

# Árboles, desarreglos y familias de caminos sin intersección

EMMANUEL BRIAND, LUIS ESQUIVIAS QUINTERO, ÁLVARO GÚTIERREZ CÁCERES,  
ADRIÁN LILLO PINTO, MERCEDES ROSAS CELIS

Departamento Matemática Aplicada 1, Universidad de Sevilla

ebriand@us.es

**Resumen:** Graham y Pollak demostraron en 1971 [1] que el determinante de la matriz de distancias de un árbol depende solamente de su número  $n$  de vértices, y vale

$$(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

Se echaba en falta, sin embargo, una prueba combinatoria que explique la fórmula. Proporcionamos esta demostración, reduciendo el problema a un conteo con signos de familias de caminos en un grafo dirigido ad hoc. El conteo de caminos se reduce, mediante el lema de Gessel y Viennot, a un conteo de caminos sin intersección. Al poner pesos en las aristas de dicho grafo se demuestran al mismo tiempo deformaciones paramétricas.

Usando el mismo enfoque, resolvemos problemas de conteo con signo de desarreglos (permutaciones sin punto fijo).

## Referencias

- [1] R. L. Graham and H. O. Pollak (1971). On the addressing problem for loop switching. *Bell System Tech. J.*, 50, 2495–2519.

**Agradecimientos:** Este trabajo fue soportado por el proyecto PID2020-117843GB-I00 financiado por MCIN/ AEI/10.13039/501100011033.