Topología de variedades Kähler y Sasakianas

Vicente Muñoz

Departamento de Algebra, Geometría y Topología, Universidad Complutense de Madrid

vicente.munoz@ucm.es

Resumen: Las variedades Kähler aparecen de forma natural tanto en Geometría Algebraica (variedades complejas proyectivas) como en Geometría Diferencial (variedades riemannianas con holonomía $U(n)$). El problema de determinar cuando una variedad diferenciable admite una estructura Kähler es central. En particular distinguir variedades que admiten estructuras ligeramente más débiles, tales como complejas o simplécticas, de variedades Kähler. Una nutrida colección de propiedades topológicas que verifican las variedades Kähler junto con diversas construcciones de variedades simplécticas, nos permiten encontrar ejemplos en distintas dimensiones [1, 5].

En dimensión impar, las variedades Sasakianas son análogos naturales de las variedades Kähler. Esta estructura se debilita a la estructura de contacto, en varios niveles, siendo las variedades de K-contacto las más cercanas a las Sasakianas. Es un problema importante el encontrar obstrucciones para que una variedad compacta admita dichos tipos de estructuras y, en particular, construir variedades de K-contacto que no admitan estructuras Sasakianas. En dimensión 7 y superior, podemos utilizar propiedades de homotopía racional, notablemente la formalidad, para construir ejemplos de esta índole.

En el caso de variedades simplemente conexas de dimensión 5 (variedades de Barden-Smale), el problema es especialmente interesante y ha resistido al no ser resuelto con las técnicas disponibles. Aparece propuesto por Boyer-Galicki en su famoso tratado [2]. Para estudiarlo, las 5-variedades de K-contacto se traducen a la construcción de 4-órbifolds cíclicos simplécticos que contienen b_2 superficies simplécticas disjuntas de género $g > 0$ y que generan la homología, mientras que las 5-variedades Sasakianas se traducen en superficies algebraicas con singularidades cíclicas que contienen b_2 curvas complejas disjuntas de género $g > 0$.

Ya el caso de 4-variedades (sin puntos singulares) es sutil en el terreno simpléctico. Daremos un par de construcciones de 4-variedades simplécticas con $b_1 = 0$ y con b_2 superficies simplécticas disjuntas de género $g > 0$ [3, 7]. En el caso de superficies algebraicas (4-variedades Kähler), este fenómeno parece imposible (excepto por los planos proyectivos fake). Conseguimos resolver algunos casos de esta conjetura para género pequeño [3, 7]. El estudio de 4-órbifolds se vuelve más delicado, pues la conjetura algebraica resulta ser falsa [4]. Será necesario sofisticar la construcción simpléctica para traducir el número de Betti b_2^+ a través de la existencia de curvas complejas disjuntas. Damos el primer ejemplo de una 5-variedad simplemente conexa que admite una estructura de K-contacto pero no admite ninguna estructura Sasakiana [6], revolviendo finalmente la pregunta de [2].

Referencias

[1] G. Bazzoni, M. Fernández, V. Muñoz (2018). A 6-dimensional simply connected complex and symplectic manifold with no Kähler metric, Jour. Symplectic Geom. 16, 1001-1020.

[2] C. Boyer, K. Galicki, Sasakian Geometry, Oxford Univ. Press, 2007

[3] A. Cañas, V. Muñoz, J. Rojo, A. Viruel (2021). A K-contact simply connected 5-manifold with no semi-regular Sasakian structure, Publ. Math. 65, 615-651.

[4] A. Cañas, V. Muñoz, M. Sch"utt, A. Tralle (2022). Quasi-regular Sasakian and K-contact structures on Smale-Barden manifolds, Revista Mat. Iberoam. 38, 1029-1050.

[5] M. Fernández, V. Muñoz (2008). An 8-dimensional non-formal simply connected symplectic manifold, Annals Math (2) 167, 1045-1054.

[6] V. Muñoz, A Smale-Barden manifold admitting K-contact but not Sasakian structure, J. Eur. Math. Soc., to appear.

[7] V. Muñoz, J.A. Rojo, A. Tralle, Homology Smale-Barden manifolds with K-contact and Sasakian structures, Internat. Math. Research Notices 2020, No. 21, 7397-7432.