dicha teoría a partir de la teoría de homotopía de Dwyer-Kan, dando una nueva construcción de esta última; y (iii) exploraremos nuevos resultados derivados de una versión general, y ahora precisa, de la teoría de Morita. La vaguedad en los últimos enunciados se debe a que esta charla está basada en trabajo en curso (en parte con J.J. Gutiérrez).

¡Todas las teorías de homotopía racional son compatibles!

Mario Fuentes

CIMAT Mérida, México

mfr300@gmail.com

Resumen: La teoría de homotopía racional ofrece dos enfoques principales para modelar el tipo de homotopía racional de un espacio simplemente conexo: los modelos de Sullivan, basados en álgebras conmutativas, y los modelos de Quillen, basados en álgebras de Lie. Cuando se trata de un espacio de tipo finito, es posible transformar el modelo de Quillen, un álgebra de Lie, en un álgebra conmutativa. Esto plantea la pregunta de si el álgebra conmutativa resultante es un modelo de Sullivan, o, inversamente, si tomar el álgebra de Lie dual de un modelo de Sullivan nos da un modelo de Quillen.
Estas preguntas equivalentes, formuladas por Baues y Lemaire, fueron respondidas de manera positiva por Martin Majewski. En esta charla, presentamos una prueba alternativa basada en un nuevo enfoque de la teoría de homotopía racional utilizando álgebras de Lie completas. Esta nueva teoría permite el estudio de espacios no simplemente conexos e incluso no conexos. No obstante, en el caso de espacios simplemente conexos, demostramos que este nuevo funtor coincide con el funtor realización de Quillen. Esta compatibilidad entre ambas teorías tiene diversas consecuencias, entre ellas, la conjetura de Baues y Lemaire.

Aspectos geométricos y topológicos de nilvariedades

Raquel Villacampa

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza - I.U.M.A.

raquelvg@unizar.es

Resumen: Las nilvariedades son un tipo especial de variedades diferenciables compactas que se definen como el cociente de un grupo de Lie nilpotente simplemente conexo por un subgrupo discreto maximal.
Desde que Thurston en 1976 mostrara a través de una nilvariedad el primer ejemplo de una variedad compacta compleja simpléctica que no era Kähler, han sido muchas las cuestiones geométricas y topológicas a las que las nilvariedades han dado respuesta. En esta charla mostraremos algunos de estos problemas que pasan por el estudio de la holonomía de determinadas conexiones métricas, deformaciones de estructuras o sucesiones espectrales.

Sistemas de fusión sobre grupos p-torales discretos

Carles Broto, Ran Levi, Bob Oliver

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona

broto@mat.uab.cat

Resumen: Los sistemas de fusión abstractos sobre grupos p-torales discretos se definen en 2007 como generalización de los sistemas de fusión sobre p-grupos finitos introducidos por Puig en la década de los años 90. Se trata de modelar la estructura p-local de grupos de Lie compactos y espacios de lazos finitos. Describiremos brevemente este concepto y expondremos resultados recientes sobre realizabilidad de dichos sistemas abstratos como sistemas de fusión de grupos localmetne finitos. Se trata de trabajo conjunto con Bob Oliver y Ran Levi.