# Sesión Especial 1

# Análisis Funcional

**Organizadores:**

- Fernando Albiac (Universidad Pública de Navarra)
- José Luis Ansorena (Universidad de La Rioja)

**Descripción:**
El análisis funcional proporcionó desde su introducción a principios del siglo XX un marco abstracto idóneo para situar y estudiar, con herramientas específicas muy poderosas, distintas ramas de las matemáticas puras y aplicadas que en principio parecían totalmente inconexas tales como el análisis real, las ecuaciones diferenciales, la topología, la teoría de las probabilidades, la teoría de conjuntos, etc. Aparte de interesante y bonita, la teoría de los espacios de Banach es también útil, de modo que a alguien que esté interesado en análisis armónico, funciones de variable compleja, series ortonormales, teoría de aproximación o teoría de probabilidades, le puede ser útil la teoría de espacios de Banach. Al mismo tiempo, el análisis funcional proporciona un lenguaje y unas herramientas específicas que permiten su aplicabilidad a diversos campos de la física y la ingeniería. Lejos de ser una teoría caduca, un siglo después de su nacimiento, el análisis funcional sigue despertando el interés de muchos matemáticos, se abren nuevos problemas y, como consecuencia, la teoría general se enriquece con nuevas técnicas y perspectivas que hacen de la teoría de los espacios de Banach una de las más vitales y elegantes. El análisis funcional está muy enraizado en el panorama investigador en matemáticas de la universidad española. Mientras el interés y la inversión en proyectos de matemáticas en Estados Unidos y Europa parece dirigirse hacia otras áreas, España es uno de los países donde el análisis funcional goza de mejor salud y proyección. Si bien, tradicionalmente, la evolución del análisis funcional se vertebraba en torno a líderes regionales especializados en diferentes aspectos del mismo (análisis convexo, espacios de funciones, estructura lineal, geometría no lineal, conexiones con EDPs y análisis armónico, etc.) las nuevas generaciones de analistas han bebido de fuentes extranjeras y enriquecido el panorama nacional con la implementación de métodos nuevos y la aparición de nuevas ramificaciones que mantienen la teoría en continuo crecimiento e innovación. Por todo ello creemos que la celebración del Congreso de la RSME en la UPNA es una buena oportunidad para organizar una sesión dedicada al análisis funcional que reúna a algunos de los representantes más significativos de las nuevas generaciones y corrientes de analistas funcionales de las distintas universidades españolas. Con un programa de ponentes suficientemente atractivo y diverso se trata de convocar al mayor número posible de expertos, fomentar la interacción presencial entre los participantes de la sesión, y discutir tanto los avances en la teoría como los retos con que se enfrenta en el futuro.

# Programa

LUNES, 22 de enero:

| | |
|---|---|
| 16:00 – 16:30 | Pedro Tradacete (CSIC)<br>*Basic sequences in Banach lattices* |
| 16:30 – 17:00 | Antonio Avilés (Universidad de Murcia)<br>*Propiedades geométricas de la norma en duales sucesivos* |
| 17:00 – 17:30 | Glenier Bello (Universidad de Zaragoza)<br>*Encajes inducidos por bases almost greedy* |
| 17:30 – 18:00 | María Angeles Japón (Universidad de Sevilla)<br>*Geometry of sets and fixed-point theorems* |

MARTES, 23 de enero:

| | |
|---|---|
| 11:30 – 12:00 | Óscar Blasco (Universitat de València)<br>*Property (A) versus* 1*-unconditionality* |
| 12:00 – 12:30 | Sebastián Lajara (Universidad Complutense de Madrid)<br>*Quasicomplemented subspaces of Banach spaces and weak*-basic sequences* |
| 12:30 – 13:00 | Guillermo Curbera (Universidad de Sevilla)<br>*The finite Hilbert transform acting on the Zygmund space* $L\log L$ |
| 13:00 – 13:30 | Matías Raja (Universidad de Murcia)<br>*Subespacios Lipschitz de* $C(K)$ |
| | |
| 16:00 – 16:30 | José Bonet (Universitat Politècnica de València)<br>*Bounded analytic functions in the ball of* $\mathbb{C}^N$ *which attain their norm on the predual* |
| 16:30 – 17:00 | Ricardo García (Universidad de Extremadura)<br>*A bilinear approach to* $\mathrm{Ext}^2$ *in Banach spaces* |
| 17:00 – 17:30 | Jordi López Abad (UNED)<br>*Orbit spaces by the group of isometries of a Banach space* |
| 17:30 – 18:00 | Rubén Medina (Universidad de Granada/Czech Technical University in Prague)<br>*Sobre propiedades de aproximación no lineales y un problema de Godefroy y Ozawa* |

# Basic sequences in Banach lattices

Pedro Tradacete

Instituto de Ciencias Matemáticas, Consejo Superior de Investigaciones Científicas

pedro.tradacete@icmat.es

**Abstract:** Given a basic sequence in a Banach lattice we look at the sequence given by its absolute values. Although simple examples show this sequence need not be in general basic, we will study the canonical situation given by free Banach lattices generated by a Banach space. We will also talk about the different types of basic sequences that arise induced by the different modes of convergence available in a Banach lattice.

## Referencias

[1] A. Avilés, J. Rdoríguez, P. Tradacete (2018). The free Banach lattice generated by a Banach space. J. Funct. Anal. 274, no. 10, 2955-2977.

[2] T. Oikhberg, M. A. Taylor, P. Tradacete, V. G. Troitsky (2022+). Free Banach lattices. `https://arxiv.org/pdf/2210.00614`

[3] M. A. Taylor, V. G. Troitsky, Bibasic sequences in Banach lattices (2020). J. Funct. Anal. 278, No. 10, Article ID 108448.

# Propiedades geométricas de la norma en duales sucesivos

Antonio Avilés, Gonzalo Martínez Cervantes, Abraham Rueda Zoca

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

avileslo@um.es

**Resumen:** Presentaremos varios resultados sobre cómo ciertas propiedades geométricas de la norma de un espacio de Banach, relacionadas con la existencia de copias de $\ell_1$ o de $c_0$ en el espacio, pueden traducirse en la existencia de elementos singulares en el doble o cuádrupe dual pero solo bajo ciertos axiomas.

## Referencias

[1] A. Avilés, G. Martínez-Cervantes, A. Rueda Zoca (2023). *L*-orthogonal elements and *L*-orthogonal sequences. Int. Math. Res. Not., 11, 9128-9154.

[2] A. Avilés, G. Martínez-Cervantes, A. Rueda Zoca (2022). Banach spaces containing $c_0$ and elements in the fourth dual. J. Math. Anal. Appl., 508.

[3] A. Avilés, G. Martínez-Cervantes, A. Rueda Zoca (2023). A renorming characterisation of Banach spaces containing $\ell_1(\kappa)$. Publ. Mat., Barc., 67, 601-609.

**Agradecimientos:** Apoyado por el proyecto PID2021-122126NB-C32 de la AEI y el proyecto 21955/PI/22 de la Fundación Séneca - ACyT Región de Murcia.

# Encajes inducidos por bases almost greedy

Glenier Bello, José Luis Ansorena, Przemysław Wojtaszczyk

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza

gbello@unizar.es

**Resumen:** Dado un espacio de sucesiones $\mathbb{S}$ y un espacio quasi-Banach $\mathbb{X}$, diremos que $\mathbb{S}$ se encaja en $\mathbb{X}$ vía una base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\mathbb{X}$ si la transformación $(a_n)_{n=1}^{\infty} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ define un operador acotado de $\mathbb{S}$ en $\mathbb{X}$, y diremos que $\mathbb{X}$ se encaja en $\mathbb{S}$ (vía $(x_n)_{n=1}^{\infty}$) si la transformación $f \mapsto (x_n^*(f))_{n=1}^{\infty}$ define un operador acotado de $\mathbb{X}$ en $\mathbb{S}$. Tras un breve repaso de distintos tipos de bases en espacios quasi-Banach, encajes y aproximación greedy, veremos que las bases almost greedy inducen encajes muy finos para espacios de Banach super-reflexivos. De manera más precisa, veremos que en este caso podemos "emparedar" a $\mathbb{X}$ entre dos espacios de sucesiones de Lorentz super-reflexivos muy próximos entre sí, en el sentido de que ambos tienen la misma función fundamental. Terminaremos la charla dando alguna consecuencia de este hecho y planteando varios problemas abiertos.

## Referencias

[1] J. L. Ansorena, G. Bello, P. Wojtaszczyk (2023). Lorentz spaces and embeddings induced by almost greedy bases in superreflexive Banach spaces. Israel Journal of Mathematics, 255, 621-644.

# Geometry of sets and fixed-point theorems.

María A. Japón

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla

japon@us.es

**Abstract:** Every fixed-point theorem mainly has two key two players: the domain and the operator involved. Some requirements over the topology or geometry of the domain, along with some criteria over the continuity or metric properties of the acting operator, is known to guarantee the existence of a fixed point. The literature concerning this topic is endless and dates back to the nineteenth century, with a vast explosion of published papers during the last sixty years.

During this talk, we will look at the opposite scope: What can we say about the topological or geometrical features of a domain $C$ (often a subset in a Banach space) when the existence of a fixed point is always guaranteed for some family of Lipschitz operators acting over $C$?

## Referencias

[1] T. Domínguez Benavides, M. Japón (2021). Fixed point properties and reflexivity in variable Lebesgue spaces. J. Funct. Anal. no. 6, Paper No. 108896, 22 pp.

[2] T. Domínguez-Benavides, M. Japón Pineda, S. Prus (2004). Weak compactness and fixed point property for affine mappings. J. Funct. Anal. no. 1, 1–15.

[3] H. Fetter, M. Japón, J. Villada (2018). Reflexivity is equivalent to stability of the almost fixed point property. J. Math. Anal. Appl. no. 2, 789–796.

[4] M. Japón, C. Lennard, R. Popescu (2020). A fixed-point characterization of weakly compact sets in $L_1(\mu)$ spaces. J. Math. Anal. Appl. no. 1, 124228, 10pp.

[5] M. Japón, C. Lennard, A. Stawski. New fixed point free nonexpansive mappings in $C(K)$ and related spaces. Preprint

[6] P.K.Lin, Y. Sternfeld (1985). Convex sets with the Lipschitz fixed point property are compact, Proc. Amer. Math. Soc., no. 4, 633–639.

# Property (A) versus 1-unconditionality

Oscar Blasco

Departamento Análisis Matemático, Universidad de Valencia

oscar.blasco@uv.es

**Abstract:** Recall that a basis $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in a Banach space $X$ is called 1-*suppression unconditional* if $\|\sum_{n\in A} x_n^*(x)\, x_n\| \leq \|x\|$ for all finite subsets $A$ of $\mathbb{N}$ and all $x \in X$. The so-called Property (A), introduced in [3], establishes that $\|1_{\varepsilon,A} + f\| \leq \|1_{\varepsilon,B} + f\|$ for all $f \in X$ with $\text{máx}_n |x_n^*(f)| \leq 1$, all $A$, $B \subset \mathbb{N}$ with $cardA \leq cardB < \infty$ and $A \cap B = A \cap supp(f) = B \cap supp(f) = \emptyset$, and where $1_{\varepsilon,A} = \sum_{j\in A} \varepsilon_j x_j$ for $|\varepsilon_j| = 1$. These two properties were shown to be intimately connected with the notion of greedy bases and its relatives, due to the work by F. Albiac and J.L. Ansorena ([1, 2])
The question whether Property (A) implies 1-suppression unconditional was left open for a while. In a recent paper [4] it has been shown that there exists a basis equivalent to the canonical basis of $\ell_1$ which satisfies Property (A) but fails to be 1-suppression unconditional, giving a negative answer to this question.
In this talk we shall present a general method to construct renormings of $\ell^1$ with Property (A). Then we give procedures to select those which fail to be 1-supression unconditional, recovering the result in [4].

## Referencias

[1] F. Albiac, J.L. Ansorena (2016). Characterization of 1-quasi greedy Bases, J. Approx. Theory 201, 7-12.

[2] F. Albiac, J.L. Ansorena (2017). Characterization of 1-almost greedy Bases, Rev. Mat. Complut. 30, no1, 13-24.

[3] F. Albiac, P Wojtaszczyk (2006). Characterization of 1-greedy Bases, J. Approx. Theory 138, no 1, 65-86.

[4] F. Albiac, J.L. Ansorena, O. Blasco, H.V. Chu, T. Oikkberg (2024). Counterexamples in the isometric theory of symmetric and greedy bases. J. Approx. Theory 297.

# Quasicomplemented subspaces of Banach spaces and weak$^*$-basic sequences

Sebastián Lajara, Mar Jiménez-Sevilla

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid

selajara@ucm.es

**Abstract:** In this talk we present a result which generalizes the theorems of Gurariy-Kadets and Lindenstrauss-Rosenthal on quasicomplemented subspaces of Banach spaces. We also provide a solution in wide classes of Banach spaces of a problem posed by Ivan Singer in [2], concerning the existence of a weak$^*$-basic sequence in the dual of a Banach space which is biorthogonal to a given basic sequence (or more generally, a given minimal sequence) in that space, and other related questions. The talk is based on the recent work [1].

## Referencias

[1] M. Jiménez-Sevilla, S. Lajara (2023). Quasicomplemented subspaces of Banach spaces and separable quotients. Results in Mathematics 78 (6), paper no. 244 (24 pp.).

[2] I. Singer (1981). Bases in Banach spaces II. Springer-Verlag (Berlin).

# The finite Hilbert transform acting on the Zygmund space $L\log L$

Guillermo P. Curbera, Susumu Okada, Werner J. Ricker

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla

curbera@us.es

**Abstract:** The finite Hilbert transform $T$ is a singular integral operator which maps the Zygmund space $L\log L := L\log L(-1,1)$ continuously into $L^1 := L^1(-1,1)$. By extending the Parseval and Poincaré-Bertrand formulae to this setting, it is possible to establish an inversion result needed for solving the airfoil equation $T(f) = g$ whenever the data function $g$ lies in the range of $T$ within $L^1$ (shown to contain $L(\log L)^2$). Until now this was only known for $g$ belonging to the union of all $L^p$ spaces with $p > 1$.

## Referencias

[1] G. P. Curbera, S. Okada, W. J. Ricker (2019). Inversion and extension of the finite Hilbert transform on $(-1,1)$. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 198, 1835–1860.

[2] G. P. Curbera, S. Okada, W. J. Ricker (2021). Fine spectra of the finite Hilbert transform in function spaces. Advances in Mathematics, 380, 107597.

[3] G. P. Curbera, S. Okada, W. J. Ricker (2023). The finite Hilbert transform acting in the Zygmund space $L\log L$. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, to appear.

# Subespacios Lipschitz de $C(K)$

Matías Raja

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

matias@um.es

**Resumen:** Es bien conocido que todo espacio de Banach separable puede ser representado isométricamente en $C(K)$, si $K$ es un compacto no disperso (notablemente el intervalo $[0, 1]$). Sin embargo, esto deja de ser cierto cuando a las funciones que realizan la representación se les imponen condiciones de regularidad extra, como ser Lipschitz respecto a alguna métrica $d$ definida sobre $K$.
En la charla realizaremos un recorrido por los resultados que vinculan la existencia de copias isométricas Lipschitz de ciertos espacios con propiedades del par $(K, d)$. Por ejemplo, cuando $K$ es metrizado por $d$, qué relación hay entre la dimensión topológica de $K$ y la dimensión algebraica de ciertos subespacios Lipschitz de $C(K)$; o en caso que $d$ sea inferiormente semicontinua, qué implicaciones topológicas tiene la existencia de un subespacio Lipschitz de $C(K)$ isomorfo a $\ell_1$.
Algunos de estos resultados que contaremos en la charla han aparecido repartidos por varios artículos a lo largo de los años. No obstante, para dotar de coherencia a esta teoría, he preparado un "survey" donde reúno los principales argumentos usados en los trabajos previos con resultados nuevos, y que estará a disposición de los participantes en el congreso.

## Referencias

[1] M. Raja, Representation in $C(K)$ by Lipschitz functions, preprint 2023.

# Bounded analytic functions in the ball of $\mathbb{C}^N$ which attain their norm on the predual

José Bonet, Richard Aron, Manuel Maestre

Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

jbonet@mat.upv.ess

**Abstract:** The Banach algebra $H^\infty(B_N)$ of bounded holomorphic functions on the complex unit ball $B_N$ of $\mathbb{C}^N$ is a dual Banach space. Ng obtained a representation of the predual, which we denote by $G^\infty(B_N)$. In the case of one variable ($N = 1$) Ando proved that there is a unique isometric predual of $H^\infty(\mathbb{D})$. It seems to be unknown if this is also the case in several variables. By the Bishop–Phelps theorem, the set of elements of $H^\infty(B_N)$ that attain their norm with respect to $G^\infty(B_N)$ is a dense set. Fisher obtained a characterization of the elements of $H^\infty(\mathbb{D})$ which are norm attaining on $G^\infty(\mathbb{D})$. We study the case of $H^\infty(B_N)$. We also examine similar questions for the polydisc algebra $H^\infty(\mathbb{D}_N)$

# A bilinear approach to $\mathrm{Ext}^2$ in Banach spaces

Ricardo García, Jesús M.F. Castillo.

Departamento de Matemáticas, Universidad de Extremadura/IMUEX

rgarcia@unex.es

**Abstract:** Given two Banach spaces $X$ and $Y$ let $\mathcal{L}(X,Y)$ denote the vector space of operators acting between them. This is the Hom functor in the category of Banach space. Its derived functor is Ext, the functor that assigns to each couple $X;Y$ the vector space $\mathrm{Ext}(X,Y)$ of exact sequences $0 \to Y \to \square \to X \to 0$ modulo equivalence; its second derived functor will be called $\mathrm{Ext}^2$. Several important Banach space theorems adopt the form $\mathrm{Ext}(X,Y) = 0$. For instance,
– Sobczyk's theorem: $\mathrm{Ext}(X, c_0) = 0$ for every separable Banach space $X$.
– Lindenstrauss's lifting principle: $\mathrm{Ext}(L_1(\mu), X^*) = 0$.
– The Enflo-Lindenstrauss-Pisier and Kalton-Peck construction: $\mathrm{Ext}(\ell_2, \ell_2) \neq 0$.
In fact, it is a basic Banach space question to decide whether $\mathrm{Ext}(X,Y) = 0$. Curiously, similar questions for $\mathrm{Ext}^2$ have not been treated. I would like to discuss is an unexpected connection between homology and the study of bilinear forms [1].
To that end, let us consider a projective presentation for a Banach space $X$; namely, an exact sequence of the form $0 \to \kappa_X \to \ell_1(\Gamma) \to X \to 0$. Let us denote $\mathcal{B}(\kappa_X)$ the space of all bilinear continuous forms defined on $\kappa_X$ and introduce the following equivalence relation: $B \sim 0$ if and only if $B$ extends to a bilinear continuous form on $\ell_1(\Gamma)$. One has

$$\mathrm{Ext}^2(X, X^*) = \mathcal{B}(\kappa_X)/\sim .$$

And since it was proved in [2] that $\mathrm{Ext}^2(\ell_2, \ell_2) \neq 0$, it follows that there are continuous bilinear forms on $\kappa_{\ell_2}$ that cannot be extended to continuous bilinear forms on $\ell_1$.

## Referencias

[1] J.M.F. Castillo and R García (2019). Bilinear forms in the homology of Banach spaces, Linear Algebra and its Applications, 566 199–211.

[2] F. Cabello Sánchez, J. M. F. Castillo, W. H. G. Corrêa, V. Ferenczi, and R. García (2021). On the $\mathrm{Ext}^2$-problem for Hilbert spaces, J. Funct. Anal., 280, 108863. .

**Acknowledgments:** The research has been supported by projects MTM2016-76958-C2-1-P and IB20038 de la Junta de Extremadura.

# Orbit spaces by the group of isometries of a Banach space

Jorge López Abad, Valentin Ferenczi

Departamento de Matemáticas Fundamentales, UNED

abad@mat.uned.es

**Abstract:** We will study several orbit spaces of the form $X//G$ where $G$ is the group of linear isometries of a Banach space and $X$ is a metric space endowed with an action by isometries $G \curvearrowright X$.

# Sobre propiedades de aproximación no lineales y un problema de Godefroy y Ozawa

Rubén Medina

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada
Department of Mathematics, Czech Technical University in Prague

rubenmedina@ugr.es

**Resumen:** En esta charla vamos a seguir los pasos de Per Enflo ([1], [2]) para encontrar un espacio de Banach separable $X$ sin retracciones $\lambda$-Lipschitz a ningún subconjunto compacto y convexo cuya expansión lineal sea densa en $X$ para un $\lambda > 1$. Este es un primer paso hacia la solución del problema de Godefroy y Ozawa [3, Problem 3], a saber, si todo espacio separable tiene una retracción Lipschitz a algún subconjunto compacto y convexo cuya expansión lineal sea densa. Este problema tiene una gran relación con las propiedades de aproximación no lineales y, entre otros, con problemas de Kalton [4, Problem 1] y de los propios Godefroy y Ozawa [3, Problem 4].

## Referencias

[1] P. Enflo (1973). A Banach space with basis constant greater than 1 1. Ark. Mat., 11:103–107.

[2] P.Enflo (1973). A counterexample to the approximation problem in Banach spaces. Acta Math., 130:309–317.

[3] G. Godefroy, N. Ozawa (2014). Free Banach spaces and the approximation properties. Proc. Amer. Math. Soc., 142(5):1681–1687.

[4] N. J. Kalton (2012). The uniform structure of Banach spaces. Math. Ann., 354(4):1247–1288.

**Agradecimientos:** Este trabajo no habría sido posible sin la ayuda de mi codirector de tesis Petr Hájek.