Superficies de forma óptima

Magdalena Rodríguez Pérez

Departamento de Geometría y Topología / Instituto de Matemáticas IMAG,
Universidad de Granada

magdarp@ugr.es

Resumen: Las superficies que minimizan algún tipo de funcional de energía aparecen de forma natural en diferentes áreas. Este es el caso particular de las superficies mínimas, que son puntos críticos para el funcional área. La curvatura media de una superficie está estrechamente relacionada con la tensión superficial de las interfaces de separación entre fluidos en equilibrio. Por tanto, las superficies mínimas (es decir, aquellas con curvatura media constantemente nula) aparecen de forma natural en campos aparentemente distintos como Física, Química, Ciencia de Materiales, Biología o Arquitectura, entre otros. La teoría de superficies mínimas se encuentra en la intersección entre el Cálculo de Variaciones, la teoría de EDP elípticas, la Teoría Geométrica de la Medida y el Análisis Complejo, por lo que usa herramientas potentes de todas estas ramas.

Las superficies mínimas de $\mathbb{R}^3$ mejor conocidas son aquellas con curvatura total finita, ya que un teorema de Huber [5, 10] nos dice que son conformemente equivalentes a una superficies de Riemann compacta menos una cantidad finita de puntos, que se corresponden con los finales de la superficie. Además, se conoce el comportamiento asintótico de los finales de una tal superficie [14]: o bien son asintóticos a planos o bien a medias catenoides. Presentaremos algunos ejemplos de tales superficies, así como los resultados de clasificación conocidos y problemas aún abiertos.

Aunque el origen de la teoría de superficies mínimas se remonta al siglo XVIII, en los orígenes del Cálculo de Variaciones, es un campo de estudio aún muy activo y ha motivado la emergente teoría de superficies mínimas en entornos más generales. En este sentido, una de las teorías más conocidas es la de superficies mínimas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (el espacio producto del plano hiperbólico y la recta real). En este espacio ambiente se han construido numerosos ejemplos de superficies mínimas en los últimos años, como por ejemplo en [9, 13, 1, 7, 8, 12, 11, 6], y se han estudiado los ejemplos con curvatura (intrínseca) total finita: se sigue cumpliendo el teorema de Huber, pero ahora los finales son asintóticos a poligonales geodésicas contenidas en el cilindro en infinito [4, 3, 2]. Explicaremos las similitudes y las diferencias de esta teoría con la correspondiente en $\mathbb{R}^3$ y expondremos algunos resultados de clasificación obtenidos.

Finalmente, spresentaremos algunas aplicaciones a Arquitectura de la teoría de superficies mínimas en la que estamos trabajando recientemente.

Referencias

[1] P. Collin, H. Rosenberg (2010). Construction of harmonic diffeomorphisms and minimal graphs. Ann. of Math., 172, 1879–1906.

[2] L. Hauswirth, A. Menezes, M. Rodríguez (2019). On the characterization of minimal surfaces with finite total curvature in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and $\widetilde{\mathrm{PSL}}_2(\mathbb{R})$. Calc. Var. Partial Differ. Equ., 58, 80.

[3] L. Hauswirth, B. Nelli, R. Sa Earp, E. Toubiana (2015). Minimal ends in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ with finite total curvature and a Schoen type theorem. Advances in Mathematics, 274, 199-240.

[4] L. Hauswirth, H. Rosenberg (2006). Minimal surfaces of finite total curvature in $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$. Mat. Contemp., 31, 65-80.

[5] A. Huber (1957). On Subharmonic Functions and Differential Geometry in the Large. Comment. Math. Helvetic, 32, 181-206.

[6] F. Martín, R. Mazzeo, M. Rodríguez (2014). Minimal surfaces with positive genus and finite total curvature in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, Geom. Topol., 18, 141-177.

[7] L. Mazet, M. Rodríguez, H. Rosenberg (2011). The Dirichlet problem for the minimal surface equation –with possible infinite boundary data– over domains in a Riemannian surface. Proc. London Math. Soc., 102, 985-1023.

[8] F. Morabito, M. Rodríguez (2012). Saddle towers and minimal k-noids in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. J. Inst. Math. Jussieu, 11, 333-349.

[9] B. Nelli, H. Rosenberg (2002). Minimal surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Bull. Braz. Math. Soc., 33, 263-292.

[10] R. Osserman (1986). A survey of minimal surfaces, 2nd ed. Dover Publications, New York.

[11] J. Pyo, M. Rodríguez (2014). Simply-connected minimal surfaces with finite total curvature in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Int. Math. Res. Notices, 2014, 2944-2954.

[12] M. Rodríguez (2013). Minimal surfaces with limit ends in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. J. Reine Ang. Math. (Crelle's Journal), 685, 123-141.

[13] R. Sa Earp, E. Toubiana (2005). Screw motion surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Illinois J. Math., 49, 1323-1362.

[14] R. Schoen (1983). Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces. J. Diff. Geom., 18, 791-809.

Agradecimientos: Financiado parcialmente por los proyectos IMAG–Maria de Maeztu CEX2020-001105-M / AEI / 10.13039/501100011033 y PID2020-117868GB-I00.