# Complejos elípticos y descomposición de Hodge

Juan Carlos Castro Rivera

Universidad Zaragoza

jc_castro1509@hotmail.com

**Resumen:** Se pretende dar una descripción del *Teorema de descomposición ortogonal para complejos elípticos*, siguiendo la línea de [1]. Si bien se trata de un resultado ya conocido, la motivación del cartel viene de remarcar una manera de incluir el análisis funcional en el estudio de variedades diferenciables y complejas.

Dada $(E^\bullet, L^\bullet)$ un complejo sobre una variedad diferenciable $M$, se tiene una *secuencia de símbolos* asociada $0 \longrightarrow \pi^* E_0 \xrightarrow{\sigma_k(L_0)} \pi^* E_1 \xrightarrow{\sigma_k(L_1)} \cdots \xrightarrow{\sigma_k(L_{N-1})} \pi^* E_N \longrightarrow 0$. Si es exacta, se dice que el complejo es *elíptico*, y se definen sus *clases de cohomología*: $H^q(E^\bullet, L^\bullet) := \frac{\ker(L_q)}{\mathrm{Im}(L_{q-1})}$. Además, fijada una forma de volumen $d\mu$ y una métrica hermítica $\langle , \rangle_{E_j}$ sobre cada fibrado, se define una métrica sobre las secciones $\Gamma(E_j)$, $\langle \xi, \eta \rangle_0 := \int_M \langle \xi(x), \eta(x) \rangle_{E_{j,x}} \, d\mu$. Ello permite definir los operadores de Laplace $\Delta_j := L_{j-1} L_{j-1}^* + L_j^* L_j$. Se tiene el *Teorema de descomposición ortogonal para complejos elípticos*,

$$\Gamma(E) = \ker \Delta \oplus LL^* G(\Gamma(E)) \oplus L^* LG(\Gamma(E)),$$

donde además, $\ker \Delta$ es de dimensión finita. Como corolario, para el complejo de De Rham, se tiene la finitud de los grupos $\dim_{\mathbb{C}} H^q(M, \mathbb{C}) < \infty$. También se deduce el *Teorema de Hodge* sobre los representantes armónicos $H^q(M, \mathbb{C}) \cong \ker \Delta_q$. En geometría compleja, se obtiene la finitud de los grupos de cohomología de Dolbeault. Para variedades Kähler, aprovechando algunas relaciones de conmutación entre los operadores $d, \partial, \bar{\partial}$ y sus adjuntos, se obtiene una obstrucción topológica:

**Teorema de descomposición de Hodge**. *Sea $X$ una variedad Kähler y compacta. Entonces, se verifica*

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \sum_{p+q=k} H^{p,q}_{\bar{\partial}}(X).$$

## Referencias

[1] Wells, R. O. (2008). Differential analysis on complex manifolds. Third edition. Graduate Texts in Mathematics, 65. Springer, New York.