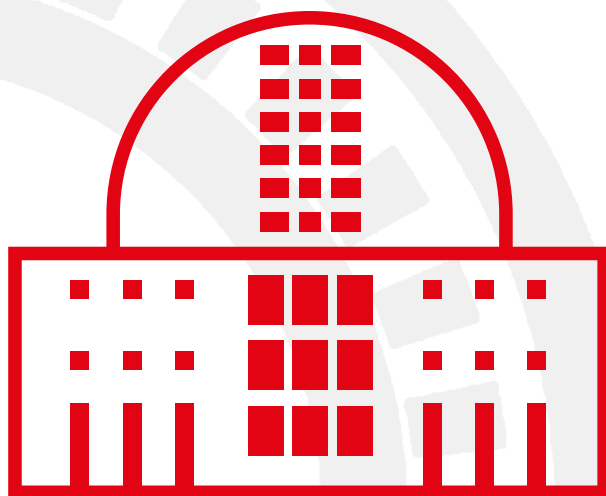


Congreso Bienal de la  
**REAL SOCIEDAD  
MATEMÁTICA  
ESPAÑOLA**

Del 22 al 26 de enero de 2024



**RSME '24**

UPNA PAMPLONA

Gobierno  
de Navarra  Nafarroako  
Gobernua

PRESENTACIÓN

COMITÉS

CONFERENCIAS PLENARIAS

SESIONES ESPECIALES

SESIONES PÓSTER

MESAS REDONDAS

OTRAS ACTIVIDADES

AGRADECIMIENTOS

# PRESENTACIÓN

PRESENTACIÓN

COMITÉS

CONFERENCIAS PLENARIAS

SESIONES ESPECIALES

SESIONES PÓSTER

MESAS REDONDAS

OTRAS ACTIVIDADES

AGRADECIMIENTOS

Las Matemáticas están en todas partes, en todo lo que hacemos, pero como sociedad no siempre hemos querido mirarlas de cerca. Durante mucho tiempo, las Matemáticas eran la asignatura que a muchos estudiantes se les quedaba atragantada y de la que huían en cuanto podían. Estudiar la titulación de Matemáticas era para personas un poco raras y tenía una única salida, la docencia, y era por esto que la mayor parte de las estudiantes hace unos cuantos años fuesen mujeres. Era complicado explicar el porqué de la elección.

Pero el mundo ha cambiado y los matemáticos y las matemáticas hemos dejado de ser esos profesionales que no sabemos dónde colocar en el mundo laboral. De hecho, en los últimos años hemos visto cómo se ampliaba nuestro abanico de oportunidades y se disparaba el interés de las empresas en torno a esta disciplina. La explicación de la demanda de estos profesionales se encuentra en las nuevas prioridades del mercado en donde es difícil encontrar un sector que no los requiera. Las Matemáticas están viviendo una época de esplendor, debido fundamentalmente a que todos y todas somos conscientes de su utilidad.

En la investigación, no sólo tecnológica, sino también de tipo económico, médico o demográfico, son muy necesarias herramientas matemáticas. Pero, además, esta demanda está creciendo de forma exponencial en laboratorios y empresas de investigación médica y farmacéutica, consultoras, bancos, empresas de finanzas, comunicación y marketing, etc. Podríamos decir que prácticamente en todos los ámbitos.

Las Matemáticas te enseñan a enfrentarte a la realidad de forma lógica, a buscar la coherencia en los resultados, a utilizar símbolos que permitan una comprensión y expresión clara, y a tener capacidad de abstracción, razonamiento y generalización. Por supuesto, sin olvidar la adquisición de hábitos y técnicas de trabajo para utilizar la información con sentido crítico. Todas estas habilidades las llevamos encima, listas para aplicarlas en cualquier situación de nuestra vida personal y profesional.

Sin embargo, este cambio de paradigma también tiene también su lado negativo: Cada vez tenemos menos docentes cualificados para enseñar a nuestros estudiantes universitarios y preuniversitarios, lo que traerá problemas a medio plazo. Además, tenemos que ser capaces de poner en valor la investigación básica en matemáticas, tan necesaria o más que la aplicada, en un mundo donde la transferencia de conocimiento es tan valorada.

Desde la Real Sociedad Matemática Española, creada en 1911, estáis realizando un gran papel en la promoción y divulgación de las Matemáticas y sus aplicaciones, y el fomento de su investigación y enseñanza en todos los niveles educativos.

Por eso, es un honor para el Gobierno de Navarra daros la bienvenida a este Congreso Bienal de la Real Sociedad Matemática Española (RSME) 2024. Deseo que este encuentro que acoge la Universidad Pública de Navarra, en Pamplona, sea fructífero tanto a nivel profesional como personal, y contribuya a estrechar lazos entre investigadores e investigadoras.

Ana Burusco Juandeaburre

Directora general de Universidad del Gobierno de Navarra

PRESENTACIÓN

COMITÉS

CONFERENCIAS PLENARIAS

SESIONES ESPECIALES

SESIONES PÓSTER

MESAS REDONDAS

OTRAS ACTIVIDADES

AGRADECIMIENTOS

El Congreso Bienal de la Real Sociedad Matemática Española que tendrá lugar el próximo mes de enero en Pamplona será, una vez más, la cita más importante de la investigación matemática que se celebra de forma periódica en España, tanto por el nivel de los conferenciantes como por el elevado número de asistentes previstos.

Este evento, de referencia tanto nacional como internacional, ha sido el fruto de un incansable trabajo por parte de los miembros del Comité Organizador y del Comité Científico, a quienes agradezco personalmente tanto su dedicación como su compromiso. Asimismo, quiero agradecer a la Universidad Pública de Navarra la acogida y colaboración, así como a todos los patrocinadores, por hacer posible una semana en la que se pondrá el foco en la investigación de vanguardia en Matemáticas.

Es indudable que la Bienal brinda una valiosa oportunidad de contar con un espacio de encuentro que favorece y fortalece las relaciones interpersonales en un momento como el actual, en el que la comunicación digital es protagonista en nuestro día a día; evidentemente con sus ventajas y sus inconvenientes.

Celebramos, en este sentido, la recuperación paulatina de la cercanía personal y el tan enriquecedor cara a cara que nos permitirá compartir y debatir ideas de una forma más directa y fluida.

Para ello, este congreso cuenta con una representación de los matemáticos más relevantes en nuestro país en sus respectivas áreas de investigación, reconocidos profesionales con una sólida trayectoria investigadora.

Desde la presidencia de la Real Sociedad Matemática Española esperamos que este evento propicie un entorno óptimo para la reflexión, el análisis y el intercambio de ideas; constituyendo un estímulo para el desarrollo de las Matemáticas en nuestro país y por supuesto, fomentando la investigación de excelencia. A este respecto, estoy convencida de que la próxima Bienal de la RSME será el origen de nuevos proyectos y líneas de trabajo que darán respuesta a grandes desafíos que se plantean en nuestra disciplina.

Eva A. Gallardo Gutiérrez  
Presidenta de la Real Sociedad Matemática Española

PRESENTACIÓN

COMITÉS

CONFERENCIAS PLENARIAS

SESIONES ESPECIALES

SESIONES PÓSTER

MESAS REDONDAS

OTRAS ACTIVIDADES

AGRADECIMIENTOS



Estimados miembros de la Real Sociedad Matemática Española:

Me dirijo a ustedes, como directora del Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas de la Universidad Pública de Navarra, con el fin de expresar nuestro más sincero agradecimiento por la oportunidad de ser anfitriones del próximo Congreso Bienal de la Real Sociedad Matemática Española que se llevará a cabo en nuestra universidad.

Es un honor para nosotros poder albergar un evento de tal envergadura, que reúne a cientos de académicos, muchos de ellos considerados amigos, para compartir las últimas investigaciones en el campo de las Matemáticas. La celebración de este congreso en nuestra universidad no solo fortalecerá los lazos dentro de la comunidad académica, sino que también contribuirá al avance y la difusión del conocimiento matemático en España.

Desde el Departamento hemos estado trabajando arduamente para asegurar que este evento sea un completo éxito. Esperamos que nuestra dedicación alcance el objetivo de proporcionar un entorno acogedor y propicio para el intercambio de ideas, la colaboración y el aprendizaje mutuo.

Con la celebración de este evento, esperamos poder contribuir al progreso de las Matemáticas en España y de fomentar el desarrollo continuo de la investigación, especialmente entre las personas más jóvenes, que son el futuro del avance de nuestra disciplina.

Esperamos con entusiasmo darles una calurosa bienvenida y deseamos que el congreso sea un verdadero éxito.

Atentamente,

**María José Asiain Olo**  
Directora del Departamento de Estadística,  
Informática y Matemáticas, UPNA

PRESENTACIÓN

COMITÉS

CONFERENCIAS PLENARIAS

SESIONES ESPECIALES

SESIONES PÓSTER

MESAS REDONDAS

OTRAS ACTIVIDADES

AGRADECIMIENTOS

En nombre del Comité Organizador del Congreso Bienal de la Real Sociedad Matemática Española 2024 tengo el honor de presentar dicho evento que se celebra en Pamplona en la Universidad Pública de Navarra (UPNA) del 22 al 26 de enero de 2024.

En este encuentro se dan a conocer los últimos avances en investigación en diferentes áreas de matemáticas y se facilita el establecimiento de lazos de colaboración entre distintos grupos de investigación de nuestro país. Además de las habituales conferencias plenarias y distintas mesas redondas sobre investigación y educación en Matemáticas, el programa consta de 25 sesiones especiales y dos sesiones de pósteres.

Dicho programa científico se completa con otras actividades paralelas, entre las que destaca la actividad “Matemáticas y discapacidad intelectual”, dedicada a la enseñanza de las matemáticas para el alumnado con discapacidad intelectual. Cabe también hacer mención especial a una serie de actividades en torno a la relación entre arte y matemáticas. Por un lado, se incluye una muestra de proyectos realizados por distintos centros educativos navarros en un proyecto educativo en colaboración con el Centro de Arte Contemporáneo de Huarte, con el fin de realizar diversas acciones centradas en relacionar de manera amena y educativa las matemáticas y el arte en las aulas. Además, está programada una reflexión en torno a la figura de Oteiza y las matemáticas que comprende una conferencia junto con una visita guiada al Museo Jorge Oteiza. El programa se completa con distintas actividades como la conferencia de divulgación “Enigma”, junto con exposiciones, presentaciones de libros y variadas actividades programadas en Pamplona y alrededores.

Además, como preludeo del congreso, tuvo lugar una presentación a la sociedad navarra el martes 14 de noviembre, en el marco de la exposición “Matemáticas a pie de calle”, complementada con un ciclo de conferencias de divulgación, enmarcadas en la semana de la ciencia. En paralelo, el día 15 de noviembre se celebraron las Jornadas Doctorales tituladas “Perspectivas de la Investigación en Matemáticas”, organizadas por el Instituto de Investigación INAMAT2, BCAM y la Escuela de Doctorado de la Universidad Pública de Navarra. En el programa de dichas jornadas se incluía un debate sobre las “Perspectivas de la Investigación en Matemáticas”. Dicha mesa redonda sobre la evaluación de la investigación fue moderada por Lola Ugarte, directora de INAMAT2, y contó con la participación de la presidenta de la RSME, Eva Gallardo; la vicepresidenta del Comité Español de Matemáticas, María Jesús Carro; el expresidente del área MTM de la AEI Francisco Martín, y la directora de la División de Evaluación de Profesorado de la ANECA, Susana Quicios.

Todo este programa es fruto de un arduo trabajo por parte del comité organizador del congreso tratando de estar a la altura de la confianza depositada al elegirnos como anfitriones del Congreso Bienal RSME 2024.

**María Jesús Campión**

Presidenta del Comité Organizador RSME 2024

PRESENTACIÓN

COMITÉS

CONFERENCIAS PLENARIAS

SESIONES ESPECIALES

SESIONES PÓSTER

MESAS REDONDAS

OTRAS ACTIVIDADES

AGRADECIMIENTOS

# COMITÉS

PRESENTACIÓN

COMITÉS

CONFERENCIAS PLENARIAS

SESIONES ESPECIALES

SESIONES PÓSTER

MESAS REDONDAS

OTRAS ACTIVIDADES

AGRADECIMIENTOS

---

### COMITÉ DE HONOR

Dña. **MARÍA CHIVITE NAVASCUÉS**  
 Presidenta de la Comunidad Foral de Navarra

Dña. **CRISTINA IBARROLA GUILLÉN**  
 Alcaldesa del Ayuntamiento de Pamplona

**D. RAMÓN GONZALO GARCÍA**  
 Rector de la Universidad Pública de Navarra

Dña. **EVA ANTONIA GALLARDO GUTIÉRREZ**  
 Presidenta de la Real Sociedad Matemática Española

---

### COMITÉ CIENTÍFICO

#### Presidente:

**JUSTO PUERTO**  
 (Universidad de Sevilla)

#### Vocales:

**FELIPE CUCKER**  
 (Université de Rennes)

**UJUÉ ETAYO**  
 (Universidad de Cantabria)

**ANNA FINO**  
 (Università di Torino)

**JAVIER GÓMEZ SERRANO**  
 (Princeton University)

**ELISA GORLA**  
 (Université de Neuchâtel)

**MARÍA DOLORES MARTÍNEZ MIRANDA**  
 (Universidad de Granada)

**ANICETO MURILLO**  
 (Universidad de Málaga)

**JOAQUIM ORTEGA-CERDÁ**  
 (Universidad de Barcelona)

**DANIEL PERALTA SALAS**  
 (ICMAT – Instituto de Ciencias Matemáticas)

**MARÍA DOLORES UGARTE**  
 (Universidad Pública de Navarra)

---

### COMITÉ ORGANIZADOR

#### Presidenta:

**MARÍA JESÚS CAMPIÓN**

#### Miembros:

**ANDRÉS ARRARÁS**

**MARÍA JOSÉ ASIAIN**

**BLANCA BUJANDA**

**HUMBERTO BUSTINCE**

**LAURA DE MIGUEL**

**ASIER ESTEVAN**

**JAVIER FERNÁNDEZ**

**MARISOL GÓMEZ**

**INMACULADA HIGUERAS**

**ESTEBAN INDURÁIN**

**INMACULADA LIZASOAIN**

**JOSÉ ANTONIO MOLER**

**GUSTAVO OCHOA**

**IRENE PANIELLO**

**LAURA PORTERO**

**TEO ROLDÁN**

**MARÍA DOLORES UGARTE**

PRESENTACIÓN

COMITÉS

CONFERENCIAS PLENARIAS

SESIONES ESPECIALES

SESIONES PÓSTER

MESAS REDONDAS

OTRAS ACTIVIDADES

AGRADECIMIENTOS

# CROQUIS HORARIOS

	LUNES 22	MARTES 23	MIÉRCOLES 24	JUEVES 25	VIERNES 26	
8:30	Inscripción	Inscripción	Inscripción	Inscripción	Inscripción	
9:00	INAUGURACIÓN	PLENARIA Esteban Indurain	PLENARIA Elisenda Feliu	PLENARIA Cristina Rueda	PLENARIA David Asperó	
9:30						
10:00	PLENARIA Vicente Muñoz	PLENARIA X. Fernández	SESIÓN European Research Council	Gaceta RSME	PLENARIA Luis Narváez	
10:30		NASTAT Web escolar				
11:00	Café	P Ó S T E R	Café	Café	Café	
11:30	PLENARIA Lorenzo J. Díaz		SESIONES ESPECIALES	Café	SESIONES ESPECIALES	SESIONES ESPECIALES
12:00	PLENARIA Magdalena Rodríguez			MESA REDONDA Educación		
12:30				P Ó S T E R		
13:00	Foto					Foto
13:30			Bus comida			
14:00	COMIDA	COMIDA	COMIDA INSTITUCIONAL CONGRESO	COMIDA	COMIDA	
14:30						
15:00						
15:30						
16:00	SESIONES ESPECIALES	SESIONES ESPECIALES			SESIONES ESPECIALES	Presentación de libros
16:30					Oteiza y las matemáticas	
17:00						
17:30			Bus Comida			
18:00	Café	Café		Café		
18:30	Junta General RSME		Recepción institucional	Matemáticas y discapacidad intelectual	Matemáticas y discapacidad intelectual	
19:00					Matemáticas y discapacidad intelectual	
19:30		Eduardo Sáenz de Cabezón	MESA REDONDA Investigación		Liga Matemática	Enigma
20:00						Matemáticas y discapacidad intelectual
20:30						Visita cultural Museo Oteiza
					Sesión sobre la Olimpiada matemática en Navarra	

PRESENTACIÓN

COMITÉS

CONFERENCIAS PLENARIAS

SESIONES ESPECIALES

SESIONES PÓSTER

MESAS REDONDAS

OTRAS ACTIVIDADES

AGRADECIMIENTOS



# CONFERENCIAS PLENARIAS

## CONFERENCIAS PLENARIAS

FORCING AXIOMS AND THE SIZE OF THE CONTINUUM

DYNAMICS WITH ZERO LYAPUNOV EXPONENTS

EL PROBLEMA DE LA EQUIDISTRIBUCIÓN DE PUNTOS

SIGNS, POLYNOMIALS, AND REACTION NETWORKS

THE FRACTIONAL OBSTACLE PROBLEM

REPRESENTABILITY OF ORDERINGS ON THE REAL LINE: A SURVEY

TOPOLOGÍA DE VARIEDADES KÄHLER Y SASAKIANAS

MIDIENDO LAS SINGULARIDADES

SUPERFICIES DE FORMA ÓPTIMA

MODELOS DE ONDAS DE MÖBIUS

## FORCING AXIOMS AND THE SIZE OF THE CONTINUUM

DAVID ASPERÓ

School of Mathematics, University of East Anglia, Norwich NR4 7TJ, UK  
[d.aspero@uea.ac.uk](mailto:d.aspero@uea.ac.uk)

**Abstract:** Georg Cantor famously proved in the 1870's that there are more real numbers than natural numbers. A natural question is then "Exactly how many reals are there?  $\aleph_1$ ?  $\aleph_2$ ? Maybe more?" This is known as the Continuum Problem. This problem has been one of the most important guiding ideas throughout the history of set theory. By work of Kurt Gödel in the 1930's and of Paul Cohen in the 1960's, we know that the standard axiomatic system for set theory, namely ZFC, does not solve the Continuum Problem. On the other hand, and notwithstanding the independence results of Gödel and Cohen, there are good reasons not to take the Continuum Problem as a pseudo-problem.

In my talk I will start by hinting at the reasons not to take the independence results as the last word in this story. Building on the framework I will lay out, I will then introduce and motivate forcing axioms and will present some old, and recent, results using these axioms indicating that the Continuum Problem may have a precise answer after all. I will also mention some competing views and open questions in the area.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
9:00 – 10:00

### CONFERENCIAS PLENARIAS

FORCING AXIOMS AND THE SIZE OF THE CONTINUUM

DYNAMICS WITH ZERO LYAPUNOV EXPONENTS

EL PROBLEMA DE LA EQUIDISTRIBUCIÓN DE PUNTOS

SIGNS, POLYNOMIALS, AND REACTION NETWORKS

THE FRACTIONAL OBSTACLE PROBLEM

REPRESENTABILITY OF ORDERINGS ON THE REAL LINE: A SURVEY

TOPOLOGÍA DE VARIEDADES KÄHLER Y SASAKIANAS

MIDIENDO LAS SINGULARIDADES

SUPERFICIES DE FORMA ÓPTIMA

MODELOS DE ONDAS DE MÖBIUS

## DYNAMICS WITH ZERO LYAPUNOV EXPONENTS: FROM MATRIX COCYCLES TO PARTIAL HYPERBOLICITY

LORENZO J. DÍAZ

Departamento de Matemática, PUC-Rio, Brasil

[lodiaz@mat.puc-rio.br](mailto:lodiaz@mat.puc-rio.br)

**Abstract:** Beyond the well-studied class of uniformly hyperbolic dynamics, zero Lyapunov exponents may be unremovable and quite ubiquitous. Studying the lack of hyperbolicity (zero exponents) is difficult due to the absence of tools such as the existence of invariant manifolds provided by the Pesin theory. Ironically, there are settings where the nonhyperbolic part of dynamics can be described borrowing information from the hyperbolic one (non-zero exponents). I will explain how this can be done adopting a geometrical approach to coarsely describe different hyperbolic regimes and transitions between them. Applications include random products of  $2 \times 2$  matrix cocycles and extend to robustly transitive nonhyperbolic dynamics. A crucial part is a description of topological properties of the space of measures in the spirit of the approximation results by Sigmund (in hyperbolic settings).

### References

- [1] L. J. Díaz, K. Gelfert, M. Rams (2017). Nonhyperbolic step skew-products: ergodic approximation. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 34(6):1561–1598.
- [2] L. J. Díaz, K. Gelfert, M. Rams (2019). Entropy spectrum of Lyapunov exponents for nonhyperbolic step skew-products and elliptic cocycles. *Comm. Math. Phys.*, 367(2):351–416.
- [3] L. J. Díaz, K. Gelfert, M. Rams (2022). Variational principle for nonhyperbolic ergodic measures: skew products and elliptic cocycles. *Comm. Math. Phys.*, 394(1):73–141.
- [4] L. J. Díaz, K. Gelfert, M. Rams. Loosely Bernoulli zero exponent measures for elliptic matrix cocycles. [arxiv:2311.09351](https://arxiv.org/abs/2311.09351)
- [5] H. Furstenberg H. Kesten (1960). Products of random matrices. *Ann. Math. Stat.*, 31:457–469.
- [6] H. Furstenberg. Noncommuting random products (1963). *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108:377–428.
- [7] K. Sigmund (1974). On dynamical systems with the specification property. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 190:285–299.

LUNES, 22 DE ENERO:  
11:30 – 12:30

CONFERENCIAS PLENARIAS

FORCING AXIOMS AND THE SIZE OF THE CONTINUUM

DYNAMICS WITH ZERO LYAPUNOV EXPONENTS

EL PROBLEMA DE LA EQUIDISTRIBUCIÓN DE PUNTOS

SIGNS, POLYNOMIALS, AND REACTION NETWORKS

THE FRACTIONAL OBSTACLE PROBLEM

REPRESENTABILITY OF ORDERINGS ON THE REAL LINE: A SURVEY

TOPOLOGÍA DE VARIEDADES KÄHLER Y SASAKIANAS

MIDIENDO LAS SINGULARIDADES

SUPERFICIES DE FORMA ÓPTIMA

MODELOS DE ONDAS DE MÖBIUS



## EL PROBLEMA DE LA EQUIDISTRIBUCIÓN DE PUNTOS

UJUÉ ETAYO

Departamento de Matemáticas, estadística y computación, Universidad de Cantabria  
[etayomu@unican.es](mailto:etayomu@unican.es)

**Resumen:** En el invierno de 1611 el matemático imperial J. Kepler ofrece al emperador Rodolfo II un curioso regalo: una carta en la cual divaga sobre las diversas formas que presentan los copos de nieve, véase [2]. En esa carta Kepler presenta su famosa conjetura sobre el empaquetamiento de esferas, resuelta en [1] cuatro siglos más tarde por T. Hales.

El botánico y genetista holandés Tammes defiende su tesis doctoral *On the origin of number and arrangement of the places of exit on the surface of pollen-grains* en el año 1930. En él, aparece una nueva versión del problema del empaquetamiento óptimo, esta vez en superficies similares a la esfera de dimensión 2.

En 1963 E. Wigner recibe el premio nobel de física por “*for his contributions to the theory of the atomic nucleus and the elementary particles, particularly through the discovery and application of fundamental symmetry principles*”, según las palabras del discurso de entrega.

A lo largo de esta conferencia mostraremos la relación entre estos tres hitos en diferentes campos científicos: hablaremos de empaquetamientos óptimos, teoría del potencial y matrices aleatorias, y mostraremos la profunda conexión entre las distintas teorías.

### Referencias

- [1] T. Hales (2005). A proof of the Kepler conjecture. *Annals of Mathematics*, 162 (3), 1065-1185.
- [2] J. Kepler (1611). *Strena seu de nive sexangula*.
- [3] P. Tammes (1930). On the origin of number and arrangement of the places of exit on the surface of pollen-grains. PhD thesis.

**Agradecimientos:** Siempre he tenido la suerte de contar con estupendos coautores. De ellos he aprendido matemáticas bellas y a ellos les dedico esta conferencia.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
9:00 – 10:00

CONFERENCIAS PLENARIAS

FORCING AXIOMS AND THE SIZE OF THE CONTINUUM

DYNAMICS WITH ZERO LYAPUNOV EXPONENTS

EL PROBLEMA DE LA EQUIDISTRIBUCIÓN DE PUNTOS

SIGNS, POLYNOMIALS, AND REACTION NETWORKS

THE FRACTIONAL OBSTACLE PROBLEM

REPRESENTABILITY OF ORDERINGS ON THE REAL LINE: A SURVEY

TOPOLOGÍA DE VARIEDADES KÄHLER Y SASAKIANAS

MIDIENDO LAS SINGULARIDADES

SUPERFICIES DE FORMA ÓPTIMA

MODELOS DE ONDAS DE MÖBIUS

## SIGNS, POLYNOMIALS, AND REACTION NETWORKS

ELISENDA FELIU

Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen, Denmark

[efeliu@math.ku.dk](mailto:efeliu@math.ku.dk)

**Abstract:** This talk is centered on the development of tools within the framework of applied algebra for the analysis of mathematical models arising in the study of biochemical reaction networks. In this context, the dynamics of the concentrations of the chemical species over time are often modelled by a system of parameter-dependent ordinary differential equations, which are typically polynomial or described by rational functions. Problems such as the determination of the possible number of equilibria for varying parameters, the stability of equilibria, and the existence of bifurcation parameters, can be translated into the study of the solutions to a (huge) system of polynomial equalities and inequalities.

In my talk I will present the challenges within applied algebra of the study of solutions to polynomial systems of equalities and inequalities, and the formalism of the theory of reaction networks. Afterwards I will focus on the problem of counting equilibria by showing recent results that exploit the connection between the Newton polytope of a multivariate polynomial and the signs the polynomial attains over the positive orthant.

### CONFERENCIAS PLENARIAS

FORCING AXIOMS AND THE SIZE OF THE CONTINUUM

DYNAMICS WITH ZERO LYAPUNOV EXPONENTS

EL PROBLEMA DE LA EQUIDISTRIBUCIÓN DE PUNTOS

SIGNS, POLYNOMIALS, AND REACTION NETWORKS

THE FRACTIONAL OBSTACLE PROBLEM

REPRESENTABILITY OF ORDERINGS ON THE REAL LINE: A SURVEY

TOPOLOGÍA DE VARIEDADES KÄHLER Y SASAKIANAS

MIDIENDO LAS SINGULARIDADES

SUPERFICIES DE FORMA ÓPTIMA

MODELOS DE ONDAS DE MÖBIUS

MIÉRCOLES, 24 DE ENERO:  
9:00 – 10:00

## THE FRACTIONAL OBSTACLE PROBLEM

XAVIER FERNÁNDEZ-REAL

Institute of Mathematics, EPFL

[xavier.fernandez-real@epfl.ch](mailto:xavier.fernandez-real@epfl.ch)

**Abstract:** In this talk we present an introduction to integro-differential operators and the obstacle problem, and how they interact with each other in what is known as the *fractional obstacle problem*.

In  $\mathbb{R}^n$ , the fractional obstacle problem with a given obstacle  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  can be written as

$$\min\{(-\Delta)^s u, u - \varphi\} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

The set  $\{u = \varphi\}$  is called the *contact set*, and its boundary  $\partial\{u = \varphi\}$  is called the *free boundary*, which are unknowns of the problem. The free boundary can be divided into two sets: regular points (where it is regular) and degenerate points. In general, degenerate points can exist in any dimension.

We will finish the talk by presenting joint results with C. Torres-Latorre on the generic regularity of the free boundary. In particular, in dimension  $n = 3$  we show that the free boundary of almost every solution is formed only of regular points.

### References

- [1] X. Fernández-Real, X. Ros-Oton (2021). Free boundary regularity for almost every solution to the Signorini problem, Arch. Ration. Mech. Anal. 240, 419-466.
- [2] X. Fernández-Real, C. Torres-Latorre (2023). Generic regularity of free boundaries for the thin obstacle problem, Adv. Math. 433, 109323.

MARTES, 23 DE ENERO:  
10:00 – 11:00

#### CONFERENCIAS PLENARIAS

FORCING AXIOMS AND THE SIZE OF THE CONTINUUM

DYNAMICS WITH ZERO LYAPUNOV EXPONENTS

EL PROBLEMA DE LA EQUIDISTRIBUCIÓN DE PUNTOS

SIGNS, POLYNOMIALS, AND REACTION NETWORKS

THE FRACTIONAL OBSTACLE PROBLEM

REPRESENTABILITY OF ORDERINGS ON THE REAL LINE: A SURVEY

TOPOLOGÍA DE VARIEDADES KÄHLER Y SASAKIANAS

MIDIENDO LAS SINGULARIDADES

SUPERFICIES DE FORMA ÓPTIMA

MODELOS DE ONDAS DE MÖBIUS

## REPRESENTABILITY OF ORDERINGS ON THE REAL LINE: A SURVEY

ESTEBAN INDURÁIN

InaMat<sup>2</sup> (Institute for Advanced Materials and Mathematics) and Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas. Universidad Pública de Navarra. 31006 Pamplona (SPAIN).

[steiner@unavarra.es](mailto:steiner@unavarra.es)

**Abstract:** Can any qualitative scale be converted into an (equivalent) quantitative one? We will introduce here a survey of results concerning the representability of different kind of orderings (qualitative scales, preferences, etc.) into quantitative or numerical ones. From the point of view of Real Analysis, this will correspond to a deep understanding of the axioms of the real line that are related to order. For instance, we may wonder which totally ordered sets  $(X, \preceq)$  are order-isomorphic to a subset of  $\mathbb{R}$  (endowed with the usual order  $\leq$ ). Apart from total orders, we will pay attention to some other classical ordered structures as complete preorders, interval orders and semiorders, commenting the key results about their numerical representability, that have been obtained in recent past years. Miscellaneous applications (e.g. utility functions in Economics) will also been discussed.

### References

- [1] Beardon A.F., Candeal J.C., Herden G., Induráin E., Mehta G.B.: The non-existence of a utility function and the structure of non-representable preference relations. *Journal of Mathematical Economics* 37, 17-38 (2002).
- [2] Bridges D.S., Mehta G.B.: *Representations of Preference Orderings*, Springer Verlag, Berlin, 1995.
- [3] Debreu G.: Continuity properties of Paretian utility. *International Economic Review* 5, 285-293 (1964).
- [4] Mehta G.B.: Preference and utility. In: Barberà S., Hammond P., Seidl C. (eds) *Handbook of utility theory*, vol. 1. Kluwer Academic Publishers pp. 1-47.

**Acknowledgement** This work has been partially supported by the research project whose reference is PID2022-1366274NB-I00 from the Ministry of Science and Innovation of Spain.

MARTES, 23 DE ENERO:  
9:00 – 10:00

CONFERENCIAS PLENARIAS

FORCING AXIOMS AND THE SIZE OF THE CONTINUUM

DYNAMICS WITH ZERO LYAPUNOV EXPONENTS

EL PROBLEMA DE LA EQUIDISTRIBUCIÓN DE PUNTOS

SIGNS, POLYNOMIALS, AND REACTION NETWORKS

THE FRACTIONAL OBSTACLE PROBLEM

REPRESENTABILITY OF ORDERINGS ON THE REAL LINE: A SURVEY

TOPOLOGÍA DE VARIEDADES KÄHLER Y SASAKIANAS

MIDIENDO LAS SINGULARIDADES

SUPERFICIES DE FORMA ÓPTIMA

MODELOS DE ONDAS DE MÖBIUS

## TOPOLOGÍA DE VARIEDADES KÄHLER Y SASAKIANAS

VICENTE MUÑOZ

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad Complutense de Madrid  
[vicente.munoz@ucm.es](mailto:vicente.munoz@ucm.es)

**Resumen:** Las variedades Kähler aparecen de forma natural tanto en Geometría Algebraica (variedades complejas proyectivas) como en Geometría Diferencial (variedades riemannianas con holonomía  $U(n)$ ). El problema de determinar cuando una variedad diferenciable admite una estructura Kähler es central. En particular distinguir variedades que admiten estructuras ligeramente más débiles, tales como complejas o simplécticas, de variedades Kähler. Una nutrida colección de propiedades topológicas que verifican las variedades Kähler junto con diversas construcciones de variedades simplécticas, nos permiten encontrar ejemplos en distintas dimensiones [1, 5].

En dimensión impar, las variedades Sasakianas son análogos naturales de las variedades Kähler. Esta estructura se debilita a la estructura de contacto, en varios niveles, siendo las variedades de K-contacto las más cercanas a las Sasakianas. Es un problema importante el encontrar obstrucciones para que una variedad compacta admita dichos tipos de estructuras y, en particular, construir variedades de K-contacto que no admitan estructuras Sasakianas. En dimensión 7 y superior, podemos utilizar propiedades de homotopía racional, notablemente la formalidad, para construir ejemplos de esta índole.

En el caso de variedades simplemente conexas de dimensión 5 (variedades de Barden-Smale), el problema es especialmente interesante y ha resistido al no ser resuelto con las técnicas disponibles. Aparece propuesto por Boyer-Galicki en su famoso tratado [2]. Para estudiarlo, las 5-variedades de K-contacto se traducen a la construcción de 4-órbifolds cíclicos simplécticos que contienen  $b_2$  superficies simplécticas disjuntas de género  $g > 0$  y que generan la homología, mientras que las 5-variedades Sasakianas se traducen en superficies algebraicas con singularidades cíclicas que contienen  $b_2$  curvas complejas disjuntas de género  $g > 0$ .

Ya el caso de 4-variedades (sin puntos singulares) es sutil en el terreno simpléctico. Daremos un par de construcciones de 4-variedades simplécticas con  $b_1 = 0$  y con  $b_2$  superficies simplécticas disjuntas de género  $g > 0$  [3, 7]. En el caso de superficies algebraicas (4-variedades Kähler), este fenómeno parece imposible (excepto por los

LUNES, 22 DE ENERO:  
10:00 – 11:00

### CONFERENCIAS PLENARIAS

FORCING AXIOMS AND THE SIZE OF THE CONTINUUM

DYNAMICS WITH ZERO LYAPUNOV EXPONENTS

EL PROBLEMA DE LA EQUIDISTRIBUCIÓN DE PUNTOS

SIGNS, POLYNOMIALS, AND REACTION NETWORKS

THE FRACTIONAL OBSTACLE PROBLEM

REPRESENTABILITY OF ORDERINGS ON THE REAL LINE: A SURVEY

TOPOLOGÍA DE VARIEDADES KÄHLER Y SASAKIANAS

MIDIENDO LAS SINGULARIDADES

SUPERFICIES DE FORMA ÓPTIMA

MODELOS DE ONDAS DE MÖBIUS

planos proyectivos fake). Conseguiamos resolver algunos casos de esta conjetura para género pequeño [3, 7]. El estudio de 4-órbitos se vuelve más delicado, pues la conjetura algebraica resulta ser falsa [4]. Será necesario sofisticar la construcción simpléctica para traducir el número de Betti  $b_2^+$  a través de la existencia de curvas complejas disjuntas. Damos el primer ejemplo de una 5-variedad simplemente conexa que admite una estructura de K-contacto pero no admite ninguna estructura Sasakiana [6], resolviendo finalmente la pregunta de [2].

## Referencias

- [1] G. Bazzoni, M. Fernández, V. Muñoz (2018). A 6-dimensional simply connected complex and symplectic manifold with no Kähler metric, *Jour. Symplectic Geom.* 16, 1001-1020.
- [2] C. Boyer, K. Galicki, *Sasakian Geometry*, Oxford Univ. Press, 2007
- [3] A. Cañas, V. Muñoz, J. Rojo, A. Viruel (2021). A K-contact simply connected 5-manifold with no semi-regular Sasakian structure, *Publ. Math.* 65, 615-651.
- [4] A. Cañas, V. Muñoz, M. Schütt, A. Tralle (2022). Quasi-regular Sasakian and K-contact structures on Smale-Barden manifolds, *Revista Mat. Iberoam.* 38, 1029-1050.
- [5] M. Fernández, V. Muñoz (2008). An 8-dimensional non-formal simply connected symplectic manifold, *Annals Math (2)* 167, 1045-1054.
- [6] V. Muñoz, A Smale-Barden manifold admitting K-contact but not Sasakian structure, *J. Eur. Math. Soc.*, to appear.
- [7] V. Muñoz, J.A. Rojo, A. Tralle, Homology Smale-Barden manifolds with K-contact and Sasakian structures, *Internat. Math. Research Notices* 2020, No. 21, 7397-7432.

### CONFERENCIAS PLENARIAS

FORCING AXIOMS AND THE SIZE OF THE CONTINUUM

DYNAMICS WITH ZERO LYAPUNOV EXPONENTS

EL PROBLEMA DE LA EQUIDISTRIBUCIÓN DE PUNTOS

SIGNS, POLYNOMIALS, AND REACTION NETWORKS

THE FRACTIONAL OBSTACLE PROBLEM

REPRESENTABILITY OF ORDERINGS ON THE REAL LINE: A SURVEY

TOPOLOGÍA DE VARIEDADES KÄHLER Y SASAKIANAS

MIDIENDO LAS SINGULARIDADES

SUPERFICIES DE FORMA ÓPTIMA

MODELOS DE ONDAS DE MÖBIUS

## MIDIENDO LAS SINGULARIDADES

LUIS NARVÁEZ MACARRO

Universidad de Sevilla

[narvaez@us.es](mailto:narvaez@us.es)

**Resumen:** La primera propiedad distintiva que nos aparece en el estudio local de las variedades algebraicas o analíticas es la de *punto singular*, o simplemente *singularidad*. Como es norma en Matemáticas, se nos plantea enseguida el correspondiente problema de clasificación. Para tal fin, nos interesa definir invariantes que de alguna manera midan la complejidad de nuestras singularidades. En esta conferencia nos centraremos en el caso de las hipersuperficies y expondremos de una manera introductoria algunos invariantes de naturaleza diferencial –en el sentido de que en su construcción intervienen anillos de operadores diferenciales–, y muy particularmente el denominado *polinomio de Bernstein–Sato*, o *b-función*, cuyo origen se encuentra en un famoso problema de los años 1950: la división de las distribuciones. En la última parte de la conferencia comentaremos algunas contribuciones del autor en esta teoría.

### CONFERENCIAS PLENARIAS

FORCING AXIOMS AND THE SIZE OF THE CONTINUUM

DYNAMICS WITH ZERO LYAPUNOV EXPONENTS

EL PROBLEMA DE LA EQUIDISTRIBUCIÓN DE PUNTOS

SIGNS, POLYNOMIALS, AND REACTION NETWORKS

THE FRACTIONAL OBSTACLE PROBLEM

REPRESENTABILITY OF ORDERINGS ON THE REAL LINE: A SURVEY

TOPOLOGÍA DE VARIEDADES KÄHLER Y SASAKIANAS

MIDIENDO LAS SINGULARIDADES

SUPERFICIES DE FORMA ÓPTIMA

MODELOS DE ONDAS DE MÖBIUS

VIERNES, 26 DE ENERO:  
10:00 – 11:00

## SUPERFICIES DE FORMA ÓPTIMA

MAGDALENA RODRÍGUEZ PÉREZ

Departamento de Geometría y Topología / Instituto de Matemáticas IMAG, Universidad de Granada  
[magdarp@ugr.es](mailto:magdarp@ugr.es)

**Resumen:** Las superficies que minimizan algún tipo de funcional de energía aparecen de forma natural en diferentes áreas. Este es el caso particular de las superficies mínimas, que son puntos críticos para el funcional área. La curvatura media de una superficie está estrechamente relacionada con la tensión superficial de las interfaces de separación entre fluidos en equilibrio. Por tanto, las superficies mínimas (es decir, aquellas con curvatura media constantemente nula) aparecen de forma natural en campos aparentemente distintos como Física, Química, Ciencia de Materiales, Biología o Arquitectura, entre otros. La teoría de superficies mínimas se encuentra en la intersección entre el Cálculo de Variaciones, la teoría de EDP elípticas, la Teoría Geométrica de la Medida y el Análisis Complejo, por lo que usa herramientas potentes de todas estas ramas.

Las superficies mínimas de  $\mathbb{R}^3$  mejor conocidas son aquellas con curvatura total finita, ya que un teorema de Huber [5, 10] nos dice que son conformemente equivalentes a una superficies de Riemann compacta menos una cantidad finita de puntos, que se corresponden con los finales de la superficie. Además, se conoce el comportamiento asintótico de los finales de una tal superficie [14]: o bien son asintóticos a planos o bien a medias catenoides. Presentaremos algunos ejemplos de tales superficies, así como los resultados de clasificación conocidos y problemas aún abiertos.

Aunque el origen de la teoría de superficies mínimas se remonta al siglo XVIII, en los orígenes del Cálculo de Variaciones, es un campo de estudio aún muy activo y ha motivado la emergente teoría de superficies mínimas en entornos más generales. En este sentido, una de las teorías más conocidas es la de superficies mínimas en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  (el espacio producto del plano hiperbólico y la recta real). En este espacio ambiente se han construido numerosos ejemplos de superficies mínimas en los últimos años, como por ejemplo en [9, 13, 1, 7, 8, 12, 11, 6], y se han estudiado los ejemplos con curvatura (intrínseca) total finita: se sigue cumpliendo el teorema de Huber, pero ahora los finales son asintóticos a poligonales geodésicas contenidas en el cilindro en infinito [4, 3, 2]. Explicaremos las similitudes y las diferencias de esta teoría con la correspondiente en  $\mathbb{R}^3$  y expondremos algunos resultados de clasificación obtenidos. Finalmente, presentaremos algunas aplicaciones a Arquitectura de la teoría de superficies mínimas en la que estamos trabajando recientemente.

LUNES, 22 DE ENERO:  
12:30 – 13:30

### CONFERENCIAS PLENARIAS

FORCING AXIOMS AND THE SIZE OF THE CONTINUUM

DYNAMICS WITH ZERO LYAPUNOV EXPONENTS

EL PROBLEMA DE LA EQUIDISTRIBUCIÓN DE PUNTOS

SIGNS, POLYNOMIALS, AND REACTION NETWORKS

THE FRACTIONAL OBSTACLE PROBLEM

REPRESENTABILITY OF ORDERINGS ON THE REAL LINE: A SURVEY

TOPOLOGÍA DE VARIEDADES KÄHLER Y SASAKIANAS

MIDIENDO LAS SINGULARIDADES

SUPERFICIES DE FORMA ÓPTIMA

MODELOS DE ONDAS DE MÖBIUS



## Referencias

- [1] P. Collin, H. Rosenberg (2010). Construction of harmonic diffeomorphisms and minimal graphs. *Ann. of Math.*, 172, 1879–1906.
- [2] L. Hauswirth, A. Menezes, M. Rodríguez (2019). On the characterization of minimal surfaces with finite total curvature in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  and  $\widetilde{\text{PSL}}_2(\mathbb{R})$ . *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 58, 80.
- [3] L. Hauswirth, B. Nelli, R. Sa Earp, E. Toubiana (2015). Minimal ends in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  with finite total curvature and a Schoen type theorem. *Advances in Mathematics*, 274, 199-240.
- [4] L. Hauswirth, H. Rosenberg (2006). Minimal surfaces of finite total curvature in  $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$ . *Mat. Contemp.*, 31, 65-80.
- [5] A. Huber (1957). On Subharmonic Functions and Differential Geometry in the Large. *Comment. Math. Helvetic*, 32, 181-206.
- [6] F. Martín, R. Mazzeo, M. Rodríguez (2014). Minimal surfaces with positive genus and finite total curvature in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *Geom. Topol.*, 18, 141-177.
- [7] L. Mazet, M. Rodríguez, H. Rosenberg (2011). The Dirichlet problem for the minimal surface equation –with possible infinite boundary data– over domains in a Riemannian surface. *Proc. London Math. Soc.*, 102, 985-1023.
- [8] F. Morabito, M. Rodríguez (2012). Saddle towers and minimal  $k$ -noids in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *J. Inst. Math. Jussieu*, 11, 333-349.
- [9] B. Nelli, H. Rosenberg (2002). Minimal surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *Bull. Braz. Math. Soc.*, 33, 263-292.
- [10] R. Osserman (1986). *A survey of minimal surfaces*, 2nd ed. Dover Publications, New York.
- [11] J. Pyo, M. Rodríguez (2014). Simply-connected minimal surfaces with finite total curvature in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *Int. Math. Res. Notices*, 2014, 2944-2954.
- [12] M. Rodríguez (2013). Minimal surfaces with limit ends in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *J. Reine Ang. Math. (Crelle's Journal)*, 685, 123-141.
- [13] R. Sa Earp, E. Toubiana (2005). Screw motion surfaces in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *Illinois J. Math.*, 49, 1323-1362.
- [14] R. Schoen (1983). Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces. *J. Diff. Geom.*, 18, 791-809.

**Agradecimientos:** Financiado parcialmente por los proyectos IMAG–Maria de Maeztu CEX2020-001105-M / AEI / 10.13039/501100011033 y PID2020-117868GB-I00.

CONFERENCIAS PLENARIAS

FORCING AXIOMS AND THE SIZE OF THE CONTINUUM

DYNAMICS WITH ZERO LYAPUNOV EXPONENTS

EL PROBLEMA DE LA EQUIDISTRIBUCIÓN DE PUNTOS

SIGNS, POLYNOMIALS, AND REACTION NETWORKS

THE FRACTIONAL OBSTACLE PROBLEM

REPRESENTABILITY OF ORDERINGS ON THE REAL LINE: A SURVEY

TOPOLOGÍA DE VARIEDADES KÄHLER Y SASAKIANAS

MIDIENDO LAS SINGULARIDADES

SUPERFICIES DE FORMA ÓPTIMA

MODELOS DE ONDAS DE MÖBIUS

## MODELOS DE ONDAS DE MÖBIUS: LA EXTENSIÓN DE FOURIER CON FASCINANTES APLICACIONES EN BIOMEDICINA

CRISTINA RUEDA SABATER

Departamento de Estadística e I.O., Universidad de Valladolid

[cristina.rueda@uva.es](mailto:cristina.rueda@uva.es)

**Resumen:** Las señales oscilatorias surgen en diversos contextos, siendo su relevancia especialmente destacada en el ámbito de la biomedicina. La modelización de estas señales requiere enfoques matemáticos y estadísticos específicos. El enfoque FMM (Frequency Modulated Möbius) se presenta como una potente alternativa capaz de descomponer las señales en ondas de Möbius, compitiendo con las descomposiciones de Fourier y otras bases de ondículas. El enfoque FMM ha sido desarrollado muy recientemente y aún es relativamente desconocido, sin embargo ha demostrado su eficiencia al resolver una variedad de problemas relacionados con el análisis de señales reales en ámbitos muy diversos. Algunos de estos problemas, como la descomposición de la señal en componentes y sus múltiples aplicaciones, son de alcance general, mientras que otros son más específicos.

Entre las aplicaciones más fascinantes destaca el análisis de señales multivariantes de electrocardiogramas. Estas señales, adquiridas a través de un procedimiento rápido, fácil y no invasivo, registran la actividad eléctrica del corazón y tienen un uso muy extendido como herramientas de diagnóstico, ya que cualquier irregularidad en estas mediciones podría señalar una posible anomalía cardíaca. Sin embargo, interpretar estas señales es una tarea exigente, incluso para médicos especialistas. El modelo FMM<sub>ecg</sub> aborda este reto al descomponer, identificar y caracterizar de manera individual, las cinco ondas fundamentales de un latido cardíaco, que corresponden a los picos y valles prominentes de los trazados de los electrocardiogramas. Lo logra generando parámetros que describen la forma de onda de un latido, de manera análoga a la evaluación manual de un médico. Los resultados diagnósticos se calculan automáticamente a partir de estos datos.

En esta presentación, exploraremos la breve historia del FMM, abordaremos sus propiedades matemáticas y estadísticas, así como su interpretación fisiológica. También presentaremos ejemplos concretos de diversas aplicaciones, destacando la versatilidad y utilidad del enfoque FMM en contextos prácticos. Finalmente, esbozaremos el futuro prometedor que aún le aguarda, resaltando las posibles innovaciones y avances que podrían surgir a partir de este atractivo paradigma.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
10:00 – 11:00

### CONFERENCIAS PLENARIAS

FORCING AXIOMS AND THE SIZE OF THE CONTINUUM

DYNAMICS WITH ZERO LYAPUNOV EXPONENTS

EL PROBLEMA DE LA EQUIDISTRIBUCIÓN DE PUNTOS

SIGNS, POLYNOMIALS, AND REACTION NETWORKS

THE FRACTIONAL OBSTACLE PROBLEM

REPRESENTABILITY OF ORDERINGS ON THE REAL LINE: A SURVEY

TOPOLOGÍA DE VARIEDADES KÄHLER Y SASAKIANAS

MIDIENDO LAS SINGULARIDADES

SUPERFICIES DE FORMA ÓPTIMA

MODELOS DE ONDAS DE MÖBIUS

## Referencias

- [1] C. Rueda, Y. Larriba, and A., Lamela (2021). The hidden waves in the ECG uncovered revealing a sound automated interpretation method. Scientific reports, 11(1), 3724.
- [2] C. Rueda, A., Rodríguez-Collado, and Y. Larriba (2021). A Novel Wave Decomposition for Oscillatory Signals. IEEE Transactions on Signal Processing, 69, 960-972.
- [3] C. Rueda, A., Rodríguez-Collado, I, Fernández, C., Canedo, D., Uguarte, M.D. and Y. Larriba (2022). A Unique Cardiac Electrocardiographic 3D Model. Towards Interpretable AI Diagnosis. IScience, 25(12).
- [4] C. Rueda, C., Canedo, Y., Larriba, and I., Fernández, I. (2023) Functional data analysis with Möbius waves and applications to biorhythms. preprint.

### CONFERENCIAS PLENARIAS

FORCING AXIOMS AND THE SIZE OF THE CONTINUUM

DYNAMICS WITH ZERO LYAPUNOV EXPONENTS

EL PROBLEMA DE LA EQUIDISTRIBUCIÓN DE PUNTOS

SIGNS, POLYNOMIALS, AND REACTION NETWORKS

THE FRACTIONAL OBSTACLE PROBLEM

REPRESENTABILITY OF ORDERINGS ON THE REAL LINE: A SURVEY

TOPOLOGÍA DE VARIEDADES KÄHLER Y SASAKIANAS

MIDIENDO LAS SINGULARIDADES

SUPERFICIES DE FORMA ÓPTIMA

MODELOS DE ONDAS DE MÖBIUS



# SESIONES ESPECIALES

SESIÓN ESPECIAL 1  
Análisis Funcional

SESIÓN ESPECIAL 2  
Polinomios ortogonales, funciones especiales  
y aplicaciones

SESIÓN ESPECIAL 3  
Álgebras no Asociativas

SESIÓN ESPECIAL 4  
Matemática Discreta y Algorítmica

SESIÓN ESPECIAL 5  
Recent developments on Convexity

SESIÓN ESPECIAL 6  
Red de Geometría Algebraica y Singularidades

SESIÓN ESPECIAL 7  
Sesión especial de la red MATS: Criptografía

SESIÓN ESPECIAL 8  
Teoría de números

SESIÓN ESPECIAL 9  
Álgebra Computacional y Aplicaciones

SESIÓN ESPECIAL 10  
Red Española de Topología

SESIÓN ESPECIAL 11  
Análisis Geométrico

SESIÓN ESPECIAL 12  
Geometría Diferencial y Teoría de Subvariedades

SESIÓN ESPECIAL 13  
Advanced methods for differential problems  
and their applications

SESIÓN ESPECIAL 14  
Métodos numéricos para la resolución de  
problemas no lineales

SESIÓN ESPECIAL 15  
Numerical Methods and Computational  
Mathematics

SESIÓN ESPECIAL 16  
Geometría Algebraica entre Aplicaciones y  
Computación

SESIÓN ESPECIAL 17  
Desarrollo Matemático en Inteligencia  
Artificial y Machine Learning

SESIÓN ESPECIAL 18  
Sesión especial de la red MATS:  
Teoría de Códigos

SESIÓN ESPECIAL 19  
Resolución numérica de ecuaciones en  
derivadas parciales y aplicaciones

SESIÓN ESPECIAL 20  
Diseño óptimo de experimentos

SESIÓN ESPECIAL 21  
Advanced numerical techniques for the  
solution of differential problems

SESIÓN ESPECIAL 22  
Fair & Trustworthy Machine Learning

SESIÓN ESPECIAL 23  
Mathematical Optimization:  
Methods and Applications

SESIÓN ESPECIAL 24  
New trends in Linear Algebra and Matrix  
Analysis

SESIÓN ESPECIAL 25  
New trends and perspectives in fluid dynamics

## SESIÓN ESPECIAL 1

### Análisis Funcional

#### Organizadores:

FERNANDO ALBIAC  
 (Universidad Pública de Navarra)

JOSÉ LUIS ANSORENA  
 (Universidad de La Rioja)

#### Descripción:

El análisis funcional proporcionó desde su introducción a principios del siglo XX un marco abstracto idóneo para situar y estudiar, con herramientas específicas muy poderosas, distintas ramas de las matemáticas puras y aplicadas que en principio parecían totalmente inconexas tales como el análisis real, las ecuaciones diferenciales, la topología, la teoría de las probabilidades, la teoría de conjuntos, etc. Aparte de interesante y bonita, la teoría de los espacios de Banach es también útil, de modo que a alguien que esté interesado en análisis armónico, funciones de variable compleja, series ortonormales, teoría de aproximación o teoría de probabilidades, le puede ser útil la teoría de espacios de Banach. Al mismo tiempo, el análisis funcional proporciona un lenguaje y unas herramientas específicas que permiten su aplicabilidad a diversos campos de la física y la ingeniería. Lejos de ser una teoría caduca, un siglo después de su nacimiento, el análisis funcional sigue despertando el interés de muchos matemáticos, se abren nuevos problemas y, como consecuencia, la teoría general se enriquece con nuevas técnicas y perspectivas que hacen de la teoría de los espacios de Banach una de las más vitales y elegantes. El análisis funcional está muy enraizado en el panorama investigador en matemáticas de la universidad española. Mientras el interés y la inversión en proyectos de matemáticas en Estados Unidos y Europa parece dirigirse hacia otras áreas, España es uno de los países donde el análisis funcional goza de mejor salud y proyección. Si bien, tradicionalmente, la evolución del análisis funcional se vertebraba en torno a líderes regionales especializados en diferentes aspectos del mismo (análisis convexo, espacios de funciones, estructura lineal, geometría no lineal, conexiones con EDPs y análisis armónico, etc.) las nuevas generaciones de analistas han bebido de fuentes extranjeras y enriquecido el panorama nacional con la implementación de métodos nuevos y la aparición de nuevas ramificaciones que mantienen la teoría en continuo crecimiento e innovación. Por todo ello creemos que la celebración del Congreso de la RSME en la UPNA es una buena oportunidad para organizar una sesión dedicada al análisis funcional que reúna a algunos de los representantes más significativos de las nuevas generaciones y corrientes de analistas funcionales de las distintas universidades españolas. Con un programa de ponentes suficientemente atractivo y diverso se trata de convocar al mayor número posible de expertos, fomentar la interacción presencial entre los participantes de la sesión, y discutir tanto los avances en la teoría como los retos con que se enfrenta en el futuro.

#### SESIÓN ESPECIAL 1

##### Análisis Funcional

BASIC SEQUENCES IN BANACH LATTICES

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LA NORMA EN DUALES SUCESIVOS

ENCAJES INDUCIDOS POR BASES ALMOST GREEDY

GEOMETRY OF SETS AND FIXED-POINT THEOREMS

PROPERTY (A) VERSUS 1-UNCONDITIONALITY

QUASICOMPLEMENTED SUBSPACES OF BANACH SPACES AND WEAK\*-BASIC SEQUENCES

THE FINITE HILBERT TRANSFORM ACTING ON THE ZYGMUND SPACE  $LLOG$

SUBESPACIOS LIPSCHITZ DE  $C(K)$

BOUNDED ANALYTIC FUNCTIONS IN THE BALL OF  $CN$  WHICH ATTAIN THEIR NORM ON THE PREDUAL

A BILINEAR APPROACH TO EXT2 IN BANACH SPACES

ORBIT SPACES BY THE GROUP OF ISOMETRIES OF A BANACH SPACE

SOBRE PROPIEDADES DE APROXIMACIÓN NO LINEALES Y UN PROBLEMA DE GODEFROY Y OZAWA

## Basic sequences in Banach lattices

PEDRO TRADACETE

Instituto de Ciencias Matemáticas, Consejo Superior de Investigaciones Científicas  
[pedro.tradacete@icmat.es](mailto:pedro.tradacete@icmat.es)

**Abstract:** Given a basic sequence in a Banach lattice we look at the sequence given by its absolute values. Although simple examples show this sequence need not be in general basic, we will study the canonical situation given by free Banach lattices generated by a Banach space. We will also talk about the different types of basic sequences that arise induced by the different modes of convergence available in a Banach lattice.

### Referencias

- [1] A. Avilés, J. Rodríguez, P. Tradacete (2018). The free Banach lattice generated by a Banach space. *J. Funct. Anal.* 274, no. 10, 2955-2977.
- [2] T. Oikhberg, M. A. Taylor, P. Tradacete, V. G. Troitsky (2022+). Free Banach lattices. <https://arxiv.org/pdf/2210.00614>
- [3] M. A. Taylor, V. G. Troitsky, Bibasic sequences in Banach lattices (2020). *J. Funct. Anal.* 278, No. 10, Article ID 108448.

SESIÓN ESPECIAL 1  
Análisis Funcional

BASIC SEQUENCES IN BANACH LATTICES

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LA NORMA EN DUALES SUCESIVOS

ENCAJES INDUCIDOS POR BASES ALMOST GREEDY

GEOMETRY OF SETS AND FIXED-POINT THEOREMS

PROPERTY (A) VERSUS 1-UNCONDITIONALITY

QUASICOMPLEMENTED SUBSPACES OF BANACH SPACES AND WEAK\*-BASIC SEQUENCES

THE FINITE HILBERT TRANSFORM ACTING ON THE ZYGMUND SPACE  $LLOGL$

SUBESPACIOS LIPSCHITZ DE  $C(K)$

BOUNDED ANALYTIC FUNCTIONS IN THE BALL OF  $CN$  WHICH ATTAIN THEIR NORM ON THE PREDUAL

A BILINEAR APPROACH TO EXT2 IN BANACH SPACES

ORBIT SPACES BY THE GROUP OF ISOMETRIES OF A BANACH SPACE

SOBRE PROPIEDADES DE APROXIMACIÓN NO LINEALES Y UN PROBLEMA DE GODEFROY Y OZAWA

LUNES, 22 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

## Propiedades geométricas de la norma en duales sucesivos

ANTONIO AVILÉS, GONZALO MARTÍNEZ CERVANTES, ABRAHAM RUEDA ZOCA

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

[avileslo@um.es](mailto:avileslo@um.es)

**Resumen:** Presentaremos varios resultados sobre cómo ciertas propiedades geométricas de la norma de un espacio de Banach, relacionadas con la existencia de copias de  $\ell_1$  o de  $c_0$  en el espacio, pueden traducirse en la existencia de elementos singulares en el doble o cuádruple dual pero solo bajo ciertos axiomas.

### Referencias

- [1] A. Avilés, G. Martínez-Cervantes, A. Rueda Zoca (2023).  $L$ -orthogonal elements and  $L$ -orthogonal sequences. *Int. Math. Res. Not.*, 11, 9128-9154.
- [2] A. Avilés, G. Martínez-Cervantes, A. Rueda Zoca (2022). Banach spaces containing  $c_0$  and elements in the fourth dual. *J. Math. Anal. Appl.*, 508.
- [3] A. Avilés, G. Martínez-Cervantes, A. Rueda Zoca (2023). A renorming characterisation of Banach spaces containing  $l_1(\mathcal{X})$ . *Publ. Mat., Barc.*, 67, 601-609.

**Agradecimientos:** Apoyado por el proyecto PID2021-122126NB-C32 de la AEI y el proyecto 21955/PI/22 de la Fundación Séneca – ACyT Región de Murcia.

LUNES, 22 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 1  
Análisis Funcional

BASIC SEQUENCES IN BANACH  
LATTICES

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LA  
NORMA EN DUALES SUCESIVOS

ENCAJES INDUCIDOS POR BASES  
ALMOST GREEDY

GEOMETRY OF SETS AND  
FIXED-POINT THEOREMS

PROPERTY (A) VERSUS  
1-UNCONDITIONALITY

QUASICOMPLEMENTED SUBSPACES  
OF BANACH SPACES AND WEAK\*-  
BASIC SEQUENCES

THE FINITE HILBERT TRANSFORM  
ACTING ON THE ZYGMUND SPACE  
LLOGL

SUBESPACIOS LIPSCHITZ DE  $C(K)$

BOUNDED ANALYTIC FUNCTIONS IN  
THE BALL OF  $CN$  WHICH ATTAIN THEIR  
NORM ON THE PREDUAL

A BILINEAR APPROACH TO EXT2 IN  
BANACH SPACES

ORBIT SPACES BY THE GROUP OF  
ISOMETRIES OF A BANACH SPACE

SOBRE PROPIEDADES DE  
APROXIMACIÓN NO LINEALES Y UN  
PROBLEMA DE GODEFROY Y OZAWA

## Encajes inducidos por bases almost greedy

GLENIER BELLO, JOSÉ LUIS ANSORENA, PRZEMYSŁAW WOJTASZCZYK

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza

[gbello@unizar.es](mailto:gbello@unizar.es)

**Resumen:** Dado un espacio de sucesiones  $\mathbb{S}$  y un espacio quasi-Banach  $\mathbb{X}$ , diremos que  $\mathbb{S}$  se encaja en  $\mathbb{X}$  vía una base  $(x_n)_{n=1}^\infty$  de  $\mathbb{X}$  si la transformación  $(a_n)_{n=1}^\infty \mapsto \sum_{n=1}^\infty a_n x_n$  define un operador acotado de  $\mathbb{S}$  en  $\mathbb{X}$ , y diremos que  $\mathbb{X}$  se encaja en  $\mathbb{S}$  (vía  $(x_n)_{n=1}^\infty$ ) si la transformación  $f \mapsto (x_n^*(f))_{n=1}^\infty$  define un operador acotado de  $\mathbb{X}$  en  $\mathbb{S}$ . Tras un breve repaso de distintos tipos de bases en espacios quasi-Banach, encajes y aproximación greedy, veremos que las bases almost greedy inducen encajes muy finos para espacios de Banach super-reflexivos. De manera más precisa, veremos que en este caso podemos “emparejar” a  $\mathbb{X}$  entre dos espacios de sucesiones de Lorentz super-reflexivos muy próximos entre sí, en el sentido de que ambos tienen la misma función fundamental. Terminaremos la charla dando alguna consecuencia de este hecho y planteando varios problemas abiertos.

### Referencias

- [1] J. L. Ansorena, G. Bello, P. Wojtaszczyk (2023). Lorentz spaces and embeddings induced by almost greedy bases in superreflexive Banach spaces. *Israel Journal of Mathematics*, 255, 621-644.

LUNES, 22 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 1  
Análisis Funcional

BASIC SEQUENCES IN BANACH  
LATTICES

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LA  
NORMA EN DUALES SUCESIVOS

ENCAJES INDUCIDOS POR BASES  
ALMOST GREEDY

GEOMETRY OF SETS AND  
FIXED-POINT THEOREMS

PROPERTY (A) VERSUS  
1-UNCONDITIONALITY

QUASICOMPLEMENTED SUBSPACES  
OF BANACH SPACES AND WEAK\*-  
BASIC SEQUENCES

THE FINITE HILBERT TRANSFORM  
ACTING ON THE ZYGMUND SPACE  
LLOGL

SUBESPACIOS LIPSCHITZ DE  $C(K)$

BOUNDED ANALYTIC FUNCTIONS IN  
THE BALL OF  $C_N$  WHICH ATTAIN THEIR  
NORM ON THE PREDUAL

A BILINEAR APPROACH TO EXT2 IN  
BANACH SPACES

ORBIT SPACES BY THE GROUP OF  
ISOMETRIES OF A BANACH SPACE

SOBRE PROPIEDADES DE  
APROXIMACIÓN NO LINEALES Y UN  
PROBLEMA DE GODEFROY Y OZAWA



## Geometry of sets and fixed-point theorems

MARÍA A. JAPÓN

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla

[japon@us.es](mailto:japon@us.es)

**Abstract:** Every fixed-point theorem mainly has two key two players: the domain and the operator involved. Some requirements over the topology or geometry of the domain, along with some criteria over the continuity or metric properties of the acting operator, is known to guarantee the existence of a fixed point. The literature concerning this topic is endless and dates back to the nineteenth century, with a vast explosion of published papers during the last sixty years.

During this talk, we will look at the opposite scope: What can we say about the topological or geometrical features of a domain  $C$  (often a subset in a Banach space) when the existence of a fixed point is always guaranteed for some family of Lipschitz operators acting over  $C$ ?

### Referencias

- [1] T. Domínguez Benavides, M. Japon (2021). Fixed point properties and reflexivity in variable Lebesgue spaces. *J. Funct. Anal.* no. 6, Paper No. 108896, 22 pp.
- [2] T. Domínguez-Benavides, M. Japón Pineda, S. Prus (2004). Weak compactness and fixed point property for affine mappings. *J. Funct. Anal.* no. 1, 1–15.
- [3] H. Fetter, M. Japón, J. Villada (2018). Reflexivity is equivalent to stability of the almost fixed point property. *J. Math. Anal. Appl.* no. 2, 789–796.
- [4] M. Japón, C. Lennard, R. Popescu (2020). A fixed-point characterization of weakly compact sets in  $L_1(\mu)$  spaces. *J. Math. Anal. Appl.* no. 1, 124228, 10pp.
- [5] M. Japón, C. Lennard, A. Stawski. New fixed point free nonexpansive mappings in  $C(K)$  and related spaces. Preprint
- [6] P.K.Lin, Y. Sternfeld (1985). Convex sets with the Lipschitz fixed point property are compact, *Proc. Amer. Math. Soc.*, no. 4, 633–639.

LUNES, 22 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

SESIÓN ESPECIAL 1  
Análisis Funcional

BASIC SEQUENCES IN BANACH  
LATTICES

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LA  
NORMA EN DUALES SUCESIVOS

ENCAJES INDUCIDOS POR BASES  
ALMOST GREEDY

GEOMETRY OF SETS AND  
FIXED-POINT THEOREMS

PROPERTY (A) VERSUS  
1-UNCONDITIONALTY

QUASICOMPLEMENTED SUBSPACES  
OF BANACH SPACES AND WEAK\*-  
BASIC SEQUENCES

THE FINITE HILBERT TRANSFORM  
ACTING ON THE ZYGMUND SPACE  
LLOGL

SUBESPACIOS LIPSCHITZ DE  $C(K)$

BOUNDED ANALYTIC FUNCTIONS IN  
THE BALL OF  $CN$  WHICH ATTAIN THEIR  
NORM ON THE PREDUAL

A BILINEAR APPROACH TO EXT2 IN  
BANACH SPACES

ORBIT SPACES BY THE GROUP OF  
ISOMETRIES OF A BANACH SPACE

SOBRE PROPIEDADES DE  
APROXIMACIÓN NO LINEALES Y UN  
PROBLEMA DE GODEFROY Y OZAWA

## Property (A) versus 1-unconditionality

OSCAR BLASCO

Departamento Análisis Matemático, Universidad de Valencia

[oscar.blasco@uv.es](mailto:oscar.blasco@uv.es)

**Abstract:** Recall that a basis  $(x_n)_{n=1}^\infty$  in a Banach space  $X$  is called *1-suppression unconditional* if  $\|\sum_{n \in A} x_n^*(x) x_n\| \leq \|x\|$  for all finite subsets  $A$  of  $\mathbb{N}$  and all  $x \in X$ . The so-called Property (A), introduced in [3], establishes that  $\|1_{\varepsilon, A} + f\| \leq \|1_{\varepsilon, B} + f\|$  for all  $f \in X$  with  $\max_n |x_n^*(f)| \leq 1$ , all  $A, B \subset \mathbb{N}$  with  $\text{card}A \leq \text{card}B < \infty$  and  $A \cap B = A \cap \text{supp}(f) = B \cap \text{supp}(f) = \emptyset$ , and where  $1_{\varepsilon, A} = \sum_{j \in A} \varepsilon_j x_j$  for  $|\varepsilon_j| = 1$ . These two properties were shown to be intimately connected with the notion of greedy bases and its relatives, due to the work by F. Albiac and J.L. Ansorena ([1, 2]). The question whether Property (A) implies 1-suppression unconditional was left open for a while. In a recent paper [4] it has been shown that there exists a basis equivalent to the canonical basis of  $\ell_1$  which satisfies Property (A) but fails to be 1-suppression unconditional, giving a negative answer to this question. In this talk we shall present a general method to construct renormings of  $\ell_1$  with Property (A). Then we give procedures to select those which fail to be 1-suppression unconditional, recovering the result in [4].

### Referencias

- [1] F. Albiac, J.L. Ansorena (2016). Characterization of 1-quasi greedy Bases, J. Approx. Theory 201, 7-12.
- [2] F. Albiac, J.L. Ansorena (2017). Characterization of 1-almost greedy Bases, Rev. Mat. Complut. 30, no1, 13-24.
- [3] F. Albiac, P Wojtaszczyk (2006). Characterization of 1-greedy Bases, J. Approx. Theory 138, no 1, 65-86.
- [4] F. Albiac, J.L. Ansorena, O. Blasco, H.V. Chu, T. Oikkgberg (2024). Counterexamples in the isometric theory of symmetric and greedy bases. J. Approx. Theory 297.

MARTES, 23 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 1  
Análisis Funcional

BASIC SEQUENCES IN BANACH  
LATTICES

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LA  
NORMA EN DUALES SUCESIVOS

ENCAJES INDUCIDOS POR BASES  
ALMOST GREEDY

GEOMETRY OF SETS AND  
FIXED-POINT THEOREMS

PROPERTY (A) VERSUS  
1-UNCONDITIONALITY

QUASICOMPLEMENTED SUBSPACES  
OF BANACH SPACES AND WEAK\*-  
BASIC SEQUENCES

THE FINITE HILBERT TRANSFORM  
ACTING ON THE ZYGMUND SPACE  
LLOGL

SUBESPACIOS LIPSCHITZ DE  $C(K)$

BOUNDED ANALYTIC FUNCTIONS IN  
THE BALL OF  $CN$  WHICH ATTAIN THEIR  
NORM ON THE PREDUAL

A BILINEAR APPROACH TO EXT2 IN  
BANACH SPACES

ORBIT SPACES BY THE GROUP OF  
ISOMETRIES OF A BANACH SPACE

SOBRE PROPIEDADES DE  
APROXIMACIÓN NO LINEALES Y UN  
PROBLEMA DE GODEFROY Y OZAWA

## Quasicomplemented subspaces of Banach spaces and weak\*-basic sequences

SEBASTIÁN LAJARA, MAR JIMÉNEZ-SEVILLA

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid  
[selajara@ucm.es](mailto:selajara@ucm.es)

**Abstract:** In this talk we present a result which generalizes the theorems of Gurariy-Kadets and Lindenstrauss-Rosenthal on quasicomplemented subspaces of Banach spaces. We also provide a solution in wide classes of Banach spaces of a problem posed by Ivan Singer in [2], concerning the existence of a weak\*-basic sequence in the dual of a Banach space which is biorthogonal to a given basic sequence (or more generally, a given minimal sequence) in that space, and other related questions. The talk is based on the recent work [1].

### Referencias

- [1] M. Jiménez-Sevilla, S. Lajara (2023). Quasicomplemented subspaces of Banach spaces and separable quotients. *Results in Mathematics* 78 (6), paper no. 244 (24 pp.).
- [2] I. Singer (1981). *Bases in Banach spaces II*. Springer-Verlag (Berlin).

MARTES, 23 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

SESIÓN ESPECIAL 1  
Análisis Funcional

BASIC SEQUENCES IN BANACH  
LATTICES

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LA  
NORMA EN DUALES SUCESIVOS

ENCAJES INDUCIDOS POR BASES  
ALMOST GREEDY

GEOMETRY OF SETS AND  
FIXED-POINT THEOREMS

PROPERTY (A) VERSUS  
1-UNCONDITIONALITY

QUASICOMPLEMENTED SUBSPACES  
OF BANACH SPACES AND WEAK\*-  
BASIC SEQUENCES

THE FINITE HILBERT TRANSFORM  
ACTING ON THE ZYGMUND SPACE  
LLOGL

SUBESPACIOS LIPSCHITZ DE  $C(K)$

BOUNDED ANALYTIC FUNCTIONS IN  
THE BALL OF  $CN$  WHICH ATTAIN THEIR  
NORM ON THE PREDUAL

A BILINEAR APPROACH TO EXT2 IN  
BANACH SPACES

ORBIT SPACES BY THE GROUP OF  
ISOMETRIES OF A BANACH SPACE

SOBRE PROPIEDADES DE  
APROXIMACIÓN NO LINEALES Y UN  
PROBLEMA DE GODEFROY Y OZAWA

## The finite Hilbert transform acting on the Zygmund space $L\log L$

GUILLERMO P. CURBERA, SUSUMU OKADA, WERNER J. RICKER

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla

[curbera@us.es](mailto:curbera@us.es)

**Abstract:** The finite Hilbert transform  $T$  is a singular integral operator which maps the Zygmund space  $L\log L := L\log L(-1, 1)$  continuously into  $L^1 := L^1(-1, 1)$ . By extending the Parseval and Poincaré-Bertrand formulae to this setting, it is possible to establish an inversion result needed for solving the airfoil equation  $T(f) = g$  whenever the data function  $g$  lies in the range of  $T$  within  $L^1$  (shown to contain  $L(\log L)^2$ ). Until now this was only known for  $g$  belonging to the union of all  $L^p$  spaces with  $p > 1$ .

### Referencias

- [1] G. P. Curbera, S. Okada, W. J. Ricker (2019). Inversion and extension of the finite Hilbert transform on  $(-1, 1)$ . *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 198, 1835–1860.
- [2] G. P. Curbera, S. Okada, W. J. Ricker (2021). Fine spectra of the finite Hilbert transform in function spaces. *Advances in Mathematics*, 380, 107597.
- [3] G. P. Curbera, S. Okada, W. J. Ricker (2023). The finite Hilbert transform acting in the Zygmund space  $L\log L$ . *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, to appear.

SESIÓN ESPECIAL 1  
Análisis Funcional

BASIC SEQUENCES IN BANACH  
LATTICES

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LA  
NORMA EN DUALES SUCESIVOS

ENCAJES INDUCIDOS POR BASES  
ALMOST GREEDY

GEOMETRY OF SETS AND  
FIXED-POINT THEOREMS

PROPERTY (A) VERSUS  
1-UNCONDITIONALITY

QUASICOMPLEMENTED SUBSPACES  
OF BANACH SPACES AND WEAK\*-  
BASIC SEQUENCES

THE FINITE HILBERT TRANSFORM  
ACTING ON THE ZYGMUND SPACE  
 $L\log L$

SUBESPACIOS LIPSCHITZ DE  $C(K)$

BOUNDED ANALYTIC FUNCTIONS IN  
THE BALL OF  $CN$  WHICH ATTAIN THEIR  
NORM ON THE PREDUAL

A BILINEAR APPROACH TO EXT2 IN  
BANACH SPACES

ORBIT SPACES BY THE GROUP OF  
ISOMETRIES OF A BANACH SPACE

SOBRE PROPIEDADES DE  
APROXIMACIÓN NO LINEALES Y UN  
PROBLEMA DE GODEFROY Y OZAWA

MARTES, 23 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

## Subespacios Lipschitz de $C(K)$

MATÍAS RAJA

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

[matias@um.es](mailto:matias@um.es)

**Resumen:** Es bien conocido que todo espacio de Banach separable puede ser representado isométricamente en  $C(K)$ , si  $K$  es un compacto no disperso (notablemente el intervalo  $[0, 1]$ ). Sin embargo, esto deja de ser cierto cuando a las funciones que realizan la representación se les imponen condiciones de regularidad extra, como ser Lipschitz respecto a alguna métrica  $d$  definida sobre  $K$ .

En la charla realizaremos un recorrido por los resultados que vinculan la existencia de copias isométricas Lipschitz de ciertos espacios con propiedades del par  $(K, d)$ . Por ejemplo, cuando  $K$  es metrizado por  $d$ , qué relación hay entre la dimensión topológica de  $K$  y la dimensión algebraica de ciertos subespacios Lipschitz de  $C(K)$ ; o en caso que  $d$  sea inferiormente semicontinua, qué implicaciones topológicas tiene la existencia de un subespacio Lipschitz de  $C(K)$  isomorfo a  $\ell_1$ .

Algunos de estos resultados que contaremos en la charla han aparecido repartidos por varios artículos a lo largo de los años. No obstante, para dotar de coherencia a esta teoría, he preparado un “survey” donde reúno los principales argumentos usados en los trabajos previos con resultados nuevos, y que estará a disposición de los participantes en el congreso.

### Referencias

[1] M. Raja, Representation in  $C(K)$  by Lipschitz functions, preprint 2023.

MARTES, 23 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

SESIÓN ESPECIAL 1  
Análisis Funcional

BASIC SEQUENCES IN BANACH  
LATTICES

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LA  
NORMA EN DUALES SUCESIVOS

ENCAJES INDUCIDOS POR BASES  
ALMOST GREEDY

GEOMETRY OF SETS AND  
FIXED-POINT THEOREMS

PROPERTY (A) VERSUS  
1-UNCONDITIONALITY

QUASICOMPLEMENTED SUBSPACES  
OF BANACH SPACES AND WEAK\*-  
BASIC SEQUENCES

THE FINITE HILBERT TRANSFORM  
ACTING ON THE ZYGMUND SPACE  
LLOGL

SUBESPACIOS LIPSCHITZ DE  $C(K)$

BOUNDED ANALYTIC FUNCTIONS IN  
THE BALL OF  $CN$  WHICH ATTAIN THEIR  
NORM ON THE PREDUAL

A BILINEAR APPROACH TO EXT2 IN  
BANACH SPACES

ORBIT SPACES BY THE GROUP OF  
ISOMETRIES OF A BANACH SPACE

SOBRE PROPIEDADES DE  
APROXIMACIÓN NO LINEALES Y UN  
PROBLEMA DE GODEFROY Y OZAWA

## Bounded analytic functions in the ball of $\mathbb{C}^N$ which attain their norm on the predual

JOSÉ BONET, RICHARD ARON, MANUEL MAESTRE

Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València

[jbonet@mat.upv.es](mailto:jbonet@mat.upv.es)

**Abstract:** The Banach algebra  $H^\infty(B_N)$  of bounded holomorphic functions on the complex unit ball  $B_N$  of  $\mathbb{C}^N$  is a dual Banach space. Ng obtained a representation of the predual, which we denote by  $G^\infty(B_N)$ . In the case of one variable ( $N = 1$ ) Ando proved that there is a unique isometric predual of  $H^\infty(\mathbb{D})$ . It seems to be unknown if this is also the case in several variables. By the Bishop–Phelps theorem, the set of elements of  $H^\infty(B_N)$  that attain their norm with respect to  $G^\infty(B_N)$  is a dense set. Fisher obtained a characterization of the elements of  $H^\infty(\mathbb{D})$  which are norm attaining on  $G^\infty(\mathbb{D})$ . We study the case of  $H^\infty(B_N)$ . We also examine similar questions for the polydisc algebra  $H^\infty(\mathbb{D}_N)$

SESIÓN ESPECIAL 1  
Análisis Funcional

BASIC SEQUENCES IN BANACH  
LATTICES

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LA  
NORMA EN DUALES SUCESIVOS

ENCAJES INDUCIDOS POR BASES  
ALMOST GREEDY

GEOMETRY OF SETS AND  
FIXED-POINT THEOREMS

PROPERTY (A) VERSUS  
1-UNCONDITIONALITY

QUASICOMPLEMENTED SUBSPACES  
OF BANACH SPACES AND WEAK\*-  
BASIC SEQUENCES

THE FINITE HILBERT TRANSFORM  
ACTING ON THE ZYGMUND SPACE  
LLOGL

SUBESPACIOS LIPSCHITZ DE  $C(K)$

BOUNDED ANALYTIC FUNCTIONS IN  
THE BALL OF  $\mathbb{C}^N$  WHICH ATTAIN THEIR  
NORM ON THE PREDUAL

A BILINEAR APPROACH TO EXT2 IN  
BANACH SPACES

ORBIT SPACES BY THE GROUP OF  
ISOMETRIES OF A BANACH SPACE

SOBRE PROPIEDADES DE  
APROXIMACIÓN NO LINEALES Y UN  
PROBLEMA DE GODEFROY Y OZAWA

MARTES, 23 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

## A bilinear approach to $\text{Ext}^2$ in Banach spaces

RICARDO GARCÍA, JESÚS M.F. CASTILLO

Departamento de Matemáticas, Universidad de Extremadura/IMUEX

[rgarcia@unex.es](mailto:rgarcia@unex.es)

**Abstract:** Given two Banach spaces  $X$  and  $Y$  let  $\mathcal{L}(X, Y)$  denote the vector space of operators acting between them. This is the Hom functor in the category of Banach space. Its derived functor is Ext, the functor that assigns to each couple  $X; Y$  the vector space  $\text{Ext}(X, Y)$  of exact sequences  $0 \rightarrow Y \rightarrow \square \rightarrow X \rightarrow 0$  modulo equivalence; its second derived functor will be called  $\text{Ext}^2$ . Several important Banach space theorems adopt the form  $\text{Ext}(X, Y) = 0$ . For instance,

- Sobczyk’s theorem:  $\text{Ext}(X, c_0) = 0$  for every separable Banach space  $X$ .
- Lindenstrauss’s lifting principle:  $\text{Ext}(L_1(\mu), X^*) = 0$ .
- The Enflo-Lindenstrauss-Pisier and Kalton-Peck construction:  $\text{Ext}(\ell_2, \ell_2) \neq 0$ .

In fact, it is a basic Banach space question to decide whether  $\text{Ext}(X, Y) = 0$ . Curiously, similar questions for  $\text{Ext}^2$  have not been treated. I would like to discuss is an unexpected connection between homology and the study of bilinear forms [1].

To that end, let us consider a projective presentation for a Banach space  $X$ ; namely, an exact sequence of the form  $0 \rightarrow \kappa_X \rightarrow \ell_1(\Gamma) \rightarrow X \rightarrow 0$ . Let us denote  $\mathcal{B}(\kappa_X)$  the space of all bilinear continuous forms defined on  $\kappa_X$  and introduce the following equivalence relation:  $B \sim 0$  if and only if  $B$  extends to a bilinear continuous form on  $\ell_1(\Gamma)$ . One has

$$\text{Ext}^2(X, X^*) = \mathcal{B}(\kappa_X) / \sim .$$

And since it was proved in [2] that  $\text{Ext}^2(\ell_2, \ell_2) \neq 0$ , it follows that there are continuous bilinear forms on  $\kappa_{\ell_2}$  that cannot be extended to continuous bilinear forms on  $\ell_1$ .

### Referencias

- [1] J.M.F. Castillo and R. García (2019). Bilinear forms in the homology of Banach spaces, *Linear Algebra and its Applications*, 566 199–211.
- [2] F. Cabello Sánchez, J. M. F. Castillo, W. H. G. Corrêa, V. Ferenczi, and R. García (2021). On the  $\text{Ext}^2$ -problem for Hilbert spaces, *J. Funct. Anal.*, 280, 108863.

**Acknowledgments:** The research has been supported by projects MTM2016-76958-C2-1-P and IB20038 de la Junta de Extremadura.

MARTES, 23 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 1  
Análisis Funcional

BASIC SEQUENCES IN BANACH  
LATTICES

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LA  
NORMA EN DUALES SUCESIVOS

ENCAJES INDUCIDOS POR BASES  
ALMOST GREEDY

GEOMETRY OF SETS AND  
FIXED-POINT THEOREMS

PROPERTY (A) VERSUS  
1-UNCONDITIONALITY

QUASICOMPLEMENTED SUBSPACES  
OF BANACH SPACES AND WEAK\*-  
BASIC SEQUENCES

THE FINITE HILBERT TRANSFORM  
ACTING ON THE ZYGMUND SPACE  
LLOGL

SUBESPACIOS LIPSCHITZ DE  $C(K)$

BOUNDED ANALYTIC FUNCTIONS IN  
THE BALL OF  $CN$  WHICH ATTAIN THEIR  
NORM ON THE PREDUAL

A BILINEAR APPROACH TO  $\text{EXT}^2$  IN  
BANACH SPACES

ORBIT SPACES BY THE GROUP OF  
ISOMETRIES OF A BANACH SPACE

SOBRE PROPIEDADES DE  
APROXIMACIÓN NO LINEALES Y UN  
PROBLEMA DE GODEFROY Y OZAWA

## Orbit spaces by the group of isometries of a Banach space

JORGE LÓPEZ ABAD, VALENTIN FERENCZI

Departamento de Matemáticas Fundamentales, UNED

[abad@mat.uned.es](mailto:abad@mat.uned.es)

**Abstract:** We will study several orbit spaces of the form  $X//G$  where  $G$  is the group of linear isometries of a Banach space and  $X$  is a metric space endowed with an action by isometries  $G \curvearrowright X$ .

SESIÓN ESPECIAL 1  
Análisis Funcional

BASIC SEQUENCES IN BANACH  
LATTICES

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LA  
NORMA EN DUALES SUCESIVOS

ENCAJES INDUCIDOS POR BASES  
ALMOST GREEDY

GEOMETRY OF SETS AND  
FIXED-POINT THEOREMS

PROPERTY (A) VERSUS  
1-UNCONDITIONALITY

QUASICOMPLEMENTED SUBSPACES  
OF BANACH SPACES AND WEAK\*-  
BASIC SEQUENCES

THE FINITE HILBERT TRANSFORM  
ACTING ON THE ZYGMUND SPACE  
LLOGL

SUBESPACIOS LIPSCHITZ DE  $C(K)$

BOUNDED ANALYTIC FUNCTIONS IN  
THE BALL OF  $C_N$  WHICH ATTAIN THEIR  
NORM ON THE PREDUAL

A BILINEAR APPROACH TO EXT2 IN  
BANACH SPACES

ORBIT SPACES BY THE GROUP OF  
ISOMETRIES OF A BANACH SPACE

SOBRE PROPIEDADES DE  
APROXIMACIÓN NO LINEALES Y UN  
PROBLEMA DE GODEFROY Y OZAWA

MARTES, 23 DE ENERO:  
17:00 – 17:30



## Sobre propiedades de aproximación no lineales y un problema de Godefroy y Ozawa

RUBÉN MEDINA

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada  
 Department of Mathematics, Czech Technical University in Prague  
[rubenmedina@ugr.es](mailto:rubenmedina@ugr.es)

**Resumen:** En esta charla vamos a seguir los pasos de Per Enflo ([1], [2]) para encontrar un espacio de Banach separable  $X$  sin retracciones  $\lambda$ -Lipschitz a ningún subconjunto compacto y convexo cuya expansión lineal sea densa en  $X$  para un  $\lambda > 1$ . Este es un primer paso hacia la solución del problema de Godefroy y Ozawa [3, Problem 3], a saber, si todo espacio separable tiene una retracción Lipschitz a algún subconjunto compacto y convexo cuya expansión lineal sea densa. Este problema tiene una gran relación con las propiedades de aproximación no lineales y, entre otros, con problemas de Kalton [4, Problem 1] y de los propios Godefroy y Ozawa [3, Problem 4].

### Referencias

- [1] P. Enflo (1973). A Banach space with basis constant greater than 1. *Ark. Mat.*, 11:103–107.
- [2] P. Enflo (1973). A counterexample to the approximation problem in Banach spaces. *Acta Math.*, 130:309–317.
- [3] G. Godefroy, N. Ozawa (2014). Free Banach spaces and the approximation properties. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 142(5):1681–1687.
- [4] N. J. Kalton (2012). The uniform structure of Banach spaces. *Math. Ann.*, 354(4):1247–1288.

**Agradecimientos:** Este trabajo no habría sido posible sin la ayuda de mi codirector de tesis Petr Hájek.

MARTES, 23 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

SESIÓN ESPECIAL 1  
Análisis Funcional

BASIC SEQUENCES IN BANACH LATTICES

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LA NORMA EN DUALES SUCESIVOS

ENCAJES INDUCIDOS POR BASES ALMOST GREEDY

GEOMETRY OF SETS AND FIXED-POINT THEOREMS

PROPERTY (A) VERSUS 1-UNCONDITIONALITY

QUASICOMPLEMENTED SUBSPACES OF BANACH SPACES AND WEAK\*-BASIC SEQUENCES

THE FINITE HILBERT TRANSFORM ACTING ON THE ZYGMUND SPACE  $LLOGL$

SUBESPACIOS LIPSCHITZ DE  $C(K)$

BOUNDED ANALYTIC FUNCTIONS IN THE BALL OF  $CN$  WHICH ATTAIN THEIR NORM ON THE PREDUAL

A BILINEAR APPROACH TO EXT2 IN BANACH SPACES

ORBIT SPACES BY THE GROUP OF ISOMETRIES OF A BANACH SPACE

SOBRE PROPIEDADES DE APROXIMACIÓN NO LINEALES Y UN PROBLEMA DE GODEFROY Y OZAWA

## SESIÓN ESPECIAL 2

### Polinomios ortogonales, funciones especiales y aplicaciones

#### Organizadores:

**BLANCA BUJANDA**  
(UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA)

**ÓSCAR CIAURRI**  
(UNIVERSIDAD DE LA RIOJA)

**ALBERTO LASTRA**  
(UNIVERSIDAD DE ALCALÁ)

**PABLO PALACIOS**  
(UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA)

**VÍCTOR SOTO-LARROSA**  
(UNIVERSIDAD DE ALCALÁ)

#### Descripción:

La sesión especial tiene como objetivo abordar problemas de actualidad en las distintas líneas de investigación relacionadas con el estudio de polinomios ortogonales, funciones especiales y sus aplicaciones en distintos ámbitos de la ciencia y la tecnología. El estudio de relaciones estructurales, propiedades algebraicas u otros aspectos a nivel teórico de las funciones especiales y los polinomios ortogonales son de especial interés dentro de la matemática pura. Sin embargo, también presentan múltiples aplicaciones en otras áreas de la matemática, especialmente reseñables son sus relaciones con la cuadratura Gaussiana, la aproximación asintótica de integrales, y otras aplicaciones en el análisis funcional y complejo, la física matemática, la teoría de la aproximación, análisis numérico, las matrices aleatorias, etc.

Sesión especial en recuerdo del profesor Diego Dominici.

SESIÓN ESPECIAL 2  
Polinomios ortogonales, funciones especiales y aplicaciones

TRUNCATED CLASSICAL ORTHOGONAL POLYNOMIALS

POLINOMIOS ORTOGONALES Y CADENAS DE MARKOV

ORTOGONALIDAD MÚLTIPLE MIXTA Y LA TEORÍA ESPECTRAL DE MATRICES BANDA ACOTADAS

LOS POLINOMIOS DE ZERNIKE Y LA VISUALIZACIÓN DE ESTRELLAS

MIXED-TYPE HYPERGEOMETRIC BERNOULLI-GEIGENBAUER POLYNOMIALS: SOME PROPERTIES

ANÁLISIS ASINTÓTICO DE UNA FAMILIA DE POLINOMIOS ORTOGONALES  $\lambda$ -SOBOLEV

CÁLCULO SIMBÓLICO DE UNA ECUACIÓN EN DIFERENCIAS DE SEGUNDO ORDEN...

A LANDIS-TYPE RESULT FOR THE SEMIDISCRETE HEAT EQUATION

APPROXIMATION BY POLYNOMIALS IN SOBOLEV SPACES ASSOCIATED WITH...

ON CMV MIXED MULTIPLE ORTHOGONAL LAURENT POLYNOMIALS ON THE UNIT CIRCLE

NEAREST NEIGHBOR RECURRENCE RELATIONS FOR SOME ANGELESCO MULTIPLE...

DISCRETE APPELL-DUNKL SEQUENCES

EL MÉTODO DE SADDLE POINT EN DOS O MÁS DIMENSIONES

NEW ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF TWO NEW SPECIAL FUNCTIONS

A GENERALIZATION OF THE LAPLACE'S METHOD FOR INTEGRALS

INTEGRALES ELÍPTICAS SIMÉTRICAS. ALGUNOS DESARROLLOS ANALÍTICOS PARA  $R_j(x, y, z, p)$

ALGORITMOS NUMÉRICOS Y SOFTWARE PARA LA EVALUACIÓN DE FUNCIONES ESPECIALES

EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LOS CEROS COMPLEJOS DE FUNCIONES DEL CILINDRO PARABÓLICO

EL TEOREMA DEL CÍRCULO EN LA CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE Y RELACIONES...

EXCEPTIONAL HAHN AND JACOBI POLYNOMIALS WITH AN ARBITRARY NUMBER...

## Truncated classical orthogonal polynomials

FRANCISCO MARCELLÁN, DIEGO DOMINICI, JUAN CARLOS GARCÍA ARDILA

Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid

[pacomarc@ing.uc3m.es](mailto:pacomarc@ing.uc3m.es)

**Resumen:** En esta comunicación presentamos resultados recientes sobre polinomios ortogonales respecto a distribuciones clásicas (Normal y Gamma) soportadas en un subconjunto de la recta real. En el caso de la distribución Normal consideramos un intervalo simétrico  $(-z, z)$  ([1]) y en la distribución Gamma un intervalo  $(0, z)$  ([2]). Dichas familias son semiclásicas y, en consecuencia, se determinan las ecuaciones de Laguerre-Freud que verifican los coeficientes de su relación de recurrencia a tres términos (Ecuaciones de Painlevé discretas) así como las ecuaciones diferenciales de Painlevé que satisfacen en términos del parámetro  $z$  (véase [5]). Dichos polinomios aparecen en el estudio de Gaussian y Laguerre unitary ensembles en la teoría de matrices aleatorias (véase [3] y [4], respectivamente). Finalmente, se plantean una serie de problemas abiertos en el caso de la distribución Beta simétrica soportada en  $(-z, z)$ ,  $|z| < 1$ .

### Referencias

- [1] D. Dominici, F. Marcellan (2023), Truncated Hermite polynomials. *J. Difference Equ. Appl.* 29, no. 7, 701-732.
- [2] D. Dominici, J. C. García Ardila, F. Marcellán (2023), Symmetrization process and truncated orthogonal polynomials. The Laguerre case. [arXiv:2307.09581 v1\[math.CA\]](https://arxiv.org/abs/2307.09581).
- [3] S. Lyu, Y. Chen (2021), Gaussian unitary ensembles with two discontinuities, PDEs and the coupled Painlevé *II* and *IV* system. *Stud. Appl. Math.* 146, no.1, 118-138.
- [4] S. Lyu, Y. Chen, S.-X. Xu (2022), Laguerre Unitary Ensembles with Jump Discontinuities. PDEs and the Coupled Painlevé *V* System. [arXiv:2202.00943 v1\[math.SI\]](https://arxiv.org/abs/2202.00943).
- [5] W. Van Assche (2018), Orthogonal polynomials and Painlevé equations. Australian Mathematical Society, Lecture Series 27. Cambridge University Press, Cambridge.

**Agradecimientos:** Este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto PID2021-122154NB-I00 financiado por FEDER/Ministerio de Ciencia e Innovación-Agencia Estatal de Investigación.

LUNES, 22 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

SESIÓN ESPECIAL 2  
Polinomios ortogonales, funciones  
especiales y aplicaciones

TRUNCATED CLASSICAL ORTHOGONAL  
POLYNOMIALS

POLINOMIOS ORTOGONALES Y  
CADENAS DE MARKOV

ORTOGONALIDAD MÚLTIPLE MIXTA Y  
LA TEORÍA ESPECTRAL DE MATRICES  
BANDA ACOTADAS

LOS POLINOMIOS DE ZERNIKE Y LA  
VISUALIZACIÓN DE ESTRELLAS

MIXED-TYPE HYPERGEOMETRIC  
BERNOULLI-GEIGENBAUER  
POLYNOMIALS: SOME PROPERTIES

ANÁLISIS ASINTÓTICO DE  
UNA FAMILIA DE POLINOMIOS  
ORTOGONALES  $\alpha$ -SOBOLEV

CÁLCULO SIMBÓLICO DE UNA  
ECUACIÓN EN DIFERENCIAS DE  
SEGUNDO ORDEN...

A LANDIS-TYPE RESULT FOR THE  
SEMI-DISCRETE HEAT EQUATION

APPROXIMATION BY POLYNOMIALS  
IN SOBOLEV SPACES ASSOCIATED  
WITH...

ON CMV MIXED MULTIPLE  
ORTHOGONAL LAURENT POLYNOMIALS  
ON THE UNIT CIRCLE

NEAREST NEIGHBOR RECURRENCE  
RELATIONS FOR SOME ANGELESKO  
MULTIPLE...

DISCRETE APPELL-DUNKL SEQUENCES

EL MÉTODO DE SADDLE POINT EN DOS  
O MÁS DIMENSIONES

NEW ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF  
TWO NEW SPECIAL FUNCTIONS

A GENERALIZATION OF THE LAPLACE'S  
METHOD FOR INTEGRALS

INTEGRALES ELÍPTICAS SIMÉTRICAS.  
ALGUNOS DESARROLLOS ANALÍTICOS  
PARA  $R_\lambda(x, y, z, p)$

ALGORITMOS NUMÉRICOS Y  
SOFTWARE PARA LA EVALUACIÓN DE  
FUNCIONES ESPECIALES

EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LOS  
CEROS COMPLEJOS DE FUNCIONES  
DEL CILINDRO PARABÓLICO

EL TEOREMA DEL CÍRCULO EN LA  
CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE Y  
RELACIONES...

EXCEPTIONAL HAHN AND JACOBI  
POLYNOMIALS WITH AN ARBITRARY  
NUMBER...

## Polinomios ortogonales y cadenas de Markov

AMÍLCAR BRANQUINHO, JUAN E. F. DÍAZ, ANA FOULQUIÉ-MORENO,  
MANUEL MAÑAS

Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra  
ajplb@mat.uc.pt

**Resumen:** Dada una familia de polinomios ortogonales o de polinomios ortogonales múltiples, con una matriz de la recurrencia no negativa, usando el teorema de Perron-Frobenius, construimos una infinidad de cadenas de Markov finitas, describiendo sus propiedades probabilísticas. Las expresiones hipergeométricas para las familias de polinomios ortogonales en el diagrama de Askey, con matrices de recurrencia no negativas, permite la construcción explícita de una diversidad de ejemplos.

### Referencias

- [1] A. Branquinho, J. E. F. Díaz, A. Foulquié-Moreno, and M. Mañas (2023), Finite Markov chains and multiple orthogonal polynomials, arXiv:2308.00182.

LUNES, 22 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 2  
Polinomios ortogonales, funciones  
especiales y aplicaciones

TRUNCATED CLASSICAL ORTHOGONAL  
POLYNOMIALS

POLINOMIOS ORTOGONALES Y  
CADENAS DE MARKOV

ORTOGONALIDAD MÚLTIPLE MIXTA Y  
LA TEORÍA ESPECTRAL DE MATRICES  
BANDA ACOTADAS

LOS POLINOMIOS DE ZERNIKE Y LA  
VISUALIZACIÓN DE ESTRELLAS

MIXED-TYPE HYPERGEOMETRIC  
BERNOULLI-GEIGENBAUER  
POLYNOMIALS: SOME PROPERTIES

ANÁLISIS ASINTÓTICO DE  
UNA FAMILIA DE POLINOMIOS  
ORTOGONALES  $\lambda$ -SOBOLEV

CÁLCULO SIMBÓLICO DE UNA  
ECUACIÓN EN DIFERENCIAS DE  
SEGUNDO ORDEN...

A LANDIS-TYPE RESULT FOR THE  
SEMI-DISCRETE HEAT EQUATION

APPROXIMATION BY POLYNOMIALS  
IN SOBOLEV SPACES ASSOCIATED  
WITH...

ON CMV MIXED MULTIPLE  
ORTHOGONAL LAURENT POLYNOMIALS  
ON THE UNIT CIRCLE

NEAREST NEIGHBOR RECURRENCE  
RELATIONS FOR SOME ANGELESKO  
MULTIPLE...

DISCRETE APPELL-DUNKL SEQUENCES

EL MÉTODO DE SADDLE POINT EN DOS  
O MÁS DIMENSIONES

NEW ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF  
TWO NEW SPECIAL FUNCTIONS

A GENERALIZATION OF THE LAPLACE'S  
METHOD FOR INTEGRALS

INTEGRALES ELÍPTICAS SIMÉTRICAS.  
ALGUNOS DESARROLLOS ANALÍTICOS  
PARA  $R_j(x, y, z, p)$

ALGORITMOS NUMÉRICOS Y  
SOFTWARE PARA LA EVALUACIÓN DE  
FUNCIONES ESPECIALES

EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LOS  
CEROS COMPLEJOS DE FUNCIONES  
DEL CILINDRO PARABÓLICO

EL TEOREMA DEL CÍRCULO EN LA  
CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE Y  
RELACIONES...

EXCEPTIONAL HAHN AND JACOBI  
POLYNOMIALS WITH AN ARBITRARY  
NUMBER...

## Ortogonalidad múltiple mixta y la teoría espectral de matrices banda acotadas

AMÍLCAR BRANQUINHO, ANA FOULQUIÉ-MORENO, MANUEL MAÑAS

Departamento de Física Teórica, Universidad Complutense

manuel.manas@ucm.es

**Resumen:** En esa charla explicamos un teorema de Favard espectral para matrices banda acotadas  $T$ , mas allá del caso tridiagonal, con un numero finito y arbitrario de super-diagonales y sub-diagonales. Es necesario que la matriz  $T$ , tras una traslación por la identidad, admita una factorización bi-diagonal positiva.

### Referencias

- [1] A. Branquinho, A. Foulquié-Moreno, M. Mañas (2023). Spectral theory for bounded banded matrices with positive bidiagonal factorization and mixed multiple orthogonal polynomials. *Advances in Mathematics* 434, 109313.

SESIÓN ESPECIAL 2  
Polinomios ortogonales, funciones especiales y aplicaciones

TRUNCATED CLASSICAL ORTHOGONAL POLYNOMIALS

POLINOMIOS ORTOGONALES Y CADENAS DE MARKOV

ORTOGONALIDAD MÚLTIPLE MIXTA Y LA TEORÍA ESPECTRAL DE MATRICES BANDA ACOTADAS

LOS POLINOMIOS DE ZERNIKE Y LA VISUALIZACIÓN DE ESTRELLAS

MIXED-TYPE HYPERGEOMETRIC BERNOLLI-GEGENBAUER POLYNOMIALS: SOME PROPERTIES

ANÁLISIS ASINTÓTICO DE UNA FAMILIA DE POLINOMIOS ORTOGONALES  $\lambda$ -SOBOLEV

CÁLCULO SIMBÓLICO DE UNA ECUACIÓN EN DIFERENCIAS DE SEGUNDO ORDEN...

A LANDIS-TYPE RESULT FOR THE SEMIDISCRETE HEAT EQUATION

APPROXIMATION BY POLYNOMIALS IN SOBOLEV SPACES ASSOCIATED WITH...

ON CMV MIXED MULTIPLE ORTHOGONAL LAURENT POLYNOMIALS ON THE UNIT CIRCLE

NEAREST NEIGHBOR RECURRENCE RELATIONS FOR SOME ANGELESCO MULTIPLE...

DISCRETE APPELL-DUNKL SEQUENCES

EL MÉTODO DE SADDLE POINT EN DOS O MÁS DIMENSIONES

NEW ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF TWO NEW SPECIAL FUNCTIONS

A GENERALIZATION OF THE LAPLACE'S METHOD FOR INTEGRALS

INTEGRALES ELÍPTICAS SIMÉTRICAS. ALGUNOS DESARROLLOS ANALÍTICOS PARA  $R_j(x, y, z, p)$

ALGORITMOS NUMÉRICOS Y SOFTWARE PARA LA EVALUACIÓN DE FUNCIONES ESPECIALES

EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LOS CEROS COMPLEJOS DE FUNCIONES DEL CILINDRO PARABÓLICO

EL TEOREMA DEL CÍRCULO EN LA CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE Y RELACIONES...

EXCEPTIONAL HAHN AND JACOBI POLYNOMIALS WITH AN ARBITRARY NUMBER...

LUNES, 22 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

## Los polinomios de Zernike y la visualización de estrellas

LIDIA FERNÁNDEZ, S. BARBERO, A. M. DELGADO, T. E. PÉREZ

Departamento Matemática Aplicada, Universidad de Granada

lidiafr@ugr.es

**Resumen:** Al observar una estrella en condiciones de poca luz, la mayoría de las personas perciben algunos patrones simétricos estructurados, a los que se ha denominado starbursts. Los patrones starburst pueden ser muy diversos, pero algunos típicos son aquellos en los que un área central brillante está rodeada de picos de intensidad claramente marcados (puntas de estrella) [2, 3]. Un hecho sorprendente de dichos patrones es que suelen presentar una simetría rotacional de orden  $p$ , es decir, una simetría de ángulo  $2\pi/p$ , por lo que el índice  $p$  determina el número de puntas de estrella. Resulta también sorprendente que el índice  $p$  no es siempre el mismo y, en consecuencia, el número de puntas de estrella difiere entre distintos observadores.

Una de las causas de estos patrones luminosos son las imperfecciones en los elementos ópticos del ojo humano, que se describen matemáticamente mediante una expansión en polinomios de Zernike. En este trabajo proponemos una explicación teórica de los tipos de simetrías y el número de puntas de estrella basándonos en la relación que existe entre la simetría, la preservación de simetría entre frentes de onda y cústicas, y el análisis de los puntos singulares de las funciones de curvatura de la aberración de onda [1].

### Referencias

- [1] S. Barbero, A. Bradley, N. Lopez-Gil, J. Rubinstein, L. Thibos (2022). Catastrophe optics theory unveils the localised wave aberration features that generate ghost images. *Ophthalmic Physiol Opt.*, 42, 1074–1091.
- [2] J. Rubinstein (2019). On the geometry of visual starbursts. *J. Opt. Soc. Am. A*, 36(4), B58–B64.
- [3] R. Xu, L. Thibos, N. Lopez-Gil, P. Kollbaum, A. Bradley (2019). Psychophysical study of the optical origin of starbursts. *J. Opt. Soc. Am. A*, 36(4), B97–B102.

LUNES, 22 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

SESIÓN ESPECIAL 2  
Polinomios ortogonales, funciones  
especiales y aplicaciones

TRUNCATED CLASSICAL ORTHOGONAL  
POLYNOMIALS

POLINOMIOS ORTOGONALES Y  
CADENAS DE MARKOV

ORTOGONALIDAD MÚLTIPLE MIXTA Y  
LA TEORÍA ESPECTRAL DE MATRICES  
BANDA ACOTADAS

LOS POLINOMIOS DE ZERNIKE Y LA  
VISUALIZACIÓN DE ESTRELLAS

MIXED-TYPE HYPERGEOMETRIC  
BERNOULLI-GEIGENBAUER  
POLYNOMIALS: SOME PROPERTIES

ANÁLISIS ASINTÓTICO DE  
UNA FAMILIA DE POLINOMIOS  
ORTOGONALES  $\lambda$ -SOBOLEV

CÁLCULO SIMBÓLICO DE UNA  
ECUACIÓN EN DIFERENCIAS DE  
SEGUNDO ORDEN...

A LANDIS-TYPE RESULT FOR THE  
SEMIDISCRETE HEAT EQUATION

APPROXIMATION BY POLYNOMIALS  
IN SOBOLEV SPACES ASSOCIATED  
WITH...

ON CMV MIXED MULTIPLE  
ORTHOGONAL LAURENT POLYNOMIALS  
ON THE UNIT CIRCLE

NEAREST NEIGHBOR RECURRENCE  
RELATIONS FOR SOME ANGELESKO  
MULTIPLE...

DISCRETE APPELL-DUNKL SEQUENCES

EL MÉTODO DE SADDLE POINT EN DOS  
O MÁS DIMENSIONES

NEW ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF  
TWO NEW SPECIAL FUNCTIONS

A GENERALIZATION OF THE LAPLACE'S  
METHOD FOR INTEGRALS

INTEGRALES ELÍPTICAS SIMÉTRICAS.  
ALGUNOS DESARROLLOS ANALÍTICOS  
PARA  $R_\lambda(x, y, z, p)$

ALGORITMOS NUMÉRICOS Y  
SOFTWARE PARA LA EVALUACIÓN DE  
FUNCIONES ESPECIALES

EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LOS  
CEROS COMPLEJOS DE FUNCIONES  
DEL CILINDRO PARABÓLICO

EL TEOREMA DEL CÍRCULO EN LA  
CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE Y  
RELACIONES...

EXCEPTIONAL HAHN AND JACOBI  
POLYNOMIALS WITH AN ARBITRARY  
NUMBER...

## Mixed-type hypergeometric Bernoulli-Gegenbauer polynomials: some properties

DIONISIO PERALTA, YAMILET QUINTANA, SHAHID AHMAD WANI  
 Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid  
 Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT), Spain  
[yaquinta@math.uc3m.es](mailto:yaquinta@math.uc3m.es)

**Abstract:** In this talk, we consider a novel family of the mixed-type hypergeometric Bernoulli-Gegenbauer polynomials. This family represents a fascinating fusion between two distinct categories of special functions: hypergeometric Bernoulli polynomials and Gegenbauer polynomials. We focus our attention on some algebraic and differential properties of this class of polynomials, including its explicit expressions, derivative formulas, matrix representations, matrix-inversion formulas, and other relations connecting it with the hypergeometric Bernoulli polynomials.

### Referencias

- [1] F. T. Howard (1967). Some sequences of rational numbers related to the exponential function. *Duke Math. J.*, 34, 701–716.
- [2] P. Natalini, A. Bernardini (2003). A generalization of the Bernoulli polynomials. *J. Appl. Math.*, 2003, 155–163.
- [3] D. Peralta, Y. Quintana, S. A. Wani (2023). Mixed-type hypergeometric Bernoulli-Gegenbauer polynomials. *Mathematics*, 11 (18), 13920.
- [4] Y. Quintana, W. Ramírez, A. Urieles (2018). On an operational matrix method based on generalized Bernoulli polynomials of level  $m$ . *Calcolo*, 55, 30.

**Acknowledgments:** The research of Y. Quintana has been partially supported by the grant CEX2019-000904-S funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

MARTES, 23 DE ENERO:  
 11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 2  
 Polinomios ortogonales, funciones especiales y aplicaciones

TRUNCATED CLASSICAL ORTHOGONAL POLYNOMIALS

POLINOMIOS ORTOGONALES Y CADENAS DE MARKOV

ORTOGONALIDAD MÚLTIPLE MIXTA Y LA TEORÍA ESPECTRAL DE MATRICES BANDA ACOTADAS

LOS POLINOMIOS DE ZERNIKE Y LA VISUALIZACIÓN DE ESTRELLAS

MIXED-TYPE HYPERGEOMETRIC BERNOULLI-GEGENBAUER POLYNOMIALS: SOME PROPERTIES

ANÁLISIS ASINTÓTICO DE UNA FAMILIA DE POLINOMIOS ORTOGONALES  $\lambda$ -SOBOLEV

CÁLCULO SIMBÓLICO DE UNA ECUACIÓN EN DIFERENCIAS DE SEGUNDO ORDEN...

A LANDIS-TYPE RESULT FOR THE SEMIDISCRETE HEAT EQUATION

APPROXIMATION BY POLYNOMIALS IN SOBOLEV SPACES ASSOCIATED WITH...

ON CMV MIXED MULTIPLE ORTHOGONAL LAURENT POLYNOMIALS ON THE UNIT CIRCLE

NEAREST NEIGHBOR RECURRENCE RELATIONS FOR SOME ANGELESCO MULTIPLE...

DISCRETE APPELL-DUNKL SEQUENCES

EL MÉTODO DE SADDLE POINT EN DOS O MÁS DIMENSIONES

NEW ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF TWO NEW SPECIAL FUNCTIONS

A GENERALIZATION OF THE LAPLACE'S METHOD FOR INTEGRALS

INTEGRALES ELÍPTICAS SIMÉTRICAS. ALGUNOS DESARROLLOS ANALÍTICOS PARA  $R_1(x, y, z, p)$

ALGORITMOS NUMÉRICOS Y SOFTWARE PARA LA EVALUACIÓN DE FUNCIONES ESPECIALES

EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LOS CEROS COMPLEJOS DE FUNCIONES DEL CILINDRO PARABÓLICO

EL TEOREMA DEL CÍRCULO EN LA CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE Y RELACIONES...

EXCEPTIONAL HAHN AND JACOBI POLYNOMIALS WITH AN ARBITRARY NUMBER...

## Análisis asintótico de una familia de polinomios ortogonales $\Delta$ -Sobolev

JUAN J. MORENO-BALCÁZAR, DIEGO DOMINICI

Departamento de Matemáticas, Universidad de Almería

balcazar@ual.es

**Resumen:** En esta charla se aborda el comportamiento asintótico de una familia de polinomios ortogonales con respecto a un producto escalar  $\Delta$ -Sobolev, siendo  $\Delta$  el operador diferencia progresiva (forward operator). En concreto, se obtiene una expansión asintótica para estos polinomios no estándar que involucran a los polinomios de Charlier generalizados.

### Referencias

- [1] D. Dominici, J. J. Moreno-Balcázar (2023). Asymptotic analysis of a family of Sobolev orthogonal polynomials related to the generalized Charlier polynomials. *Journal of Approximation Theory*, 293, Art. 105918.

**Agradecimientos:** Dedicado a la memoria de Diego Dominici.

Investigación financiada por la ayuda PID2021-124472NB-I00 del proyecto financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por “FEDER Una manera de hacer Europa”; Grupo de Investigación FQM229 de la Junta de Andalucía y Centro de Investigación CDTIME de la Universidad de Almería.

MARTES, 23 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

SESIÓN ESPECIAL 2  
Polinomios ortogonales, funciones especiales y aplicaciones

TRUNCATED CLASSICAL ORTHOGONAL POLYNOMIALS

POLINOMIOS ORTOGONALES Y CADENAS DE MARKOV

ORTOGONALIDAD MÚLTIPLE MIXTA Y LA TEORÍA ESPECTRAL DE MATRICES BANDA ACOTADAS

LOS POLINOMIOS DE ZERNIKE Y LA VISUALIZACIÓN DE ESTRELLAS

MIXED-TYPE HYPERGEOMETRIC BERNOULLI-GEIGENBAUER POLYNOMIALS: SOME PROPERTIES

ANÁLISIS ASINTÓTICO DE UNA FAMILIA DE POLINOMIOS ORTOGONALES  $\Delta$ -SOBOLEV

CÁLCULO SIMBÓLICO DE UNA ECUACIÓN EN DIFERENCIAS DE SEGUNDO ORDEN...

A LANDIS-TYPE RESULT FOR THE SEMIDISCRETE HEAT EQUATION

APPROXIMATION BY POLYNOMIALS IN SOBOLEV SPACES ASSOCIATED WITH...

ON CMV MIXED MULTIPLE ORTHOGONAL LAURENT POLYNOMIALS ON THE UNIT CIRCLE

NEAREST NEIGHBOR RECURRENCE RELATIONS FOR SOME ANGELESCO MULTIPLE...

DISCRETE APPELL-DUNKL SEQUENCES

EL MÉTODO DE SADDLE POINT EN DOS O MÁS DIMENSIONES

NEW ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF TWO NEW SPECIAL FUNCTIONS

A GENERALIZATION OF THE LAPLACE'S METHOD FOR INTEGRALS

INTEGRALES ELÍPTICAS SIMÉTRICAS. ALGUNOS DESARROLLOS ANALÍTICOS PARA  $R_J(X, Y, Z, P)$

ALGORITMOS NUMÉRICOS Y SOFTWARE PARA LA EVALUACIÓN DE FUNCIONES ESPECIALES

EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LOS CEROS COMPLEJOS DE FUNCIONES DEL CILINDRO PARABÓLICO

EL TEOREMA DEL CÍRCULO EN LA CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE Y RELACIONES...

EXCEPTIONAL HAHN AND JACOBI POLYNOMIALS WITH AN ARBITRARY NUMBER...



## Cálculo simbólico de una ecuación en diferencias de segundo orden para polinomios ortogonales tipo Sobolev

JUAN F. MAÑAS–MAÑAS, GALINA FILIPUK, JUAN J. MORENO–BALCÁZAR

Departamento de Matemáticas, Universidad de Almería

jmm939@ual.es

**Resumen:** En esta charla abordamos el problema de calcular simbólicamente los coeficientes de la ecuación en diferencias/diferencial de segundo orden que satisfacen los polinomios  $Q_n(x)$  ortogonales con respecto al producto escalar

$$(f, g)_S = \int f(x)g(x)\varrho(x)dx + M\mathcal{D}_{q,\omega}^{(j)}f(c)\mathcal{D}_{q,\omega}^{(j)}g(c),$$

donde  $\varrho(x)$  es una función peso con soporte en la recta real,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $M > 0$ ,  $j$  es un entero no negativo y  $\mathcal{D}_{q,\omega}$  es el operador de Hahn.

En [1] fue probado que los polinomios  $Q_n(x)$  satisfacen la siguiente ecuación

$$\sigma_{1,c,n}(x)\mathcal{D}_{q,\omega}^{(2)}Q_n(x) + \sigma_{2,c,n}(x)\mathcal{D}_{q,\omega}Q_n(x) + \sigma_{3,c,n}(x)Q_n(x) = 0, \quad n \geq 2,$$

donde  $\sigma_{1,c,n}(x)$ ,  $\sigma_{2,c,n}(x)$  y  $\sigma_{3,c,n}(x)$  son funciones explícitamente conocidas. Recientemente, en [2] hemos construido un programa basado en lenguaje MATHEMATICA<sup>®</sup> que calcula simbólicamente estos coeficientes. Este es un trabajo conjunto con Galina Filipuk (Universidad de Varsovia) y Juan J. Moreno–Balcázar (Universidad de Almería).

### Referencias

- [1] G. Filipuk, J. J. Mañas–Mañas, J. J. Moreno–Balcázar (2022), Second-order difference equation for Sobolev-type orthogonal polynomials: Part I: Theoretical results. *J. Difference Equ. Appl.* 28 (7), 971–989.
- [2] G. Filipuk, J. J. Mañas–Mañas, J. J. Moreno–Balcázar (2023), Second-order difference equation for Sobolev-type orthogonal polynomials. Part II: Computational tools. *East Asian J. Appl. Math.* 13 (4), 960–979.

**Agradecimientos:** Investigación financiada por la ayuda PID2021-124472NB-I00 del proyecto financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por “FEDER Una manera de hacer Europa”; Grupo de Investigación FQM229 de la Junta de Andalucía y Centro de Investigación CDTIME de la Universidad de Almería.

MARTES, 23 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

SESIÓN ESPECIAL 2  
Polinomios ortogonales, funciones especiales y aplicaciones

TRUNCATED CLASSICAL ORTHOGONAL POLYNOMIALS

POLINOMIOS ORTOGONALES Y CADENAS DE MARKOV

ORTOGONALIDAD MÚLTIPLE MIXTA Y LA TEORÍA ESPECTRAL DE MATRICES BANDA ACOTADAS

LOS POLINOMIOS DE ZERNIKE Y LA VISUALIZACIÓN DE ESTRELLAS

MIXED-TYPE HYPERGEOMETRIC BERNULLI-GEIGENBAUER POLYNOMIALS: SOME PROPERTIES

ANÁLISIS ASINTÓTICO DE UNA FAMILIA DE POLINOMIOS ORTOGONALES  $q$ -SOBOLEV

CÁLCULO SIMBÓLICO DE UNA ECUACIÓN EN DIFERENCIAS DE SEGUNDO ORDEN...

A LANDIS-TYPE RESULT FOR THE SEMIDISCRETE HEAT EQUATION

APPROXIMATION BY POLYNOMIALS IN SOBOLEV SPACES ASSOCIATED WITH...

ON CMV MIXED MULTIPLE ORTHOGONAL LAURENT POLYNOMIALS ON THE UNIT CIRCLE

NEAREST NEIGHBOR RECURRENCE RELATIONS FOR SOME ANGELESCO MULTIPLE...

DISCRETE APPELL-DUNKL SEQUENCES

EL MÉTODO DE SADDLE POINT EN DOS O MÁS DIMENSIONES

NEW ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF TWO NEW SPECIAL FUNCTIONS

A GENERALIZATION OF THE LAPLACE'S METHOD FOR INTEGRALS

INTEGRALES ELÍPTICAS SIMÉTRICAS. ALGUNOS DESARROLLOS ANALÍTICOS PARA  $R_j(x, y, z, p)$

ALGORITMOS NUMÉRICOS Y SOFTWARE PARA LA EVALUACIÓN DE FUNCIONES ESPECIALES

EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LOS CEROS COMPLEJOS DE FUNCIONES DEL CILINDRO PARABÓLICO

EL TEOREMA DEL CÍRCULO EN LA CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE Y RELACIONES...

EXCEPTIONAL HAHN AND JACOBI POLYNOMIALS WITH AN ARBITRARY NUMBER...

## A Landis-type result for the semidiscrete heat equation

LUZ RONCAL

Basque Center for Applied Mathematics, Spain

[lrncal@bcamath.org](mailto:lrncal@bcamath.org)

**Abstract:** The goal of this talk is to show a Landis-type result for the semidiscrete heat equation: it will be shown that, under the assumption of two-time decaying conditions on the solution  $u$ , then necessarily  $u \equiv 0$ . Such conditions are formulated in terms of Macdonald's functions and are motivated by the fundamental solution of the semidiscrete heat equation.

In order to achieve the result, we will investigate quantitative upper and lower estimates for the  $L^2$ -norm of the solution within a spatial lattice  $(h\mathbb{Z})^d$ . These estimates manifest an interpolation phenomenon between continuum and discrete scales, showing that *close-to-continuous* and *purely discrete* regimes are different in nature.

Joint work with Aingeru Fernández-Bertolin and Diana Stan.

MARTES, 23 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

SESIÓN ESPECIAL 2  
Polinomios ortogonales, funciones especiales y aplicaciones

TRUNCATED CLASSICAL ORTHOGONAL POLYNOMIALS

POLINOMIOS ORTOGONALES Y CADENAS DE MARKOV

ORTOGONALIDAD MÚLTIPLE MIXTA Y LA TEORÍA ESPECTRAL DE MATRICES BANDA ACOTADAS

LOS POLINOMIOS DE ZERNIKE Y LA VISUALIZACIÓN DE ESTRELLAS

MIXED-TYPE HYPERGEOMETRIC BERNOULLI-GEIGENBAUER POLYNOMIALS: SOME PROPERTIES

ANÁLISIS ASINTÓTICO DE UNA FAMILIA DE POLINOMIOS ORTOGONALES  $\lambda$ -SOBOLEV

CÁLCULO SIMBÓLICO DE UNA ECUACIÓN EN DIFERENCIAS DE SEGUNDO ORDEN...

A LANDIS-TYPE RESULT FOR THE SEMIDISCRETE HEAT EQUATION

APPROXIMATION BY POLYNOMIALS IN SOBOLEV SPACES ASSOCIATED WITH...

ON CMV MIXED MULTIPLE ORTHOGONAL LAURENT POLYNOMIALS ON THE UNIT CIRCLE

NEAREST NEIGHBOR RECURRENCE RELATIONS FOR SOME ANGELESCO MULTIPLE...

DISCRETE APPELL-DUNKL SEQUENCES

EL MÉTODO DE SADDLE POINT EN DOS O MÁS DIMENSIONES

NEW ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF TWO NEW SPECIAL FUNCTIONS

A GENERALIZATION OF THE LAPLACE'S METHOD FOR INTEGRALS

INTEGRALES ELÍPTICAS SIMÉTRICAS. ALGUNOS DESARROLLOS ANALÍTICOS PARA  $R_1(x, y, z, p)$

ALGORITMOS NUMÉRICOS Y SOFTWARE PARA LA EVALUACIÓN DE FUNCIONES ESPECIALES

EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LOS CEROS COMPLEJOS DE FUNCIONES DEL CILINDRO PARABÓLICO

EL TEOREMA DEL CÍRCULO EN LA CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE Y RELACIONES...

EXCEPTIONAL HAHN AND JACOBI POLYNOMIALS WITH AN ARBITRARY NUMBER...

## Approximation by polynomials in Sobolev spaces associated with classical moment functionals

MISAEEL E. MARRIAGA, JUAN CARLOS GARCÍA-ARDILA

Departamento de Matemática Aplicada, Ciencia e Ingeniería de Materiales y Tecnología Electrónica,  
Universidad Rey Juan Carlos (Spain)  
[misael.marriaga@urjc.es](mailto:misael.marriaga@urjc.es)

**Abstract:** Let  $\mathbf{u}$  be a moment functional associated with the Hermite, Laguerre, or Jacobi classical orthogonal polynomials. We study approximation by polynomials in  $H^r(\mathbf{u})$ , the Sobolev space consisting of functions whose derivatives of consecutive orders up to  $r$  belong to the  $L^2$  space associated with  $\mathbf{u}$ . This requires the simultaneous approximation of a function  $f$  and its consecutive derivatives up to order  $N \leq r$ . We explicitly construct orthogonal polynomials that achieve such simultaneous approximation and provide error estimates in terms of  $E_n(f^{(r)})$ , the error of best approximation of  $f^{(r)}$  in  $L^2(\mathbf{u})$ .

MARTES, 23 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

SESIÓN ESPECIAL 2  
Polinomios ortogonales, funciones especiales y aplicaciones

TRUNCATED CLASSICAL ORTHOGONAL POLYNOMIALS

POLINOMIOS ORTOGONALES Y CADENAS DE MARKOV

ORTOGONALIDAD MÚLTIPLE MIXTA Y LA TEORÍA ESPECTRAL DE MATRICES BANDA ACOTADAS

LOS POLINOMIOS DE ZERNIKE Y LA VISUALIZACIÓN DE ESTRELLAS

MIXED-TYPE HYPERGEOMETRIC BERNOLLI-GEGENBAUER POLYNOMIALS: SOME PROPERTIES

ANÁLISIS ASINTÓTICO DE UNA FAMILIA DE POLINOMIOS ORTOGONALES  $\lambda$ -SOBOLEV

CÁLCULO SIMBÓLICO DE UNA ECUACIÓN EN DIFERENCIAS DE SEGUNDO ORDEN...

A LANDIS-TYPE RESULT FOR THE SEMIDISCRETE HEAT EQUATION

APPROXIMATION BY POLYNOMIALS IN SOBOLEV SPACES ASSOCIATED WITH...

ON CMV MIXED MULTIPLE ORTHOGONAL LAURENT POLYNOMIALS ON THE UNIT CIRCLE

NEAREST NEIGHBOR RECURRENCE RELATIONS FOR SOME ANGELESCO MULTIPLE...

DISCRETE APPELL-DUNKL SEQUENCES

EL MÉTODO DE SADDLE POINT EN DOS O MÁS DIMENSIONES

NEW ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF TWO NEW SPECIAL FUNCTIONS

A GENERALIZATION OF THE LAPLACE'S METHOD FOR INTEGRALS

INTEGRALES ELÍPTICAS SIMÉTRICAS. ALGUNOS DESARROLLOS ANALÍTICOS PARA  $R_j(X, Y, Z, P)$

ALGORITMOS NUMÉRICOS Y SOFTWARE PARA LA EVALUACIÓN DE FUNCIONES ESPECIALES

EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LOS CEROS COMPLEJOS DE FUNCIONES DEL CILINDRO PARABÓLICO

EL TEOREMA DEL CÍRCULO EN LA CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE Y RELACIONES...

EXCEPTIONAL HAHN AND JACOBI POLYNOMIALS WITH AN ARBITRARY NUMBER...

## On CMV mixed multiple orthogonal Laurent polynomials on the unit circle

EDMUNDO J. HUERTAS, MANUEL MAÑAS

Dpto. de Física y Matemáticas, Universidad de Alcalá. Campus Científico-Tecnológico  
Facultad de Ciencias. Alcalá de Henares, Madrid, Spain

[edmundo.huertas@uah.es](mailto:edmundo.huertas@uah.es)

**Abstract:** We explore two sets of CMV mixed multiple orthogonal Laurent polynomials on the step-line on the unit circle, through a Gauss–Borel decomposition of the corresponding moment matrix. We provide expressions for the matrix recurrence relations for both sets, as well as detailed orthogonality properties. The corresponding analysis of the Christoffel–Darboux kernels theory is performed, and connected with a complete description of the Christoffel and Geronimus transformations of the matrix of measures, which are given in terms of a diagonal perturbation matrix with prepared Laurent polynomials at their entries. These analysis lead to quasideterminantal Christoffel and Geronimus formulas for these transformations.

**Acknowledgments:** This research was conducted while EJH was visiting the ICMAT (Instituto de Ciencias Matemáticas) from jan-2023 to jan-2024, under the Program *Ayudas de Recualificación del Sistema Universitario Español para 2021-2023 (Convocatoria 2022) – R.D. 289/2021 de 20 de abril (BOE de 4 de junio de 2021)*. This author wish to thank the ICMAT, Universidad de Alcalá, and the Plan de Recuperación, Transformación y Resiliencia (NextGenerationEU) of the Spanish Government for their support.

MARTES, 23 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 2  
Polinomios ortogonales, funciones  
especiales y aplicaciones

TRUNCATED CLASSICAL ORTHOGONAL  
POLYNOMIALS

POLINOMIOS ORTOGONALES Y  
CADENAS DE MARKOV

ORTOGONALIDAD MÚLTIPLE MIXTA Y  
LA TEORÍA ESPECTRAL DE MATRICES  
BANDA ACOTADAS

LOS POLINOMIOS DE ZERNIKE Y LA  
VISUALIZACIÓN DE ESTRELLAS

MIXED-TYPE HYPERGEOMETRIC  
BERNOULLI-GEENBAUER  
POLYNOMIALS: SOME PROPERTIES

ANÁLISIS ASINTÓTICO DE  
UNA FAMILIA DE POLINOMIOS  
ORTOGONALES  $\alpha$ -SOBOLEV

CÁLCULO SIMBÓLICO DE UNA  
ECUACIÓN EN DIFERENCIAS DE  
SEGUNDO ORDEN...

A LANDIS-TYPE RESULT FOR THE  
SEMICONTINUOUS HEAT EQUATION

APPROXIMATION BY POLYNOMIALS  
IN SOBOLEV SPACES ASSOCIATED  
WITH...

ON CMV MIXED MULTIPLE  
ORTHOGONAL LAURENT POLYNOMIALS  
ON THE UNIT CIRCLE

NEAREST NEIGHBOR RECURRENCE  
RELATIONS FOR SOME ANGELESCO  
MULTIPLE...

DISCRETE APPELL-DUNKL SEQUENCES

EL MÉTODO DE SADDLE POINT EN DOS  
O MÁS DIMENSIONES

NEW ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF  
TWO NEW SPECIAL FUNCTIONS

A GENERALIZATION OF THE LAPLACE'S  
METHOD FOR INTEGRALS

INTEGRALES ELÍPTICAS SIMÉTRICAS.  
ALGUNOS DESARROLLOS ANALÍTICOS  
PARA  $R_j(x, y, z, p)$

ALGORITMOS NUMÉRICOS Y  
SOFTWARE PARA LA EVALUACIÓN DE  
FUNCIONES ESPECIALES

EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LOS  
CEROS COMPLEJOS DE FUNCIONES  
DEL CILINDRO PARABÓLICO

EL TEOREMA DEL CÍRCULO EN LA  
CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE Y  
RELACIONES...

EXCEPTIONAL HAHN AND JACOBI  
POLYNOMIALS WITH AN ARBITRARY  
NUMBER...

## Nearest neighbor recurrence relations for some Angelesco multiple orthogonal polynomials

J. ARVESÚ, A. J. QUINTERO-ROBA

Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid

jarvesu@math.uc3m.es

**Abstract:** This contribution studies some new families of Angelesco multiple orthogonal polynomials [1, 6] with shared orthogonality conditions with respect to a system of weight functions, which are complex analogues of Poisson and Pascal distributions on a legged star-like set [2, 3]. The emphasis is placed on the algebraic properties such as the zero location theorem, the raising operators, the Rodrigues-type formulas, and the explicit expressions of the polynomial families. Finally, the nearest neighbor recurrence relations are given. The used approach differs from those given in the continuous cases [4, 5].

### Referencias

- [1] A. Angelesco, Sur deux extensions des fractions continues algébriques (1919). Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 168, 262–265.
- [2] J. Arvesú, A. J. Quintero-Roba (2023). On Two families of Discrete Multiple Orthogonal Polynomials on a Star-like Set, Lobachevskii Journal of Mathematics, In press.
- [3] J. Arvesú, A. J. Quintero-Roba (2023). Nearest neighbor recurrence relations for Meixner-Angelesco multiple orthogonal polynomials of the second kind, Submitted.
- [4] M. Leurs, W. Van Assche (2020). Jacobi-Angelesco multiple orthogonal polynomials on an  $r$ -star, Constr. Approx., 51 353–381.
- [5] M. Leurs, W. Van Assche (2020). Laguerre-Angelesco multiple orthogonal polynomials on an  $r$ -star, J. Approx. Theory, 250 105324 30 pages.
- [6] E. M. Nikishin, V. N. Sorokin (1991). Rational Approximation and Orthogonality, Translations of Mathematical Monographs, 92, American Mathematical Society, Providence, RI.

**Acknowledgments:** J. Arvesú acknowledges support by Agencia Estatal de Investigación of Spain, grant number PID2021-122154NB-I00.

MARTES, 23 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 2  
Polinomios ortogonales, funciones especiales y aplicaciones

TRUNCATED CLASSICAL ORTHOGONAL POLYNOMIALS

POLINOMIOS ORTOGONALES Y CADENAS DE MARKOV

ORTOGONALIDAD MÚLTIPLE MIXTA Y LA TEORÍA ESPECTRAL DE MATRICES BANDA ACOTADAS

LOS POLINOMIOS DE ZERNIKE Y LA VISUALIZACIÓN DE ESTRELLAS

MIXED-TYPE HYPERGEOMETRIC BERNOULLI-GEIGENBAUER POLYNOMIALS: SOME PROPERTIES

ANÁLISIS ASINTÓTICO DE UNA FAMILIA DE POLINOMIOS ORTOGONALES  $\lambda$ -SOBOLEV

CÁLCULO SIMBÓLICO DE UNA ECUACIÓN EN DIFERENCIAS DE SEGUNDO ORDEN...

A LANDIS-TYPE RESULT FOR THE SEMIDISCRETE HEAT EQUATION

APPROXIMATION BY POLYNOMIALS IN SOBOLEV SPACES ASSOCIATED WITH...

ON CMV MIXED MULTIPLE ORTHOGONAL LAURENT POLYNOMIALS ON THE UNIT CIRCLE

NEAREST NEIGHBOR RECURRENCE RELATIONS FOR SOME ANGELESKO MULTIPLE...

DISCRETE APPELL-DUNKL SEQUENCES

EL MÉTODO DE SADDLE POINT EN DOS O MÁS DIMENSIONES

NEW ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF TWO NEW SPECIAL FUNCTIONS

A GENERALIZATION OF THE LAPLACE'S METHOD FOR INTEGRALS

INTEGRALES ELÍPTICAS SIMÉTRICAS. ALGUNOS DESARROLLOS ANALÍTICOS PARA  $R(x, y, z, p)$

ALGORITMOS NUMÉRICOS Y SOFTWARE PARA LA EVALUACIÓN DE FUNCIONES ESPECIALES

EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LOS CEROS COMPLEJOS DE FUNCIONES DEL CILINDRO PARABÓLICO

EL TEOREMA DEL CÍRCULO EN LA CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE Y RELACIONES...

EXCEPTIONAL HAHN AND JACOBI POLYNOMIALS WITH AN ARBITRARY NUMBER...

## Discrete Appell-Dunkl sequences

EDGAR LABARGA VARONA

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de la Rioja (Spain)

edgar.labarga@unirioja.es

**Abstract:** The corresponding discrete versions of the classical Bernoulli and Euler polynomials are the Bernoulli polynomials of the second kind and Boole polynomials. They are particular cases of discrete Appell sequences; that is, sequences of polynomials  $\{p_k\}_{k \geq 0}$  which satisfy

$$p_k(x+1) - p_k(x) = kp_{k-1}(x), \quad k \geq 1.$$

In this talk, we will introduce a generalization of these sets in the Dunkl context. The role of the ordinary translation will now be played by the Dunkl translation. As an application of this extension, we will define the Bernoulli-Dunkl and Boole-Dunkl polynomials.

MARTES, 23 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

SESIÓN ESPECIAL 2  
Polinomios ortogonales, funciones especiales y aplicaciones

TRUNCATED CLASSICAL ORTHOGONAL POLYNOMIALS

POLINOMIOS ORTOGONALES Y CADENAS DE MARKOV

ORTOGONALIDAD MÚLTIPLE MIXTA Y LA TEORÍA ESPECTRAL DE MATRICES BANDA ACOTADAS

LOS POLINOMIOS DE ZERNIKE Y LA VISUALIZACIÓN DE ESTRELLAS

MIXED-TYPE HYPERGEOMETRIC BERNOULLI-GEIGENBAUER POLYNOMIALS: SOME PROPERTIES

ANÁLISIS ASINTÓTICO DE UNA FAMILIA DE POLINOMIOS ORTOGONALES  $\lambda$ -SOBOLEV

CÁLCULO SIMBÓLICO DE UNA ECUACIÓN EN DIFERENCIAS DE SEGUNDO ORDEN...

A LANDIS-TYPE RESULT FOR THE SEMIDISCRETE HEAT EQUATION

APPROXIMATION BY POLYNOMIALS IN SOBOLEV SPACES ASSOCIATED WITH...

ON CMV MIXED MULTIPLE ORTHOGONAL LAURENT POLYNOMIALS ON THE UNIT CIRCLE

NEAREST NEIGHBOR RECURRENCE RELATIONS FOR SOME ANGELESKO MULTIPLE...

DISCRETE APPELL-DUNKL SEQUENCES

EL MÉTODO DE SADDLE POINT EN DOS O MÁS DIMENSIONES

NEW ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF TWO NEW SPECIAL FUNCTIONS

A GENERALIZATION OF THE LAPLACE'S METHOD FOR INTEGRALS

INTEGRALES ELÍPTICAS SIMÉTRICAS. ALGUNOS DESARROLLOS ANALÍTICOS PARA  $R_j(x, y, z, p)$

ALGORITMOS NUMÉRICOS Y SOFTWARE PARA LA EVALUACIÓN DE FUNCIONES ESPECIALES

EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LOS CEROS COMPLEJOS DE FUNCIONES DEL CILINDRO PARABÓLICO

EL TEOREMA DEL CÍRCULO EN LA CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE Y RELACIONES...

EXCEPTIONAL HAHN AND JACOBI POLYNOMIALS WITH AN ARBITRARY NUMBER...

## El método de *saddle point* en dos o más dimensiones

JOSÉ L. LÓPEZ

Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas, Universidad Pública de Navarra. INAMAT2  
[jl.lopez@unavarra.es](mailto:jl.lopez@unavarra.es)

**Resumen:** Todos los métodos asintóticos clásicos para integrales se formulan inicialmente para integrales uni-dimensionales. Posteriormente se generalizan a integrales dobles y múltiples en general. Con la excepción del famoso método de "saddle point" para integrales sobre caminos complejos, método muy utilizado en la aproximación de funciones especiales. Esto se debe a la imposibilidad de extender el concepto de *camino de máximo descenso* utilizado en el método en una dimensión al concepto de *superficie de máximo descenso* que habría que utilizar en integrales dobles, o en general *hipersuperficie de máximo descenso* que habría que utilizar en integrales múltiples. Y es imposible porque simplemente no existe tal concepto en 2 o más dimensiones complejas [1]. Por otra parte en [2] simplificamos el método de "saddle point" demostrando que podemos prescindir del tedioso y dificultoso cálculo del *camino de máximo descenso* y reemplazarlo por el sencillo y sistemático cálculo de la *recta de descenso*. Entonces, la pregunta natural es: ¿en lugar de intentar generalizar el método clásico de "saddle point", podríamos generalizar el método simplificado de "saddle point" de una a dos o más dimensiones? No existe en 2 o más dimensiones una superficie o hipersuperficie de máximo descenso, pero quizá no sea necesaria, bastando con un plano o hiper-plano de descenso. La respuesta es que parece ser que sí. En esta charla mostramos como dar los primeros pasos en esta dirección.

### Referencias

- [1] D. Kaminski (1990). On the n-variable saddle point and steepest descent methods. Lecture Notes Pure Appl. Math., 124. 627-637
- [2] J. L. López, P. Pagola and E. Pérez (2009). A systematization of the saddle point method. Application to the Airy and Hankel functions. J. Math. Anal. Appl., 354, 347-359.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 2  
Polinomios ortogonales, funciones especiales y aplicaciones

TRUNCATED CLASSICAL ORTHOGONAL POLYNOMIALS

POLINOMIOS ORTOGONALES Y CADENAS DE MARKOV

ORTOGONALIDAD MÚLTIPLE MIXTA Y LA TEORÍA ESPECTRAL DE MATRICES BANDA ACOTADAS

LOS POLINOMIOS DE ZERNIKE Y LA VISUALIZACIÓN DE ESTRELLAS

MIXED-TYPE HYPERGEOMETRIC BERNOULLI-GEIGENBAUER POLYNOMIALS: SOME PROPERTIES

ANÁLISIS ASINTÓTICO DE UNA FAMILIA DE POLINOMIOS ORTOGONALES  $q$ -SOBOLEV

CÁLCULO SIMBÓLICO DE UNA ECUACIÓN EN DIFERENCIAS DE SEGUNDO ORDEN...

A LANDIS-TYPE RESULT FOR THE SEMIDISCRETE HEAT EQUATION

APPROXIMATION BY POLYNOMIALS IN SOBOLEV SPACES ASSOCIATED WITH...

ON CMV MIXED MULTIPLE ORTHOGONAL LAURENT POLYNOMIALS ON THE UNIT CIRCLE

NEAREST NEIGHBOR RECURRENCE RELATIONS FOR SOME ANGELESCO MULTIPLE...

DISCRETE APPELL-DUNKL SEQUENCES

EL MÉTODO DE SADDLE POINT EN DOS O MÁS DIMENSIONES

NEW ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF TWO NEW SPECIAL FUNCTIONS

A GENERALIZATION OF THE LAPLACE'S METHOD FOR INTEGRALS

INTEGRALES ELÍPTICAS SIMÉTRICAS. ALGUNOS DESARROLLOS ANALÍTICOS PARA  $R_J(x, y, z, p)$

ALGORITMOS NUMÉRICOS Y SOFTWARE PARA LA EVALUACIÓN DE FUNCIONES ESPECIALES

EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LOS CEROS COMPLEJOS DE FUNCIONES DEL CILINDRO PARABÓLICO

EL TEOREMA DEL CÍRCULO EN LA CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE Y RELACIONES...

EXCEPTIONAL HAHN AND JACOBI POLYNOMIALS WITH AN ARBITRARY NUMBER...

## New asymptotic expansions of two new special functions: the $\mathcal{H}$ -function of communication theory and the Moench Integral Transform of Hydrology

ESTER PÉREZ SINUSÍA, CHELO FERREIRA, JOSÉ LUIS LÓPEZ, PEDRO PAGOLA

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza

[ester.perez@unizar.es](mailto:ester.perez@unizar.es)

**Abstract:** In this talk we derive asymptotic expansions of two new special functions: the  $\mathcal{H}$ -function of communication theory, which plays an important role in the error rate analysis in digital communication, and the Moench Integral Transform of Hydrology, useful to study the water level in aquifers. In both cases, we investigate asymptotic expansions in a region of the parameters that is of interest in practical situations, but that has not yet been analyzed. We provide explicit and/or recursive algorithms for the computation of the coefficients of the expansions. Numerical examples illustrate the accuracy of the approximations.

### Referencias

- [1] C. Ferreira, J. L. López, Ester Pérez Sinusía (2023). New series expansions for the  $\mathcal{H}$ -function of communication theory. *Integral Transforms and Special Functions*, published online, 1-15
- [2] J. L. Lopez, P. Pagola, Ester Pérez Sinusía (2023). Asymptotic Expansions for Moench's Integral Transform of Hydrology. *Integral Mathematics*, 11(14), 3053, 1-14.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

SESIÓN ESPECIAL 2  
Polinomios ortogonales, funciones  
especiales y aplicaciones

TRUNCATED CLASSICAL ORTHOGONAL  
POLYNOMIALS

POLINOMIOS ORTOGONALES Y  
CADENAS DE MARKOV

ORTOGONALIDAD MÚLTIPLE MIXTA Y  
LA TEORÍA ESPECTRAL DE MATRICES  
BANDA ACOTADAS

LOS POLINOMIOS DE ZERNIKE Y LA  
VISUALIZACIÓN DE ESTRELLAS

MIXED-TYPE HYPERGEOMETRIC  
BERNOULLI-GEIGENBAUER  
POLYNOMIALS: SOME PROPERTIES

ANÁLISIS ASINTÓTICO DE  
UNA FAMILIA DE POLINOMIOS  
ORTOGONALES  $\alpha$ -SOBOLEV

CÁLCULO SIMBÓLICO DE UNA  
ECUACIÓN EN DIFERENCIAS DE  
SEGUNDO ORDEN...

A LANDIS-TYPE RESULT FOR THE  
SEMI-DISCRETE HEAT EQUATION

APPROXIMATION BY POLYNOMIALS  
IN SOBOLEV SPACES ASSOCIATED  
WITH...

ON CMV MIXED MULTIPLE  
ORTHOGONAL LAURENT POLYNOMIALS  
ON THE UNIT CIRCLE

NEAREST NEIGHBOR RECURRENCE  
RELATIONS FOR SOME ANGELESCO  
MULTIPLE...

DISCRETE APPELL-DUNKL SEQUENCES

EL MÉTODO DE SADDLE POINT EN DOS  
O MÁS DIMENSIONES

NEW ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF  
TWO NEW SPECIAL FUNCTIONS

A GENERALIZATION OF THE LAPLACE'S  
METHOD FOR INTEGRALS

INTEGRALES ELÍPTICAS SIMÉTRICAS.  
ALGUNOS DESARROLLOS ANALÍTICOS  
PARA  $R_j(x, y, z, p)$

ALGORITMOS NUMÉRICOS Y  
SOFTWARE PARA LA EVALUACIÓN DE  
FUNCIONES ESPECIALES

EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LOS  
CEROS COMPLEJOS DE FUNCIONES  
DEL CILINDRO PARABÓLICO

EL TEOREMA DEL CÍRCULO EN LA  
CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE Y  
RELACIONES...

EXCEPTIONAL HAHN AND JACOBI  
POLYNOMIALS WITH AN ARBITRARY  
NUMBER...



## A generalization of the Laplace's method for integrals

PABLO PALACIOS, JOSÉ L. LÓPEZ, PEDRO J. PAGOLA

Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas, Universidad Pública de Navarra, INAMAT2  
[pablo.palacios@unavarra.es](mailto:pablo.palacios@unavarra.es)

**Abstract:** In [1] a modification of the Laplace's method for deriving asymptotic expansions of Laplace integrals was introduced. This modification simplifies the computations, giving explicit formulas for the coefficients of the expansion. On the other hand, motivated by the approximation of special functions with two asymptotic parameters, Nemes [2] has generalized Laplace's method by considering Laplace integrals with a linear dependence of the phase function on two asymptotic parameters of a different asymptotic order.

In this talk, we investigate if the simplifying ideas introduced in [1] for Laplace integrals with one large parameter may also be applied to the more general Laplace integrals considered in Nemes's theory. We show not only that the answer is yes, but also that those simplifying ideas can be applied to more general Laplace integrals where the phase function depends on the asymptotic variable in a more general way. We derive new asymptotic expansions for this more general kind of integrals with simple formulas for the coefficients of the expansion. In particular, this theory can be applied to special functions with two or more large parameters of a different asymptotic order. We give some examples of special functions that illustrate the theory.

### Referencias

- [1] J. L. Lopez, P. J. Pagola, E. Pérez Sinusía (2009). A simplification of Laplace's method: applications to the gamma function and Gauss hypergeometric function. *J. Approx. Theory*, 161, no.1, 280-291.
- [2] G. Nemes (2020). An extension of Laplace's method. *Constr. Approx.*, 51, no.2, 247-272.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

SESIÓN ESPECIAL 2  
Polinomios ortogonales, funciones especiales y aplicaciones

TRUNCATED CLASSICAL ORTHOGONAL POLYNOMIALS

POLINOMIOS ORTOGONALES Y CADENAS DE MARKOV

ORTOGONALIDAD MÚLTIPLE MIXTA Y LA TEORÍA ESPECTRAL DE MATRICES BANDA ACOTADAS

LOS POLINOMIOS DE ZERNIKE Y LA VISUALIZACIÓN DE ESTRELLAS

MIXED-TYPE HYPERGEOMETRIC BERNOLLI-GEIGENBAUER POLYNOMIALS: SOME PROPERTIES

ANÁLISIS ASINTÓTICO DE UNA FAMILIA DE POLINOMIOS ORTOGONALES  $\alpha$ -SOBOLEV

CÁLCULO SIMBÓLICO DE UNA ECUACIÓN EN DIFERENCIAS DE SEGUNDO ORDEN...

A LANDIS-TYPE RESULT FOR THE SEMIDISCRETE HEAT EQUATION

APPROXIMATION BY POLYNOMIALS IN SOBOLEV SPACES ASSOCIATED WITH...

ON CMV MIXED MULTIPLE ORTHOGONAL LAURENT POLYNOMIALS ON THE UNIT CIRCLE

NEAREST NEIGHBOR RECURRENCE RELATIONS FOR SOME ANGELESCO MULTIPLE...

DISCRETE APPELL-DUNKL SEQUENCES

EL MÉTODO DE SADDLE POINT EN DOS O MÁS DIMENSIONES

NEW ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF TWO NEW SPECIAL FUNCTIONS

A GENERALIZATION OF THE LAPLACE'S METHOD FOR INTEGRALS

INTEGRALES ELÍPTICAS SIMÉTRICAS. ALGUNOS DESARROLLOS ANALÍTICOS PARA  $R_J(x, y, z, p)$

ALGORITMOS NUMÉRICOS Y SOFTWARE PARA LA EVALUACIÓN DE FUNCIONES ESPECIALES

EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LOS CEROS COMPLEJOS DE FUNCIONES DEL CILINDRO PARABÓLICO

EL TEOREMA DEL CÍRCULO EN LA CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE Y RELACIONES...

EXCEPTIONAL HAHN AND JACOBI POLYNOMIALS WITH AN ARBITRARY NUMBER...

## Integrales Elípticas simétricas. Algunos desarrollos analíticos para $R_J(x, y, z, p)$

BLANCA BUJANDA, JOSÉ LUIS LÓPEZ, PEDRO PAGOLA, PABLO PALACIOS  
Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas, Universidad Pública de Navarra, INAMAT2  
blanca.bujanda@unavarra.es

**Resumen:** En 1828 Legendre publicó un libro (ver [3]) considerado como el origen histórico de las funciones especiales denominadas en general *Integrales elípticas*, este tratado surge con la idea de aproximar, de alguna manera eficiente, la longitud de una elipse; una idea tan concreta dió pie a un conjunto de funciones especiales de gran interés en la actualidad ya que se ha visto aparecen en un elevado número de problemas de la física y de las matemáticas.

La falta de desarrollos adecuados (asintóticos, uniformemente convergentes,...) que permitan trabajar con las funciones especiales en diferentes situaciones es un problema matemático habitual. El objeto de esta presentación es mostrar las líneas principales de un estudio realizado por los autores sobre desarrollos analíticos aplicables a las integrales elípticas escritas en la forma de Carlson (ver [2]) que permitan la aproximación de dichas funciones. Siguiendo la idea básica desarrollada en [1] para la primera integral elíptica simétrica  $R_F(x, y, z)$  los autores realizaron el estudio de la segunda (la  $R_D(x, y, z)$  y algunas funciones similares como casos particulares de la función de Appell). Con el fin de seguir completando el trabajo sobre integrales elípticas y determinar desarrollos analíticos adecuados para ellas se mostrarán los encontrados para  $R_J(x, y, z, p)$ .

### Referencias

- [1] B. Bujanda, J.L. López, P. Pagola, P. Palacios (2022). Uniform approximations of the first symmetric elliptic integral in terms of elementary functions Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM 116 (1), Paper No. 4, 17 pp.
- [2] B.C. Carlson. NIST. Chapter 19. Elliptic Integrals.
- [3] A.M. Legendre (1825). *Traité des Fonctions Elliptiques*. Huzard-Courcier, Paris.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

SESIÓN ESPECIAL 2  
Polinomios ortogonales, funciones especiales y aplicaciones

TRUNCATED CLASSICAL ORTHOGONAL POLYNOMIALS

POLINOMIOS ORTOGONALES Y CADENAS DE MARKOV

ORTOGONALIDAD MÚLTIPLE MIXTA Y LA TEORÍA ESPECTRAL DE MATRICES BANDA ACOTADAS

LOS POLINOMIOS DE ZERNIKE Y LA VISUALIZACIÓN DE ESTRELLAS

MIXED-TYPE HYPERGEOMETRIC BERNOLLI-GEIGENBAUER POLYNOMIALS: SOME PROPERTIES

ANÁLISIS ASINTÓTICO DE UNA FAMILIA DE POLINOMIOS ORTOGONALES  $\alpha$ -SOBOLEV

CÁLCULO SIMBÓLICO DE UNA ECUACIÓN EN DIFERENCIAS DE SEGUNDO ORDEN...

A LANDIS-TYPE RESULT FOR THE SEMIDISCRETE HEAT EQUATION

APPROXIMATION BY POLYNOMIALS IN SOBOLEV SPACES ASSOCIATED WITH...

ON CMV MIXED MULTIPLE ORTHOGONAL LAURENT POLYNOMIALS ON THE UNIT CIRCLE

NEAREST NEIGHBOR RECURRENCE RELATIONS FOR SOME ANGELESCO MULTIPLE...

DISCRETE APPELL-DUNKL SEQUENCES

EL MÉTODO DE SADDLE POINT EN DOS O MÁS DIMENSIONES

NEW ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF TWO NEW SPECIAL FUNCTIONS

A GENERALIZATION OF THE LAPLACE'S METHOD FOR INTEGRALS

INTEGRALES ELÍPTICAS SIMÉTRICAS. ALGUNOS DESARROLLOS ANALÍTICOS PARA  $R_J(x, y, z, p)$

ALGORITMOS NUMÉRICOS Y SOFTWARE PARA LA EVALUACIÓN DE FUNCIONES ESPECIALES

EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LOS CEROS COMPLEJOS DE FUNCIONES DEL CILINDRO PARABÓLICO

EL TEOREMA DEL CÍRCULO EN LA CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE Y RELACIONES...

EXCEPTIONAL HAHN AND JACOBI POLYNOMIALS WITH AN ARBITRARY NUMBER...

## Algoritmos numéricos y software para la evaluación de funciones especiales: qué hay de nuevo y qué se necesita

AMPARO GIL, JAVIER SEGURA, NICO M. TEMME

Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación, Universidad de Cantabria  
 amparo.gil@unican.es

**Resumen:** En esta charla haremos un resumen de algoritmos recientes desarrollados por nuestro grupo enfocados a la evaluación de funciones hipergeométricas confluentes, integrales de Fermi-Dirac y funciones de distribución de probabilidad. Adicionalmente, haremos un rápido repaso de una selección de algoritmos disponibles en las librerías de software matemático para calcular funciones especiales y discutiremos algunos de los aspectos que quedan por abordar y los retos que plantean.

### Referencias

- [1] A. Gil, D. Ruiz-Antolín, J. Segura, N. M. Temme. (2023). Computation of the confluent hypergeometric function  $U(a, b, x)$  and its derivative for positive arguments. *Numerical Algorithms* 94, 669–679.
- [2] V. Egorova, A. Gil, J. Segura, N. M. Temme. (2023). Computation of the regularized incomplete Beta function. *Dolomites Research Notes on Approximation* 16(3) 10-16.
- [3] Gil, A. Odrzywolek, J. Segura, N.M. Temme. (2023) Evaluation of the generalized Fermi-Dirac integral and its derivatives for moderate/large values of the parameters. *A. Computer Physics Communications* 283, 108563

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

SESIÓN ESPECIAL 2  
Polinomios ortogonales, funciones especiales y aplicaciones

TRUNCATED CLASSICAL ORTHOGONAL POLYNOMIALS

POLINOMIOS ORTOGONALES Y CADENAS DE MARKOV

ORTOGONALIDAD MÚLTIPLE MIXTA Y LA TEORÍA ESPECTRAL DE MATRICES BANDA ACOTADAS

LOS POLINOMIOS DE ZERNIKE Y LA VISUALIZACIÓN DE ESTRELLAS

MIXED-TYPE HYPERGEOMETRIC BERNOULLI-GEIGENBAUER POLYNOMIALS: SOME PROPERTIES

ANÁLISIS ASINTÓTICO DE UNA FAMILIA DE POLINOMIOS ORTOGONALES  $\lambda$ -SOBOLEV

CÁLCULO SIMBÓLICO DE UNA ECUACIÓN EN DIFERENCIAS DE SEGUNDO ORDEN...

A LANDIS-TYPE RESULT FOR THE SEMIDISCRETE HEAT EQUATION

APPROXIMATION BY POLYNOMIALS IN SOBOLEV SPACES ASSOCIATED WITH...

ON CMV MIXED MULTIPLE ORTHOGONAL LAURENT POLYNOMIALS ON THE UNIT CIRCLE

NEAREST NEIGHBOR RECURRENCE RELATIONS FOR SOME ANGELESCO MULTIPLE...

DISCRETE APPELL-DUNKL SEQUENCES

EL MÉTODO DE SADDLE POINT EN DOS O MÁS DIMENSIONES

NEW ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF TWO NEW SPECIAL FUNCTIONS

A GENERALIZATION OF THE LAPLACE'S METHOD FOR INTEGRALS

INTEGRALES ELÍPTICAS SIMÉTRICAS. ALGUNOS DESARROLLOS ANALÍTICOS PARA  $R_J(X, Y, Z, P)$

ALGORITMOS NUMÉRICOS Y SOFTWARE PARA LA EVALUACIÓN DE FUNCIONES ESPECIALES

EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LOS CEROS COMPLEJOS DE FUNCIONES DEL CILINDRO PARABÓLICO

EL TEOREMA DEL CÍRCULO EN LA CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE Y RELACIONES...

EXCEPTIONAL HAHN AND JACOBI POLYNOMIALS WITH AN ARBITRARY NUMBER...

## Evaluación numérica de los ceros complejos de funciones del cilindro parabólico

DIEGO RUIZ-ANTOLIN, AMPARO GIL, JAVIER SEGURA, T. MARK DUNSTER

Departamento de Matemática Aplicada y CC. de la Computación. Universidad de Cantabria

diego.ruizantolin@unican.es

**Resumen:** En esta charla discutimos la evaluación numérica de los ceros complejos de funciones del cilindro parabólico. En nuestro análisis usamos la combinación de los métodos numéricos descritos en [1] y el método para obtener ceros complejos de soluciones de EDOs de segundo orden introducido en [2]. Este método hace uso de un análisis cualitativo de las líneas aproximadas de Stokes y anti-Stokes (la estructura de los ceros exactos sigue de forma muy aproximada las líneas de anti-Stokes) que se combina con la aplicación de un método de punto fijo de orden cuarto y el uso de funciones de paso cuidadosamente escogidas. La precisión de las aproximaciones numéricas que obtenemos (que se implementan en un algoritmo Matlab) para los ceros de las funciones del cilindro parabólico se compara con aproximaciones asintóticas para estos ceros que involucran ceros de funciones de Airy.

### Referencias

- [1] T. Dunster, A. Gil, J. Segura (2023). Computation of parabolic cylinder functions having complex argument. *Enviado*.
- [2] J. Segura (2013). Computing the complex zeros of special functions. *Numer. Math.*, 124, 723–752.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 2  
Polinomios ortogonales, funciones especiales y aplicaciones

TRUNCATED CLASSICAL ORTHOGONAL POLYNOMIALS

POLINOMIOS ORTOGONALES Y CADENAS DE MARKOV

ORTOGONALIDAD MÚLTIPLE MIXTA Y LA TEORÍA ESPECTRAL DE MATRICES BANDA ACOTADAS

LOS POLINOMIOS DE ZERNIKE Y LA VISUALIZACIÓN DE ESTRELLAS

MIXED-TYPE HYPERGEOMETRIC BERNOULLI-GEIGENBAUER POLYNOMIALS: SOME PROPERTIES

ANÁLISIS ASINTÓTICO DE UNA FAMILIA DE POLINOMIOS ORTOGONALES  $\lambda$ -SOBOLEV

CÁLCULO SIMBÓLICO DE UNA ECUACIÓN EN DIFERENCIAS DE SEGUNDO ORDEN...

A LANDIS-TYPE RESULT FOR THE SEMIDISCRETE HEAT EQUATION

APPROXIMATION BY POLYNOMIALS IN SOBOLEV SPACES ASSOCIATED WITH...

ON CMV MIXED MULTIPLE ORTHOGONAL LAURENT POLYNOMIALS ON THE UNIT CIRCLE

NEAREST NEIGHBOR RECURRENCE RELATIONS FOR SOME ANGELESCO MULTIPLE...

DISCRETE APPELL-DUNKL SEQUENCES

EL MÉTODO DE SADDLE POINT EN DOS O MÁS DIMENSIONES

NEW ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF TWO NEW SPECIAL FUNCTIONS

A GENERALIZATION OF THE LAPLACE'S METHOD FOR INTEGRALS

INTEGRALES ELÍPTICAS SIMÉTRICAS. ALGUNOS DESARROLLOS ANALÍTICOS PARA  $R_j(x, y, z, p)$

ALGORITMOS NUMÉRICOS Y SOFTWARE PARA LA EVALUACIÓN DE FUNCIONES ESPECIALES

EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LOS CEROS COMPLEJOS DE FUNCIONES DEL CILINDRO PARABÓLICO

EL TEOREMA DEL CÍRCULO EN LA CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE Y RELACIONES...

EXCEPTIONAL HAHN AND JACOBI POLYNOMIALS WITH AN ARBITRARY NUMBER...

## El teorema del círculo en la cuadratura de Gauss-Legendre y relaciones uniformes entre nodos y pesos

JAVIER SEGURA, ÓSCAR LÓPEZ POUISO

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria

[javier.segura@unican.es](mailto:javier.segura@unican.es)

**Resumen:** El teorema del círculo es un resultado clásico de la cuadratura Gaussiana [1] que, en su versión para la cuadratura de Gauss-Legendre, establece que, dado cualquier compacto  $\Delta \subset (-1, 1)$ , para todos los nodos  $x_i \in \Delta$  y sus correspondientes pesos  $w_i$  se cumple que

$$\frac{nw_i}{\pi\sqrt{1-x_i^2}} \sim 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

siendo  $n$  el número de nodos (y pesos). La condición de que sean nodos en un compacto  $\Delta \subset (-1, 1)$  es importante ya que, como se discutirá, la relación no es válida para los nodos extremos (que tienden a  $+1$  o  $-1$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ). En esta charla se discuten otro tipo de relaciones entre nodos y pesos que sí se cumplen uniformemente para todos los nodos y pesos en  $(-1, 1)$ . Estas relaciones son condiciones necesarias para la convergencia de orden de 2 de ciertos métodos de diferencias finitas basados en mallados de Gauss-Legendre y utilizados en la discretización del operador de difusión angular de Fokker-Planck [2].

### Referencias

- [1] P. J. Davis and P. Rabinowitz. Some geometrical theorems for abscissas and weights of Gauss type. *J. Math. Anal. Appl.*, 2:428–437, 1961.
- [2] O. López Pouso, J. Segura. Uniform relations between the Gauss-Legendre nodes and weights. Enviado. <https://arxiv.org/abs/2305.19128>

JUEVES, 25 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 2  
Polinomios ortogonales, funciones especiales y aplicaciones

TRUNCATED CLASSICAL ORTHOGONAL POLYNOMIALS

POLINOMIOS ORTOGONALES Y CADENAS DE MARKOV

ORTOGONALIDAD MÚLTIPLE MIXTA Y LA TEORÍA ESPECTRAL DE MATRICES BANDA ACOTADAS

LOS POLINOMIOS DE ZERNIKE Y LA VISUALIZACIÓN DE ESTRELLAS

MIXED-TYPE HYPERGEOMETRIC BERNOULLI-GEIGENBAUER POLYNOMIALS: SOME PROPERTIES

ANÁLISIS ASINTÓTICO DE UNA FAMILIA DE POLINOMIOS ORTOGONALES  $\lambda$ -SOBOLEV

CÁLCULO SIMBÓLICO DE UNA ECUACIÓN EN DIFERENCIAS DE SEGUNDO ORDEN...

A LANDIS-TYPE RESULT FOR THE SEMIDISCRETE HEAT EQUATION

APPROXIMATION BY POLYNOMIALS IN SOBOLEV SPACES ASSOCIATED WITH...

ON CMV MIXED MULTIPLE ORTHOGONAL LAURENT POLYNOMIALS ON THE UNIT CIRCLE

NEAREST NEIGHBOR RECURRENCE RELATIONS FOR SOME ANGELESKO MULTIPLE...

DISCRETE APPELL-DUNKL SEQUENCES

EL MÉTODO DE SADDLE POINT EN DOS O MÁS DIMENSIONES

NEW ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF TWO NEW SPECIAL FUNCTIONS

A GENERALIZATION OF THE LAPLACE'S METHOD FOR INTEGRALS

INTEGRALES ELÍPTICAS SIMÉTRICAS. ALGUNOS DESARROLLOS ANALÍTICOS PARA  $R_J(X, Y, Z, P)$

ALGORITMOS NUMÉRICOS Y SOFTWARE PARA LA EVALUACIÓN DE FUNCIONES ESPECIALES

EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LOS CEROS COMPLEJOS DE FUNCIONES DEL CILINDRO PARABÓLICO

EL TEOREMA DEL CÍRCULO EN LA CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE Y RELACIONES...

EXCEPTIONAL HAHN AND JACOBI POLYNOMIALS WITH AN ARBITRARY NUMBER...

## Exceptional Hahn and Jacobi polynomials with an arbitrary number of continuous parameters

ANTONIO J. DURÁN

Departamento Análisis Matemático, Universidad de Sevilla

duran@us.es

**Abstract:** We construct new examples of exceptional Hahn and Jacobi polynomials [1]. Exceptional polynomials are orthogonal polynomials with respect to a positive measure which are also eigenfunctions of a second order difference or differential operator. In mathematical physics, they allow the explicit computation of bound states of rational extensions of classical quantum-mechanical potentials. The most apparent difference between classical or classical discrete orthogonal polynomials and their exceptional counterparts is that the exceptional families have gaps in their degrees, in the sense that not all degrees are present in the sequence of polynomials. The new examples have the novelty that they depend on an arbitrary number of continuous parameters. These families are constructed by using the new families of Krall dual Hahn polynomials depending on an arbitrary number of continuous parameters introduced in [2]. Krall polynomials are orthogonal polynomials which are eigenfunctions of a higher order differential or difference operator. The new Krall dual Hahn families provide further examples for the problem explicitly posed by Richard Askey in 1991.

### Referencias

- [1] A. J. Durán (2021). Exceptional Hahn and Jacobi polynomials with an arbitrary number of continuous parameters, *Studies in Applied Mathematics* 12451.
- [2] A. J. Durán (2022). Bispectral dual Hahn polynomials with an arbitrary number of continuous parameters, *Journal of Approximation Theory*, 283, 105811.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

SESIÓN ESPECIAL 2  
Polinomios ortogonales, funciones especiales y aplicaciones

TRUNCATED CLASSICAL ORTHOGONAL POLYNOMIALS

POLINOMIOS ORTOGONALES Y CADENAS DE MARKOV

ORTOGONALIDAD MÚLTIPLE MIXTA Y LA TEORÍA ESPECTRAL DE MATRICES BANDA ACOTADAS

LOS POLINOMIOS DE ZERNIKE Y LA VISUALIZACIÓN DE ESTRELLAS

MIXED-TYPE HYPERGEOMETRIC BERNOULLI-GEIGENBAUER POLYNOMIALS: SOME PROPERTIES

ANÁLISIS ASINTÓTICO DE UNA FAMILIA DE POLINOMIOS ORTOGONALES  $\lambda$ -SOBOLEV

CÁLCULO SIMBÓLICO DE UNA ECUACIÓN EN DIFERENCIAS DE SEGUNDO ORDEN...

A LANDIS-TYPE RESULT FOR THE SEMIDISCRETE HEAT EQUATION

APPROXIMATION BY POLYNOMIALS IN SOBOLEV SPACES ASSOCIATED WITH...

ON CMV MIXED MULTIPLE ORTHOGONAL LAURENT POLYNOMIALS ON THE UNIT CIRCLE

NEAREST NEIGHBOR RECURRENCE RELATIONS FOR SOME ANGELESCO MULTIPLE...

DISCRETE APPELL-DUNKL SEQUENCES

EL MÉTODO DE SADDLE POINT EN DOS O MÁS DIMENSIONES

NEW ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF TWO NEW SPECIAL FUNCTIONS

A GENERALIZATION OF THE LAPLACE'S METHOD FOR INTEGRALS

INTEGRALES ELÍPTICAS SIMÉTRICAS. ALGUNOS DESARROLLOS ANALÍTICOS PARA  $R_1(x, y, z, p)$

ALGORITMOS NUMÉRICOS Y SOFTWARE PARA LA EVALUACIÓN DE FUNCIONES ESPECIALES

EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LOS CEROS COMPLEJOS DE FUNCIONES DEL CILINDRO PARABÓLICO

EL TEOREMA DEL CÍRCULO EN LA CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE Y RELACIONES...

EXCEPTIONAL HAHN AND JACOBI POLYNOMIALS WITH AN ARBITRARY NUMBER...

## SESIÓN ESPECIAL 3

### Álgebras no Asociativas

**Organizadores:**

**YOLANDA CABRERA CASADO**

(Universidad de Málaga)

**IVÁN RUIZ CAMPOS**

(Universidad de Málaga)

#### Descripción:

El campo de investigación del álgebra no asociativa ha sido muy desarrollado desde hace décadas. Su aparición en los años 30, cuando fueron definidos dos de los principales tipos: las álgebras de Lie y las de Jordan, se debe a problemas relacionados con las Ecuaciones Diferenciales y la Física. Un ejemplo de álgebras no asociativas recién introducidas son las álgebras de la evolución. Este tipo de álgebras genéticas surgieron con el objetivo de modelar la genética no-Mendeliana. Las álgebras no asociativas han contribuido a resolver problemas de otros campos como la Teoría de Grupos y la Geometría Algebraica. En esta sesión se reúne a un grupo de conferenciantes con el objetivo de fomentar colaboraciones y formar grupos de investigación. Así como el dar a conocer a la comunidad matemática asistente al encuentro, los temas que se trabajan en esta área y su interacción con otras ramas de la matemática.

SESIÓN ESPECIAL 3  
 Álgebras no Asociativas

g2 COMO ANILLO GRUPO TORCIDO

A UNIVERSAL KALIZHNIK-KRASNER  
 EMBEDDING THEOREM

ON THE SIMPLE TRANSPOSED  
 POISSON ALGEBRAS

LOCAL SUPERDERIVATIONS  
 ON SOLVABLE LIE AND LEIBNIZ  
 SUPERALGEBRAS

IDENTIDADES DIFERENCIALES DE LAS  
 ALGEBRAS DE MATRICES

AUTOMORPHISM GROUP SCHEMES OF  
 SOME SIMPLE JORDAN PAIRS

SUPERPOTENCIAS ALTERNADAS Y  
 SIMÉTRICAS DE SUPERPARES DE  
 JORDAN GENERALIZADOS MÉTRICOS

ÁLGEBRAS DE COCIENTES DE  
 ALGEBRAS LOCALES

DESCOMPOSICIÓN DE  
 ENDOMORFISMOS NILPOTENTES EN  
 SUMA DE RAÍCES...

SOBRE EL RETÍCULO DE  
 SUBÁLGEBRAS EN ÁLGEBRAS DE  
 EVOLUCIÓN

CONSTRUCTIONS ON N-GRADED LIE  
 ALGEBRAS

DECONSTRUYENDO ÁLGEBRAS DE LIE  
 CUADRÁTICAS

## $\mathfrak{g}_2$ como anillo grupo torcido

CRISTINA DRAPER

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad de Málaga  
cdf@uma.es

**Resumen:** El objetivo es presentar la construcción [1] del álgebra de Lie compacta excepcional  $\mathfrak{g}_2$  como un anillo grupo torcido para el grupo  $\mathbb{Z}_2^3$  y el anillo  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ . El modelo es autocontenido, lo que permite trabajar con  $\mathfrak{g}_2$  sin conocimientos algebraicos previos sobre sistemas de raíces, derivaciones de octoniones o productos vectoriales en  $\mathbb{R}^7$ . En particular, esta construcción proporciona una base ortogonal de elementos semisimples de  $\mathfrak{g}_2$  con constantes de estructura enteras.

### Referencias

- [1] C. Draper (2023). The compact exceptional Lie algebra  $\mathfrak{g}_2^c$  as a twisted ring group. Preprint arXiv:2307.12086 [math.RA].

SESIÓN ESPECIAL 3  
Álgebras no Asociativas

$\mathfrak{g}_2$  COMO ANILLO GRUPO TORCIDO

A UNIVERSAL KALIZHNIK-KRASNER  
EMBEDDING THEOREM

ON THE SIMPLE TRANSPOSED  
POISSON ALGEBRAS

LOCAL SUPERDERIVATIONS  
ON SOLVABLE LIE AND LEIBNIZ  
SUPERALGEBRAS

IDENTIDADES DIFERENCIALES DE LAS  
ÁLGEBRAS DE MATRICES

AUTOMORPHISM GROUP SCHEMES OF  
SOME SIMPLE JORDAN PAIRS

SUPERPOTENCIAS ALTERNADAS Y  
SIMÉTRICAS DE SUPERPARES DE  
JORDAN GENERALIZADOS MÉTRICOS

ÁLGEBRAS DE COCIENTES DE  
ÁLGEBRAS LOCALES

DESCOMPOSICIÓN DE  
ENDOMORFISMOS NILPOTENTES EN  
SUMA DE RAÍCES...

SOBRE EL RETÍCULO DE  
SUBÁLGEBRAS EN ÁLGEBRAS DE  
EVOLUCIÓN

CONSTRUCTIONS ON N-GRADED LIE  
ALGEBRAS

DECONSTRUYENDO ÁLGEBRAS DE LIE  
CUADRÁTICAS

LUNES, 22 DE ENERO:  
16:00 – 16:30



## A universal Kaluzhnin–Krasner embedding theorem

XABIER GARCÍA MARTÍNEZ

CITMAga y Universidade de Vigo

[xabier.garcia.martinez@uvigo.gal](mailto:xabier.garcia.martinez@uvigo.gal)

**Abstract:** Given two groups  $A$  and  $B$ , the *Kaluzhnin–Krasner universal embedding theorem* states that the wreath product  $A \wr B$  acts as a universal receptacle for extensions from  $A$  to  $B$  [2]. For a split extension, this embedding is compatible with the canonical splitting of the wreath product, which is further universal in a precise sense. This result was recently extended to Lie algebras [3] and cocommutative Hopf algebras [1].

In this talk, we will explore the feasibility of adapting the theorem to other types of algebraic structures. By explaining the underlying unity of the three known cases, our analysis gives the necessary and sufficient conditions for this to happen.

We will also see that the theorem cannot be adapted to a wide range of categories, such as loops, associative algebras, commutative algebras or Jordan algebras. Working over an infinite field, we may prove that amongst non-associative algebras, only Lie algebras admit a Kaluzhnin–Krasner theorem.

### Referencias

- [1] L. Bartholdi, O. Siegenthaler, T. Trimble (2014). Wreath products of cocommutative Hopf algebras. arXiv:1407.3835.
- [2] M. Krasner, L. Kaloujnine (1950). Produit complet de groupes de permutations et problème d’extension de groupes II. Acta Universitatis Szegediensis, 14, 69–82.
- [3] V. M. Petrogradsky, Yu. P. Razmyslov, E. O. Shishkin (2007). Wreath products and Kaluzhnin–Krasner embedding for Lie algebras. Proceedings of the American Mathematical Society, 135(3), 625–636.

LUNES, 22 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 3  
Álgebras no Asociativas

g2 COMO ANILLO GRUPO TORCIDO

A UNIVERSAL KALUZHNIK–KRASNER  
EMBEDDING THEOREM

ON THE SIMPLE TRANSPOSED  
POISSON ALGEBRAS

LOCAL SUPERDERIVATIONS  
ON SOLVABLE LIE AND LEIBNIZ  
SUPERALGEBRAS

IDENTIDADES DIFERENCIALES DE LAS  
ÁLGEBRAS DE MATRICES

AUTOMORPHISM GROUP SCHEMES OF  
SOME SIMPLE JORDAN PAIRS

SUPERPOTENCIAS ALTERNADAS Y  
SIMÉTRICAS DE SUPERPARES DE  
JORDAN GENERALIZADOS MÉTRICOS

ÁLGEBRAS DE COCIENTES DE  
ÁLGEBRAS LOCALES

DESCOMPOSICIÓN DE  
ENDOMORFISMOS NILPOTENTES EN  
SUMA DE RAÍCES...

SOBRE EL RETÍCULO DE  
SUBÁLGEBRAS EN ÁLGEBRAS DE  
EVOLUCIÓN

CONSTRUCTIONS ON N-GRADED LIE  
ALGEBRAS

DECONSTRUYENDO ÁLGEBRAS DE LIE  
CUADRÁTICAS

## On the simple transposed Poisson algebras

AMIR FERNÁNDEZ OUARIDI

Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz

[amir.fernandez.ouaridi@gmail.com](mailto:amir.fernandez.ouaridi@gmail.com)

**Abstract:** Transposed Poisson algebras were introduced as a dual class of the Poisson algebras in the sense of that the roles of the two multiplications in the Leibniz rule are swapped [1]. Precisely, we have the identity  $2x\{y, z\} = \{xy, z\} + \{y, xz\}$ . This identity can be realized as the left multiplication of the associative commutative algebra is a  $\frac{1}{2}$ -derivation of the Lie algebra. These derivations of Lie algebras are well-studied (for example, see [4]). The interest in this class is justified by different reasons: the variety of transposed Poisson algebras coincides with the variety of commutative Gelfand-Dorfman algebras [5], transposed Poisson algebras are Jordan brackets [2] or the interesting example of the transposed Poisson structures on the Witt algebra [3]. Some known facts about TPAs include the closure undertaking tensor products, the Koszul self-duality as an operad or the correspondence with weak Leibniz algebras by depolarization. In this talk, we will discuss some results about simple TPAs and we will present a potential way to classify them over fields of positive characteristic. For a further read on the topic of simple TPAs, we refer to the paper of the author [2].

### Referencias

- [1] C. Bai, R. Bai, L. Guo, Y. Wu (2023). Transposed Poisson algebras, Novikov-Poisson algebras, and 3-Lie algebras, *Journal of Algebra*, in press.
- [2] A. Fernández Ouaridi (2023). On the simple transposed Poisson algebras and Jordan superalgebras. Arxiv: 2305.13848.
- [3] B. L. M. Ferreira, I. Kaygorodov, V. Lopatkin (2021).  $\frac{1}{2}$ -derivations of Lie algebras and transposed Poisson algebras, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 115, 3, 142.
- [4] V. Filippov (1998).  $\delta$ -Derivations of Lie algebras, *Siberian Mathematical Journal*, 39, 6, 1218–1230.
- [5] B. K. Sartayev (2023). Some generalizations of the variety of transposed Poisson algebras. Arxiv: 2305.12869.

LUNES, 22 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 3  
Álgebras no Asociativas

g2 COMO ANILLO GRUPO TORCIDO

A UNIVERSAL KALIZHNIK-KRASNER  
EMBEDDING THEOREM

ON THE SIMPLE TRANSPOSED  
POISSON ALGEBRAS

LOCAL SUPERDERIVATIONS  
ON SOLVABLE LIE AND LEIBNIZ  
SUPERALGEBRAS

IDENTIDADES DIFERENCIALES DE LAS  
ÁLGEBRAS DE MATRICES

AUTOMORPHISM GROUP SCHEMES OF  
SOME SIMPLE JORDAN PAIRS

SUPERPOTENCIAS ALTERNADAS Y  
SIMÉTRICAS DE SUPERPARES DE  
JORDAN GENERALIZADOS MÉTRICOS

ÁLGEBRAS DE COCIENTES DE  
ÁLGEBRAS LOCALES

DESCOMPOSICIÓN DE  
ENDOMORFISMOS NILPOTENTES EN  
SUMA DE RAÍCES...

SOBRE EL RETÍCULO DE  
SUBÁLGEBRAS EN ÁLGEBRAS DE  
EVOLUCIÓN

CONSTRUCTIONS ON N-GRADED LIE  
ALGEBRAS

DECONSTRUYENDO ÁLGEBRAS DE LIE  
CUADRÁTICAS

## Local superderivations on solvable Lie and Leibniz Superalgebras

R.M. NAVARRO, L.M. CAMACHO, B.A. OMIROV

Departamento de Matemáticas, Universidad de Extremadura

[rnavarro@unex.es](mailto:rnavarro@unex.es)

**Abstract:** Throughout this paper, we show on one hand, that there are nilpotent and solvable Lie superalgebras with infinitely many local superderivations which are not standard superderivations. On the other hand, we show that every local superderivation is a superderivation on the maximal-dimensional solvable Lie superalgebras with model filiform or model nilpotent nilradical. Moreover, we extend the latter result for Leibniz superalgebras by showing that every local superderivation is a superderivation on the maximal-dimensional solvable Leibniz superalgebras with model filiform or model nilpotent non-Lie nilradical.

### Referencias

- [1] L. M. Camacho, R. M. Navarro, B. Omirov. *Mediterr. J. Math.* (2023) 20:76.  
<https://doi.org/10.1007/s00009-023-02284-7>

SESIÓN ESPECIAL 3  
Álgebras no Asociativas

g2 COMO ANILLO GRUPO TORCIDO

A UNIVERSAL KALIZHNIK-KRASNER  
EMBEDDING THEOREM

ON THE SIMPLE TRANSPOSED  
POISSON ALGEBRAS

LOCAL SUPERDERIVATIONS  
ON SOLVABLE LIE AND LEIBNIZ  
SUPERALGEBRAS

IDENTIDADES DIFERENCIALES DE LAS  
ÁLGEBRAS DE MATRICES

AUTOMORPHISM GROUP SCHEMES OF  
SOME SIMPLE JORDAN PAIRS

SUPERPOTENCIAS ALTERNADAS Y  
SIMÉTRICAS DE SUPERPARES DE  
JORDAN GENERALIZADOS MÉTRICOS

ÁLGEBRAS DE COCIENTES DE  
ÁLGEBRAS LOCALES

DESCOMPOSICIÓN DE  
ENDOMORFISMOS NILPOTENTES EN  
SUMA DE RAÍCES...

SOBRE EL RETÍCULO DE  
SUBÁLGEBRAS EN ÁLGEBRAS DE  
EVOLUCIÓN

CONSTRUCTIONS ON N-GRADED LIE  
ALGEBRAS

DECONSTRUYENDO ÁLGEBRAS DE LIE  
CUADRÁTICAS

LUNES, 22 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

## Identidades diferenciales de las álgebras de matrices

JOSE BROX, CARLA RIZZO

Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología, Universidad de Valladolid

[josebrox@uva.es](mailto:josebrox@uva.es)

**Resumen:** Dadas un álgebra asociativa  $A$  y un álgebra de Lie  $L$  sobre un cuerpo  $K$ , una acción de  $L$  sobre  $A$  es un homomorfismo Lie de  $L$  en  $\text{Der}(A)$ ; decimos que  $A$  es una  $L$ -álgebra. Fijada  $L$ , en la variedad de  $L$ -álgebras se puede construir la  $L$ -álgebra libre  $K\langle X|L \rangle$  en una cantidad numerable de variables; una identidad diferencial de  $A$  como  $L$ -álgebra es entonces un polinomio  $f(x_1, \dots, x_n) \in K\langle X|L \rangle$  tal que las evaluaciones  $f(a_1, \dots, a_n)$  se anulan para todos los  $a_1, \dots, a_n \in A$ . En esta charla determinaremos un conjunto de generadores minimal del ideal de las identidades diferenciales del álgebra  $M_k(K)$  con  $\text{char}(K) = 0$  bajo la acción de su álgebra de derivaciones,  $L = \text{Der}(M_k(K))$ . Además determinaremos los valores de las codimensiones y los cocaracteres diferenciales asociados, y veremos que la variedad de  $L$ -álgebras generada por  $M_k(K)$  tiene crecimiento casi polinómico para todo  $k \geq 2$ .

SESIÓN ESPECIAL 3  
Álgebras no Asociativas

g2 COMO ANILLO GRUPO TORCIDO

A UNIVERSAL KALIZHNIK-KRASNER  
EMBEDDING THEOREM

ON THE SIMPLE TRANSPOSED  
POISSON ALGEBRAS

LOCAL SUPERDERIVATIONS  
ON SOLVABLE LIE AND LEIBNIZ  
SUPERALGEBRAS

IDENTIDADES DIFERENCIALES DE LAS  
ÁLGEBRAS DE MATRICES

AUTOMORPHISM GROUP SCHEMES OF  
SOME SIMPLE JORDAN PAIRS

SUPERPOTENCIAS ALTERNADAS Y  
SIMÉTRICAS DE SUPERPARES DE  
JORDAN GENERALIZADOS MÉTRICOS

ÁLGEBRAS DE COCIENTES DE  
ÁLGEBRAS LOCALES

DESCOMPOSICIÓN DE  
ENDOMORFISMOS NILPOTENTES EN  
SUMA DE RAÍCES...

SOBRE EL RETÍCULO DE  
SUBÁLGEBRAS EN ÁLGEBRAS DE  
EVOLUCIÓN

CONSTRUCTIONS ON N-GRADED LIE  
ALGEBRAS

DECONSTRUYENDO ÁLGEBRAS DE LIE  
CUADRÁTICAS

MARTES, 23 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

## Automorphism group schemes of some simple Jordan pairs

DIEGO ARANDA-ORNA

Departamento de Matemáticas, Universidad de Oviedo

[diego.aranda.orna@gmail.com](mailto:diego.aranda.orna@gmail.com)

**Abstract:** The automorphism group schemes of simple Jordan pairs of types I and IV, and of some related Jordan systems, are described.

SESIÓN ESPECIAL 3  
Álgebras no Asociativas

$g_2$  COMO ANILLO GRUPO TORCIDO

A UNIVERSAL KALIZHNIK-KRASNER  
EMBEDDING THEOREM

ON THE SIMPLE TRANSPOSED  
POISSON ALGEBRAS

LOCAL SUPERDERIVATIONS  
ON SOLVABLE LIE AND LEIBNIZ  
SUPERALGEBRAS

IDENTIDADES DIFERENCIALES DE LAS  
ÁLGEBRAS DE MATRICES

AUTOMORPHISM GROUP SCHEMES OF  
SOME SIMPLE JORDAN PAIRS

SUPERPOTENCIAS ALTERNADAS Y  
SIMÉTRICAS DE SUPERPARES DE  
JORDAN GENERALIZADOS MÉTRICOS

ÁLGEBRAS DE COCIENTES DE  
ÁLGEBRAS LOCALES

DESCOMPOSICIÓN DE  
ENDOMORFISMOS NILPOTENTES EN  
SUMA DE RAÍCES...

SOBRE EL RETÍCULO DE  
SUBÁLGEBRAS EN ÁLGEBRAS DE  
EVOLUCIÓN

CONSTRUCTIONS ON N-GRADED LIE  
ALGEBRAS

DECONSTRUYENDO ÁLGEBRAS DE LIE  
CUADRÁTICAS

MARTES, 23 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

## Superpotencias alternadas y simétricas de superpares de Jordan generalizados métricos

ALEJANDRA S. CÓRDOVA-MARTÍNEZ, DIEGO ARANDA-ORNA

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza

acordova@unizar.es

**Resumen:** Un *superpar de Jordan generalizado* es un par de espacios vectoriales  $\mathbb{Z}_2$ -graduados  $\mathcal{V} = (\mathcal{V}^-, \mathcal{V}^+)$  con un par de aplicaciones trilineales que satisface cierta identidad. Si además cuenta con una forma bilineal par no degenerada superinvariante supersimétrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{V}^- \times \mathcal{V}^+ \rightarrow \mathbb{F}$  entonces es un *superpar de Jordan generalizado métrico*.

Tenemos una correspondencia entre los superpares de Jordan generalizados métricos (cuya clase se denota **MGJSP**) y los *supermódulos de Lie métricos*  $(L, M, b)$  donde  $L$  es una superálgebra de Lie,  $b: L \times L \rightarrow \mathbb{F}$  es una forma bilineal par no degenerada invariante supersimétrica y  $(L, M)$  es un supermódulo de Lie fiel (cuya clase denotamos por **MFLSM**).

En esta charla se definirán y se estudiarán las superpotencias alternadas y simétricas de los superpares de Jordan generalizados, las cuales obtenemos transfiriendo las construcciones de superpotencias alternadas y simétricas a la clase de superpares de Jordan generalizados métricos usando la construcción de Faulkner. (Lo anterior suponiendo que la característica del cuerpo base es distinta de 2).

### Referencias

- [1] D. Aranda-Orna (2022). On the Faulkner construction for generalized Jordan superpairs. *Linear Algebra and its Applications*, 646, 1–28.
- [2] D. Aranda-Orna, A.S. Córdova-Martínez. Alternating and symmetric superpowers of metric generalized Jordan superpairs. Preprint: arXiv:2301.09171.

MARTES, 23 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

SESIÓN ESPECIAL 3  
Álgebras no Asociativas

g2 COMO ANILLO GRUPO TORCIDO

A UNIVERSAL KALIZHNIK-KRASNER  
EMBEDDING THEOREM

ON THE SIMPLE TRANSPOSED  
POISSON ALGEBRAS

LOCAL SUPERDERIVATIONS  
ON SOLVABLE LIE AND LEIBNIZ  
SUPERALGEBRAS

IDENTIDADES DIFERENCIALES DE LAS  
ÁLGEBRAS DE MATRICES

AUTOMORPHISM GROUP SCHEMES OF  
SOME SIMPLE JORDAN PAIRS

SUPERPOTENCIAS ALTERNADAS Y  
SIMÉTRICAS DE SUPERPARES DE  
JORDAN GENERALIZADOS MÉTRICOS

ÁLGEBRAS DE COCIENTES DE  
ÁLGEBRAS LOCALES

DESCOMPOSICIÓN DE  
ENDOMORFISMOS NILPOTENTES EN  
SUMA DE RAÍCES...

SOBRE EL RETÍCULO DE  
SUBÁLGEBRAS EN ÁLGEBRAS DE  
EVOLUCIÓN

CONSTRUCTIONS ON N-GRADED LIE  
ALGEBRAS

DECONSTRUYENDO ÁLGEBRAS DE LIE  
CUADRÁTICAS

## Álgebras de cocientes de álgebras locales

IRENE PANIELLO

Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas, Universidad Pública de Navarra  
[irene.paniello@unavarra.es](mailto:irene.paniello@unavarra.es)

**Resumen:** El desarrollo de una teoría local de cocientes para sistemas de Jordan (no necesariamente álgebras) nos lleva a considerar la cuestión de cómo son las álgebras de cocientes de las álgebras locales de estos sistemas.

En esta ocasión, a pesar de que nos limitaremos al caso de las álgebras Jordan, mostraremos algunos de los últimos resultados obtenidos en el desarrollo de esta teoría. Estos resultados corresponden a un trabajo conjunto con F. Montaner (Universidad de Zaragoza).

SESIÓN ESPECIAL 3  
Álgebras no Asociativas

$g_2$  COMO ANILLO GRUPO TORCIDO

A UNIVERSAL KALIZHNIK-KRASNER  
EMBEDDING THEOREM

ON THE SIMPLE TRANSPOSED  
POISSON ALGEBRAS

LOCAL SUPERDERIVATIONS  
ON SOLVABLE LIE AND LEIBNIZ  
SUPERALGEBRAS

IDENTIDADES DIFERENCIALES DE LAS  
ÁLGEBRAS DE MATRICES

AUTOMORPHISM GROUP SCHEMES OF  
SOME SIMPLE JORDAN PAIRS

SUPERPOTENCIAS ALTERNADAS Y  
SIMÉTRICAS DE SUPERPARES DE  
JORDAN GENERALIZADOS MÉTRICOS

ÁLGEBRAS DE COCIENTES DE  
ÁLGEBRAS LOCALES

DESCOMPOSICIÓN DE  
ENDOMORFISMOS NILPOTENTES EN  
SUMA DE RAÍCES...

SOBRE EL RETÍCULO DE  
SUBÁLGEBRAS EN ÁLGEBRAS DE  
EVOLUCIÓN

CONSTRUCTIONS ON N-GRADED LIE  
ALGEBRAS

DECONSTRUYENDO ÁLGEBRAS DE LIE  
CUADRÁTICAS

MARTES, 23 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

## Descomposición de endomorfismos nilpotentes en suma de raíces de la unidad y endomorfismos de cuadrado cero

ESTHER GARCÍA, PETER DANCHEV, MIGUEL GÓMEZ LOZANO

Departamento de Matemática Aplicada, Ciencia e Ingeniería de Materiales y Tecnología Electrónica,  
Universidad Rey Juan Carlos  
[esther.garcia@urjc.es](mailto:esther.garcia@urjc.es)

**Resumen:** Un endomorfismo  $u$  es una raíz de la unidad si existe algún natural  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $u^m$  es el endomorfismo identidad, un endomorfismo  $v$  es nilpotente si  $v^k = 0$  para algún  $k \in \mathbb{N}$ , y  $v$  es de cuadrado cero si  $v^2 = 0$ . En esta charla se probará que todo endomorfismo nilpotente  $v$  de un  $\Delta$ -espacio vectorial a izquierda de dimensión  $n$ , donde  $\Delta$  es un anillo de división, se pueden descomponer en la suma de un endomorfismo raíz de la unidad y un endomorfismo de cuadrado cero si y solo si el rango de  $v$  es mayor o igual que  $\frac{n}{2}$ .

### Referencias

- [1] P. Danchev, E. García, M. Gómez Lozano (2023). Decompositions of endomorphisms into a sum of roots of the unity and nilpotent endomorphisms of fixed nilpotence. *Linear Algebra and its Applications*, 676, 44-55.

SESIÓN ESPECIAL 3  
Álgebras no Asociativas

g2 COMO ANILLO GRUPO TORCIDO

A UNIVERSAL KALIZHNIK-KRASNER  
EMBEDDING THEOREM

ON THE SIMPLE TRANSPOSED  
POISSON ALGEBRAS

LOCAL SUPERDERIVATIONS  
ON SOLVABLE LIE AND LEIBNIZ  
SUPERALGEBRAS

IDENTIDADES DIFERENCIALES DE LAS  
ÁLGEBRAS DE MATRICES

AUTOMORPHISM GROUP SCHEMES OF  
SOME SIMPLE JORDAN PAIRS

SUPERPOTENCIAS ALTERNADAS Y  
SIMÉTRICAS DE SUPERPARES DE  
JORDAN GENERALIZADOS MÉTRICOS

ÁLGEBRAS DE COCIENTES DE  
ÁLGEBRAS LOCALES

DESCOMPOSICIÓN DE  
ENDOMORFISMOS NILPOTENTES EN  
SUMA DE RAÍCES...

SOBRE EL RETÍCULO DE  
SUBÁLGEBRAS EN ÁLGEBRAS DE  
EVOLUCIÓN

CONSTRUCTIONS ON N-GRADED LIE  
ALGEBRAS

DECONSTRUYENDO ÁLGEBRAS DE LIE  
CUADRÁTICAS

MARTES, 23 DE ENERO:  
16:00 – 16:30



## Sobre el retículo de subálgebras en álgebras de evolución

A. PÉREZ-RODRÍGUEZ, M. LADRA, P. PAÉZ-GUILLÁN  
 Departamento de Matemáticas, Universidade de Santiago de Compostela  
[andresperez.rodriquez@usc.es](mailto:andresperez.rodriquez@usc.es)

**Resumen:** La relación entre la estructura de un grupo y la de su retículo de subgrupos está muy desarrollada y ha suscitado un enorme interés en numerosos algebristas destacados ([2]). Cabe destacar que dicho estudio se ha trasladado también a muchas otras estructuras algebraicas, donde es especialmente representativo el caso de las álgebras no asociativas, como son las álgebras de Lie en [1] o las de Leibniz en [3]. No obstante, esta relación es muy poco conocida en álgebras genéticas y, en particular, en álgebras de evolución los estudios son inexistentes.

Las *álgebras de evolución* surgen con el propósito de modelar la genética no mendeliana ([4]), la cual es el lenguaje básico de la biología molecular. El principal objetivo de esta charla es desarrollar la relación existente entre un álgebra de evolución y su retículo de subálgebras, haciendo hincapié en dos de sus principales propiedades: la *distributividad* y la *modularidad*. Tras presentar algunos problemas encontrados a lo largo de nuestra investigación, se caracterizará la distributividad en el caso nilpotente para, por último, comentar algunos resultados respecto de la modularidad en el caso soluble.

### Referencias

- [1] B. Kolman (1965). Semi-modular Lie algebras. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I Math., 29, 149–163.
- [2] R. Schmidt (1994). Subgroup Lattices of Groups. De Gruyter.
- [3] S. Siciliano, D. A. Towers (2021). On the subalgebra lattice of a Leibniz algebra. Comm. Algebra, 50, 255–267.
- [4] J. P. Tian (2008). Evolution Algebras and their Applications. Springer Berlin Heidelberg.

**Agradecimientos:** Los autores han sido financiados por la Agencia Estatal de Investigación, con referencia PID2020-115155GB-I00 y por la Xunta de Galicia a través del Grupo de Referencia Competitiva ED431C 2023/31. Además, el ponente también ha sido financiado por una ayuda FPU (con referencia FPU21/05685) del Ministerio de Educación y Formación Profesional.

MARTES, 23 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 3  
Álgebras no Asociativas

g2 COMO ANILLO GRUPO TORCIDO

A UNIVERSAL KALIZHNIK-KRASNER  
EMBEDDING THEOREM

ON THE SIMPLE TRANSPOSED  
POISSON ALGEBRAS

LOCAL SUPERDERIVATIONS  
ON SOLVABLE LIE AND LEIBNIZ  
SUPERALGEBRAS

IDENTIDADES DIFERENCIALES DE LAS  
ÁLGEBRAS DE MATRICES

AUTOMORPHISM GROUP SCHEMES OF  
SOME SIMPLE JORDAN PAIRS

SUPERPOTENCIAS ALTERNADAS Y  
SIMÉTRICAS DE SUPERPARES DE  
JORDAN GENERALIZADOS MÉTRICOS

ÁLGEBRAS DE COCIENTES DE  
ÁLGEBRAS LOCALES

DESCOMPOSICIÓN DE  
ENDOMORFISMOS NILPOTENTES EN  
SUMA DE RAÍCES...

SOBRE EL RETÍCULO DE  
SUBÁLGEBRAS EN ÁLGEBRAS DE  
EVOLUCIÓN

CONSTRUCTIONS ON N-GRADED LIE  
ALGEBRAS

DECONSTRUYENDO ÁLGEBRAS DE LIE  
CUADRÁTICAS

## Constructions on $\mathbb{N}$ -graded Lie algebras

JAVIER RÁNDEZ-IBÁÑEZ, PILAR BENITO, JORGE ROLDÁN-LÓPEZ

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja  
[javier.randez@unirioja.es](mailto:javier.randez@unirioja.es), [pilar.benito@unirioja.es](mailto:pilar.benito@unirioja.es), [jorge.roldan@unirioja.es](mailto:jorge.roldan@unirioja.es)

**Abstract:** A Lie algebra  $\mathfrak{g}$  admitting a positive natural grading,  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \geq 1} \mathfrak{g}_i$ , is called naturally graded or  $\mathbb{N}$ -graded. In the finite-dimensional case, these algebras are also known as Carnot algebras and they appear in the study of nilpotent Lie algebras and the associated Lie and discrete groups [1]. In 1997, Shalev and Zelmanov introduced the notion of *narrow Lie algebras*, a class of positively graded Lie algebras in which the homogeneous components are uniformly bounded. Since then, there have been attempts of the classification of  $\mathbb{N}$ -graded algebras by imposing strong conditions on their narrowness (see [3] and references therein). According to [2], finite-dimensional Carnot algebras appear as quotients of free-nilpotent Lie algebras by homogeneous ideals. In this talk, we will introduce this class of algebras and give constructions that provide examples with broader dimensions of homogeneous components.

### Referencias

- [1] Y. Cornulier (2016). Gradings on Lie algebras, systolic growth and cohopfian properties of nilpotent groups. *Bulletin de la Societé Mathématique de France*, 144 (4), 693-744.
- [2] G. F. Leger (1963). Derivations of Lie algebras III. *Duke Mathematica Journal*, 30 (4), 637-645.
- [3] D.V. Millonshchikov (2019). Naturally graded Lie algebras of slow growth. *Sbornik Mathematics*, 210:6, 862-909114.

**Acknowledgments:** The authors have been supported by research grant MTM2017-83506-C2-1-P of ‘Ministerio de Economía, Industria y Competitividad, Gobierno de España’ (Spain) until 2022 and by grant PID2021-123461NB-C21, funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and by “ERDF A way of making Europe” since then.

MARTES, 23 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 3  
Álgebras no Asociativas

$\mathfrak{g}^2$  COMO ANILLO GRUPO TORCIDO

A UNIVERSAL KALIZHNIK-KRASNER  
EMBEDDING THEOREM

ON THE SIMPLE TRANSPOSED  
POISSON ALGEBRAS

LOCAL SUPERDERIVATIONS  
ON SOLVABLE LIE AND LEIBNIZ  
SUPERALGEBRAS

IDENTIDADES DIFERENCIALES DE LAS  
ÁLGEBRAS DE MATRICES

AUTOMORPHISM GROUP SCHEMES OF  
SOME SIMPLE JORDAN PAIRS

SUPERPOTENCIAS ALTERNADAS Y  
SIMÉTRICAS DE SUPERPARES DE  
JORDAN GENERALIZADOS MÉTRICOS

ÁLGEBRAS DE COCIENTES DE  
ÁLGEBRAS LOCALES

DESCOMPOSICIÓN DE  
ENDOMORFISMOS NILPOTENTES EN  
SUMA DE RAÍCES...

SOBRE EL RETÍCULO DE  
SUBÁLGEBRAS EN ÁLGEBRAS DE  
EVOLUCIÓN

CONSTRUCTIONS ON  $\mathbb{N}$ -GRADED LIE  
ALGEBRAS

DECONSTRUYENDO ÁLGEBRAS DE LIE  
CUADRÁTICAS

## Deconstruyendo álgebras de Lie cuadráticas

JORGE ROLDÁN-LÓPEZ, PILAR BENITO

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

[jorge.roldanl@unirioja.es](mailto:jorge.roldanl@unirioja.es)

**Resumen:** Un álgebra de Lie cuadrática  $L$  es un álgebra de Lie que tiene asociada una forma bilineal  $\varphi$  no degenerada e invariante respecto a su corchete de Lie, es decir,

$$\varphi([x, y], z) + \varphi(x, [y, z]) = 0, \quad \forall x, y \in L.$$

Aunque la familia de álgebras cuadráticas es muy amplia, es posible hacer un estudio deconstructivo que nos permita ir reduciendo los casos a subfamilias más pequeñas, que luego serán ampliadas mediante extensiones. Así, todas las álgebras cuadráticas se pueden obtener como dobles extensiones de álgebras resolubles y estas a su vez proceden de álgebras nilpotentes. Esta deconstrucción sigue el esquema mostrado en [4, Chapter 3] que expande y generaliza resultados de [1], [2] y [3].

### Referencias

- [1] M. Bordemann (1997). Nondegenerate invariant bilinear forms on nonassociative algebras. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae. New Series*, 66(2):151–201.
- [2] G. Favre, L. J. Santharoubane (1987). Symmetric, invariant, nondegenerate bilinear form on a Lie algebra. *Journal of Algebra* 105: 451–464.
- [3] V. S. Keith (1984). On invariant bilinear forms on finite-dimensional Lie algebras. *PhD Thesis, Tulane University*.
- [4] J. Roldán-López (2023). Quadratic Lie algebras. Algorithms and (de)constructions. *PhD Thesis, Universidad de La Rioja*.

**Agradecimientos:** Esta investigación ha sido parcialmente financiada por la ayuda MTM2017-83506C2-1-P del ‘Ministerio de Economía, Industria y Competitividad’ del Gobierno de España desde 2017 hasta 2022 y por la ayuda PID2021-123461NBC21, financiada por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por ‘ERDF A way of making Europe’ desde 2023 en adelante. El autor también ha recibido un contrato predoctoral FPI-2018 de la Universidad de La Rioja y recibido la ayudas ATUR18/43, ATUR19/40 y ATUR21/34 de la misma universidad.

MARTES, 23 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

SESIÓN ESPECIAL 3  
Álgebras no Asociativas

g2 COMO ANILLO GRUPO TORCIDO

A UNIVERSAL KALIZHNIK–KRASNER  
EMBEDDING THEOREM

ON THE SIMPLE TRANSPOSED  
POISSON ALGEBRAS

LOCAL SUPERDERIVATIONS  
ON SOLVABLE LIE AND LEIBNIZ  
SUPERALGEBRAS

IDENTIDADES DIFERENCIALES DE LAS  
ÁLGEBRAS DE MATRICES

AUTOMORPHISM GROUP SCHEMES OF  
SOME SIMPLE JORDAN PAIRS

SUPERPOTENCIAS ALTERNADAS Y  
SIMÉTRICAS DE SUPERPARES DE  
JORDAN GENERALIZADOS MÉTRICOS

ÁLGEBRAS DE COCIENTES DE  
ÁLGEBRAS LOCALES

DESCOMPOSICIÓN DE  
ENDOMORFISMOS NILPOTENTES EN  
SUMA DE RAÍCES...

SOBRE EL RETÍCULO DE  
SUBÁLGEBRAS EN ÁLGEBRAS DE  
EVOLUCIÓN

CONSTRUCTIONS ON N-GRADED LIE  
ALGEBRAS

DECONSTRUYENDO ÁLGEBRAS DE LIE  
CUADRÁTICAS

## SESIÓN ESPECIAL 4 Matemática Discreta y Algorítmica

### Organizadores:

**DELIA GARIJO**  
(Universidad de Sevilla)

**MARC NOY**  
(Universidad Politécnica de Cataluña)

**FRANCISCO SANTOS**  
(Universidad de Cantabria)

### Descripción:

La matemática discreta estudia estructuras combinatorias o discretas, particularmente grafos, geometrías finitas, estructuras geométricas discretas y aspectos combinatorios de estructuras algebraicas y de teoría de números, y en ella los aspectos algorítmicos tienen una relevancia particular de forma natural. La sesión propuesta está auspiciada por la recientemente creada Red de Matemática Discreta y Algorítmica, financiada por el Ministerio de Ciencia e Innovación para el periodo 2023-2025 (RED2022-134947-T), y presentará una panorámica de la investigación actual del área en España.

#### SESIÓN ESPECIAL 4 Matemática Discreta y Algorítmica

FACTORIZACIONES EN EXTENSIONES DE IDEALES DE MONOIDES LIBRES CONMUTATIVOS

COLOREAR GRAFOS DE CAYLEY

ALGUNOS ELEMENTOS COMBINATORIOS DENTRO DE LA TEORÍA DE SINGULARIDADES...

DIÁMETRO CONTINUO EN GRAFOS

ON DISCRETE BRUNN-MINKOWSKI TYPE INEQUALITIES

NUMERICAL SEMIGROUPS WITHIN THE COPRICA RESEARCH GROUP

ESTIMATING ADAM'S GENEALOGY

TOWARDS A REALIZATION OF THE  $K$ -ASSOCIAHEDRON?

NILESPACIOS FINITOS Y APLICACIONES RECIENTES

INFINITE CHAINS IN THE TREE OF NUMERICAL SEMIGROUPS

GRUPO GAPCOMB DE LA UPC SISTEMAS DE VOTACIONES Y COMBINATORIA ANALÍTICA

## Factorizaciones en extensiones de ideales de monoides libres conmutativos

PEDRO A. GARCÍA-SÁNCHEZ, D. LLENA, C. CISTO

Departamento Álgebra e Instituto de Matemáticas (IMAG), Universidad de Granada

[pedro@ugr.es](mailto:pedro@ugr.es)

**Resumen:** En esta charla estudiaremos submonoides de  $(\mathbb{N}^{(I)}, +)$ , con  $I$  un conjunto de enteros, que cumplen (1) la suma de dos huecos es o bien un hueco o un átomo o la suma de dos átomos, y (2) la suma de un hueco y un átomo es un átomo o la suma de dos átomos. Todos estos monoides son de la forma  $\{0\} \cup (X + \mathbb{N}^{(I)})$ , con  $X \subseteq \mathbb{N}^{(I)}$ . Nos centraremos en el estudio de algunos invariantes de factorización en estos monoides. Probamos que el máximo de los conjuntos Delta es a lo sumo uno, con lo que o bien son monoides de factorización media o única, o las longitudes de las factorizaciones de cualquier elemento conforman un intervalo de enteros. También probaremos que la catenariedad es a lo sumo cuatro. Para ello será crucial demostrar que los grados de Betti de estos monoides son suma de a lo sumo de tres átomos. Daremos cotas inferiores y superiores para la  $\omega$ -primalidad en estos monoides. Este trabajo es una continuación de [1], y está dedicado a su autor.

### Referencias

- [1] N. Baeth (2023). Complement-Finite Ideals. In: JL. Chabert, M. Fontana, S. Frisch, S. Glaz, K. Johnson (eds), Algebraic, Number Theoretic, and Topological Aspects of Ring Theory. Springer, Cham.
- [2] A. Geroldinger, F. Halter-Koch (2006). Non-unique factorizations. Algebraic, combinatorial and analytic theory. Pure and Applied Mathematics (Boca Raton), 278. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.

**Agradecimientos:** Esta investigación se ha llevado a cabo con la financiación del grupo FQM-343 y del Proyecto de Excelencia ProyExcel 00868 de la Junta de Andalucía, el proyecto PID2022-138906NB-C21 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y fondos FEDER, además de por el MICINN, a través del “Programa Severo Ochoa y María de Maeztu para Centros y Unidades de Excelencia” (CEX2020-001105-M) y la RED2022-134947-T, financiada por la Agencia Estatal de Investigación.

LUNES, 22 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

SESIÓN ESPECIAL 4  
Matemática Discreta y Algorítmica

FACTORIZACIONES EN EXTENSIONES DE IDEALES DE MONOIDES LIBRES CONMUTATIVOS

COLOREAR GRAFOS DE CAYLEY

ALGUNOS ELEMENTOS COMBINATORIOS DENTRO DE LA TEORÍA DE SINGULARIDADES...

DIÁMETRO CONTINUO EN GRAFOS

ON DISCRETE BRUNN-MINKOWSKI TYPE INEQUALITIES

NUMERICAL SEMIGROUPS WITHIN THE COPRICA RESEARCH GROUP

ESTIMATING ADAM'S GENEALOGY

TOWARDS A REALIZATION OF THE K-ASSOCIAHEDRON?

NILESPACIOS FINITOS Y APLICACIONES RECIENTES

INFINITE CHAINS IN THE TREE OF NUMERICAL SEMIGROUPS

GRUPO GAPCOMB DE LA UPC SISTEMAS DE VOTACIONES Y COMBINATORIA ANALÍTICA

## Colorear grafos de Cayley

KOLJA KNAUER, IGNACIO GARCÍA-MARCO

Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona

[kola.knauer@ub.edu](mailto:kola.knauer@ub.edu)

**Resumen:** Un grafo de Cayley  $\text{Cay}(G, C)$  de un grupo finito  $G$  es *minimal* si  $C$  es un conjunto generador de  $G$  minimal por inclusion. En los setentas Babai [1] discute por primera vez el problema de determinar el número cromático de un grafo de Cayley minimal y propone una conjetura fuerte que implicaría que todos estos grafos tienen número cromático acotado por una constante global. En este trabajo mostramos que esta conjetura fuerte es falsa. Sin embargo también mostramos que todo grafo minimal de un grupo nilpotente o dihedral generalizado tiene número cromático a lo mucho tres. También encontramos grafos minimales de Cayley con número cromático cuatro y mostramos que eso es lo más alto posible hasta orden 215. Notese que veinte años más tarde el mismo Babai [2] propuso otra conjetura fuerte que implica que existen familias de grafos minimales de Cayley con número cromático no acotado. Esta sigue abierta.

### Referencias

- [1] L. Babai (1978). Chromatic number and subgraphs of Cayley graphs. Theor. Appl. Graphs, Proc. Kalamazoo 1976, Lect. Notes Math. 642, 10-22 (1978).
- [2] L. Babai (1995). Automorphism groups, isomorphism, reconstruction, in Handbook of combinatorics. Vol. 1-2, Amsterdam: Elsevier (North-Holland); Cambridge, MA: MIT Press, pp. 1447–1540.

LUNES, 22 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 4  
Matemática Discreta y Algorítmica

FACTORIZACIONES EN EXTENSIONES  
DE IDEALES DE MONOIDES LIBRES  
COMMUTATIVOS

COLOREAR GRAFOS DE CAYLEY

ALGUNOS ELEMENTOS  
COMBINATORIOS DENTRO DE LA  
TEORÍA DE SINGULARIDADES...

DIÁMETRO CONTINUO EN GRAFOS

ON DISCRETE BRUNN-MINKOWSKI  
TYPE INEQUALITIES

NUMERICAL SEMIGROUPS WITHIN  
THE COPRICA RESEARCH GROUP

ESTIMATING ADAM'S GENEALOGY

TOWARDS A REALIZATION OF THE  
K-ASSOCIAHEDRON?

NILESPACIOS FINITOS Y  
APLICACIONES RECIENTES

INFINITE CHAINS IN THE TREE OF  
NUMERICAL SEMIGROUPS

GRUPO GAPCOMB DE LA UPC  
SISTEMAS DE VOTACIONES Y  
COMBINATORIA ANALÍTICA

## Algunos elementos combinatorios dentro de la teoría de singularidades de curvas planas

JULIO JOSÉ MOYANO FERNÁNDEZ

Departament de Matemàtiques & Institut de Matemàtiques i Aplicacions de Castelló  
Universitat Jaume I  
[moyano@uji.es](mailto:moyano@uji.es)

**Resumen:** Algunos de los invariantes usados en la clasificación topológica de las singularidades de curvas planas poseen una naturaleza combinatoria; ejemplos de ello son el semigrupo de valores o la serie de Poincaré asociados a la singularidad (ver e.g. [4] y los trabajos allí referenciados).

Esta conferencia tiene como objetivo presentar a la comunidad de *Matemática discreta y algorítmica* ambos objetos combinatorios, además de los resultados más interesantes o novedosos concernientes a los mismos dentro de la teoría de singularidades de curvas planas: destacaremos la relación de la serie de Poincaré con la función zeta de Stöhr en un contexto de singularidades de curvas definidas sobre cuerpos finitos, demostrada por Delgado y el autor [3], su coincidencia con el polinomio de Alexander en el caso de curvas complejas (resultado debido a Campillo, Delgado y Gusein-Zade [2]), así como los avances recientes del autor con P. Almirón [1] analizando la naturaleza de esta igualdad.

### Referencias

- [1] P. Almirón, J.J. Moyano Fernandez (2023). The intrinsic topological nature of the Poincaré series of a plane curve singularity. Preprint, arXiv:2302.12079v2.
- [2] A. Campillo, F. Delgado, S.M. Gusein-Zade (2003). The Alexander polynomial of a plane curve singularity via the ring of functions on it. *Duke Math. J.* 117(1), 125-156.
- [3] F. Delgado, J.J. Moyano Fernández (2009). On the relation between the generalized Poincaré series and the Stöhr zeta function. *Proc. Am. Math. Soc.* 137(1), 51-59.
- [4] J.J. Moyano Fernández (2022). Generalized Poincaré series for plane curva singularities. In: C. Galindo et al., *p-adic Analysis, Arithmetic and Singularities*. *Contemp. Math.*, vol. 778, 25-69.

LUNES, 22 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 4  
Matemática Discreta y Algorítmica

FACTORIZACIONES EN EXTENSIONES DE IDEALES DE MONOIDES LIBRES CONMUTATIVOS

COLOREAR GRAFOS DE CAYLEY

ALGUNOS ELEMENTOS COMBINATORIOS DENTRO DE LA TEORÍA DE SINGULARIDADES...

DIÁMETRO CONTINUO EN GRAFOS

ON DISCRETE BRUNN-MINKOWSKI TYPE INEQUALITIES

NUMERICAL SEMIGROUPS WITHIN THE COPRICA RESEARCH GROUP

ESTIMATING ADAM'S GENEALOGY

TOWARDS A REALIZATION OF THE K-ASSOCIAHEDRON?

NILES PACIOS FINITOS Y APLICACIONES RECIENTES

INFINITE CHAINS IN THE TREE OF NUMERICAL SEMIGROUPS

GRUPO GAPCOMB DE LA UPC SISTEMAS DE VOTACIONES Y COMBINATORIA ANALÍTICA

## Diámetro continuo en grafos

DELIA GARIJO

Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla

[dgarijo@us.es](mailto:dgarijo@us.es)

**Resumen:** Los *problemas de aumento* en grafos han sido ampliamente estudiados para medidas relacionadas con distancias, como el diámetro o la dilación. El objetivo en estos problemas es añadir un conjunto mínimo de aristas al grafo (o de mínimo peso) de forma que se satisfaga una condición establecida sobre el parámetro en estudio, por ejemplo, la disminución del diámetro del grafo resultante con respecto al original. Si se considera el lugar geométrico de la realización de un grafo en algún espacio euclídeo, surge la posibilidad de permitir que los extremos de las aristas insertadas sean, no ya vértices, sino puntos cualesquiera que estén sobre las aristas del grafo. Se pasa por tanto de considerar un número finito de distancias (entre pares de vértices) a tratar con un número infinito (entre pares de puntos de dicho lugar geométrico). Este salto de lo que llamamos la *versión discreta* del problema a la *versión continua* ha despertado mucho interés en los últimos años, no solo en problemas de aumento, sino en diversos tipos de problemas de grafos.

En esta charla nos centraremos en la versión continua de problemas relacionados con el diámetro del grafo. Ilustraremos elementos que hacen muy difícil este salto “del discreto al continuo” y que provocan que los avances en esta línea de investigación estén siendo muy lentos. También plantearemos diversas cuestiones que serían interesantes de aproximar.

Esta charla se enmarca en una serie de trabajos con distintos coautores: J. Cáceres (U. Almería), Fabian Klute (UPC), Alberto Márquez (U. Sevilla), Irene Parada (UPC), Rodrigo Silveira (UPC).

**Agradecimientos:** Financiado por MICINN a través del proyecto PID2019-104129GB-I00/MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

LUNES, 22 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

SESIÓN ESPECIAL 4  
Matemática Discreta y Algorítmica

FACTORIZACIONES EN EXTENSIONES  
DE IDEALES DE MONOIDES LIBRES  
COMUTATIVOS

COLOREAR GRAFOS DE CAYLEY

ALGUNOS ELEMENTOS  
COMBINATORIOS DENTRO DE LA  
TEORÍA DE SINGULARIDADES...

DIÁMETRO CONTINUO EN GRAFOS

ON DISCRETE BRUNN-MINKOWSKI  
TYPE INEQUALITIES

NUMERICAL SEMIGROUPS WITHIN  
THE COPRICA RESEARCH GROUP

ESTIMATING ADAM'S GENEALOGY

TOWARDS A REALIZATION OF THE  
K-ASSOCIAHEDRON?

NILESPACIOS FINITOS Y  
APLICACIONES RECIENTES

INFINITE CHAINS IN THE TREE OF  
NUMERICAL SEMIGROUPS

GRUPO GAPCOMB DE LA UPC  
SISTEMAS DE VOTACIONES Y  
COMBINATORIA ANALÍTICA



## On discrete Brunn-Minkowski type inequalities

MARÍA A. HERNÁNDEZ CIFRE, JESÚS YEPES NICOLÁS, EDUARDO LUCAS

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

[mhcifre@um.es](mailto:mhcifre@um.es)

**Abstract:** The well-known Brunn-Minkowski inequality states that for a pair of convex bodies (i.e., non-empty compact and convex sets)  $K, L \subset \mathbb{R}^n$ , the functional  $\text{vol}((1-\lambda)K + \lambda L)^{1/n}$  is concave in  $\lambda \in (0, 1)$ , where  $\text{vol}(\cdot)$  represents the volume (Lebesgue measure) and  $+$  is the Minkowski (vectorial) addition.

The  $L_p$  version (for  $p \geq 1$ ) of the Brunn-Minkowski inequality was originally proven by Firey in the 60's in the setting of convex bodies containing the origin, and was recently extended to arbitrary non-empty compact sets by Lutwak, Yang and Zhang in 2012. It asserts that for non-empty compact sets  $K, L \subset \mathbb{R}^n$  and  $\lambda \in (0, 1)$ ,

$$\text{vol}((1-\lambda) \cdot K +_p \lambda \cdot L)^{p/n} \geq (1-\lambda)\text{vol}(K)^{p/n} + \lambda\text{vol}(L)^{p/n}.$$

When  $p = 0$  (or even  $0 < p < 1$ ), the conjectured log-Brunn-Minkowski inequality for centrally symmetric convex bodies, namely,  $\text{vol}((1-\lambda) \cdot K +_0 \lambda \cdot L) \geq \text{vol}(K)^{1-\lambda}\text{vol}(L)^\lambda$ , is known to be true only in the plane and for particular families of sets.

Nowadays there is a growing interest in getting discrete counterparts of classical inequalities, i.e., discrete analogues in which, either convex bodies and volume are replaced by finite sets of points and cardinality  $|\cdot|$ , respectively, or just the volume is replaced by the so-called *lattice-point enumerator*  $G(\cdot)$ , which is defined as  $G(M) = |M \cap \mathbb{Z}^n|$ . Of course, the Brunn-Minkowski inequality is one of the first results to be considered in this discrete setting. In this talk we will discuss discrete analogues of the above-mentioned results in the setting of the lattice point enumerator.

### Referencias

- [1] D. Iglesias, J. Yepes Nicolás, A. Zvavitch (2020). Brunn-Minkowski type inequalities for the lattice point enumerator. *Adv. Math.* 370, 107193.
- [2] M. A. Hernández Cifre, E. Lucas, J. Yepes Nicolás (2022). On discrete  $L_p$  Brunn-Minkowski type inequalities. *RACSAM* 116, Article 164.
- [3] M. A. Hernández Cifre, E. Lucas (2022). On discrete log-Brunn-Minkowski type inequalities. *SIAM J. Discrete Math.* 36, 1748–1760.

MARTES, 23 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 4  
Matemática Discreta y Algorítmica

FACTORIZACIONES EN EXTENSIONES  
DE IDEALES DE MONOIDES LIBRES  
CONMUTATIVOS

COLOREAR GRAFOS DE CAYLEY

ALGUNOS ELEMENTOS  
COMBINATORIOS DENTRO DE LA  
TEORÍA DE SINGULARIDADES...

DIÁMETRO CONTINUO EN GRAFOS

ON DISCRETE BRUNN-MINKOWSKI  
TYPE INEQUALITIES

NUMERICAL SEMIGROUPS WITHIN  
THE COPRICA RESEARCH GROUP

ESTIMATING ADAM'S GENEALOGY

TOWARDS A REALIZATION OF THE  
K-ASSOCIAHEDRON?

NILES PACIOS FINITOS Y  
APLICACIONES RECIENTES

INFINITE CHAINS IN THE TREE OF  
NUMERICAL SEMIGROUPS

GRUPO GAPCOMB DE LA UPC  
SISTEMAS DE VOTACIONES Y  
COMBINATORIA ANALÍTICA

## Numerical semigroups within the COPRICA research group

MARIA BRAS-AMORÓS

Departament d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques, Universitat Rovira i Virgili  
[maria.bras@urv.cat](mailto:maria.bras@urv.cat)

**Abstract:** A numerical semigroup is a subset of the positive integers  $\mathbb{N}$  together with 0, closed under addition, and with a finite complement in  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ . The number of gaps is its genus. Numerical semigroups arise in algebraic geometry, coding theory, privacy models, and in musical analysis. It is one of the main topics of the research group COPRICA at Universitat Rovira i Virgili. We will explain some classical problems on which we contributed or are currently working related to numerical semigroups and their counting by genus.

**Acknowledgments:** This work is supported by the grant PID2021-124928NB-I00 and 2021SGR00115.

MARTES, 23 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

SESIÓN ESPECIAL 4  
Matemática Discreta y Algorítmica

FACTORIZACIONES EN EXTENSIONES  
DE IDEALES DE MONOIDES LIBRES  
COMUTATIVOS

COLOREAR GRAFOS DE CAYLEY

ALGUNOS ELEMENTOS  
COMBINATORIOS DENTRO DE LA  
TEORÍA DE SINGULARIDADES...

DIÁMETRO CONTINUO EN GRAFOS

ON DISCRETE BRUNN-MINKOWSKI  
TYPE INEQUALITIES

NUMERICAL SEMIGROUPS WITHIN  
THE COPRICA RESEARCH GROUP

ESTIMATING ADAM'S GENEALOGY

TOWARDS A REALIZATION OF THE  
K-ASSOCIAHEDRON?

NILESPACIOS FINITOS Y  
APLICACIONES RECIENTES

INFINITE CHAINS IN THE TREE OF  
NUMERICAL SEMIGROUPS

GRUPO GAPCOMB DE LA UPC  
SISTEMAS DE VOTACIONES Y  
COMBINATORIA ANALÍTICA

## Estimating Adam's genealogy

SIMON BRIEND, CHRISTOPHE GIRAUD, GÁBOR LUGOSI, DÉBORAH SULEM

Department of Economics, Universitat Pompeu Fabra

[simon.briend@upf.edu](mailto:simon.briend@upf.edu)

**Abstract:** Growing random structures are ever more present in our lives, be it in information technologies, social networks, epidemiology, genomics etc. Propagation phenomena can be modelled by randomly growing graphs and in particular, recursive trees. These random models account for the growth over time of a network resulting from an attachment or spreading process. However, the history of this process is often hidden and only a snapshot of the network is observed in the present-day. Retrieving information from the past of the network can shed light on the origin of an infection or a fake news, and explain the current network structure. In this talk I will present methods estimating the order of arrival of the vertices in a recursive tree. Specifically, we study two fundamental random recursive tree models: the uniform attachment model and the linear preferential attachment model. I will start by presenting an order estimator based on the Jordan centrality measure and defining a parametric family of risk measures to quantify the quality of the ordering procedure. Then, I will establish a minimax lower bound for this problem based on the shape exchangeability of these recursive trees, and demonstrate that the proposed estimator is near-optimal. Finally, I will also consider alternative ordering procedures based on degree centrality, spectral method and a peeling strategy and conclude by displaying numerical evidences that the Jordan ordering is the best performer for our measure of error.

MARTES, 23 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

SESIÓN ESPECIAL 4  
Matemática Discreta y Algorítmica

FACTORIZACIONES EN EXTENSIONES  
DE IDEALES DE MONOIDES LIBRES  
COMUTATIVOS

COLOREAR GRAFOS DE CAYLEY

ALGUNOS ELEMENTOS  
COMBINATORIOS DENTRO DE LA  
TEORÍA DE SINGULARIDADES...

DIÁMETRO CONTINUO EN GRAFOS

ON DISCRETE BRUNN-MINKOWSKI  
TYPE INEQUALITIES

NUMERICAL SEMIGROUPS WITHIN  
THE COPRICA RESEARCH GROUP

ESTIMATING ADAM'S GENEALOGY

TOWARDS A REALIZATION OF THE  
K-ASSOCIAHEDRON?

NILESPACIOS FINITOS Y  
APLICACIONES RECIENTES

INFINITE CHAINS IN THE TREE OF  
NUMERICAL SEMIGROUPS

GRUPO GAPCOMB DE LA UPC  
SISTEMAS DE VOTACIONES Y  
COMBINATORIA ANALÍTICA

## Towards a realization of the $k$ -associahedron?

FRANCISCO SANTOS, LUIS CRESPO RUIZ

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria

[francisco.santos@unican.es](mailto:francisco.santos@unican.es)

**Abstract:** A subset of  $k + 1$  diagonals of the  $n$ -gon is called a  $(k + 1)$ -crossing if they all mutually cross, and a general subset is called  $(k + 1)$ -crossing free if it does not contain a  $k$ -crossing.  $(k + 1)$ -crossing free subsets form a simplicial complex that we call the  $k$ -associahedron and denote  $Ass_k(n)$  since for  $k = 1$  one recovers the (simplicial) associahedron. The  $k$ -associahedron is known to be a shellable sphere and conjectured to be polytopal [2]. It is also a subword complex in the root system of the  $A$  and, moreover, every (spherical) subword complex is a link in some  $k$ -associahedron. In particular, polytopality of  $k$ -associahedra would imply the same for spherical subword complexes (in type  $A$ ), a question asked by Knutson and Miller [3].

The dimension of the  $k$ -associahedron coincides with that of any abstract rigidity matrix of dimension  $2k$  on  $n$  elements. This made Pilaud and Santos [4] conjecture that  $k$ -triangulations are generically isostatic graphs in dimension  $2k$ , in the usual bar-and-joint rigidity theory, as a step towards the construction of the  $k$ -associahedron via the corresponding rigidity matrix. We explore this possibility [1].

### Referencias

- [1] L. Crespo Ruiz, Francisco Santos. Multitriangulations and tropical Pfaffians. Preprint, 29 pages, March 2022. arXiv:2203.04633
- [2] J. Jonsson (2005). Generalized triangulations and diagonal-free subsets of stack polyominoes, *J. Comb. Theory Ser. A* 112(1), 117–142.
- [3] A. Knutson, E. Miller (2004). Subword complexes in Coxeter groups. *Adv. Math.*, 184(1), 161–176.
- [4] V. Pilaud, F. Santos (2009). Multitriangulations as Complexes of Star Polygons, *Discrete Comput. Geom.* 41, 284–317.

MARTES, 23 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

SESIÓN ESPECIAL 4  
Matemática Discreta y Algorítmica

FACTORIZACIONES EN EXTENSIONES  
DE IDEALES DE MONOIDES LIBRES  
COMUTATIVOS

COLOREAR GRAFOS DE CAYLEY

ALGUNOS ELEMENTOS  
COMBINATORIOS DENTRO DE LA  
TEORÍA DE SINGULARIDADES...

DIÁMETRO CONTINUO EN GRAFOS

ON DISCRETE BRUNN-MINKOWSKI  
TYPE INEQUALITIES

NUMERICAL SEMIGROUPS WITHIN  
THE COPRICA RESEARCH GROUP

ESTIMATING ADAM'S GENEALOGY

TOWARDS A REALIZATION OF THE  
 $K$ -ASSOCIAHEDRON?

NILESPACIOS FINITOS Y  
APLICACIONES RECIENTES

INFINITE CHAINS IN THE TREE OF  
NUMERICAL SEMIGROUPS

GRUPO GAPCOMB DE LA UPC  
SISTEMAS DE VOTACIONES Y  
COMBINATORIA ANALÍTICA

## Nilespacios finitos y aplicaciones recientes

PABLO CANDELA, DIEGO GONZÁLEZ-SÁNCHEZ, BALÁZS SZEGEDY

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid

[pablo.candela@uam.es](mailto:pablo.candela@uam.es)

**Resumen:** El análisis de las normas de Gowers es uno de los temas más activos de la combinatoria aritmética desde finales de los años 1990, gracias especialmente a las nuevas extensiones que ofrece del análisis de Fourier discreto. Recientemente, este tema recibió un nuevo impulso basado en interesantes preguntas y conjeturas de Jammeshan, Shalom y Tao. Una de estas cuestiones concierne a las normas de Gowers en el ámbito discreto de grupos abelianos finitos con exponente acotado [1, Question 1.9]. Hablaremos de avances recientes en esta dirección (en colaboración con González-Sánchez y Szegedy), que la conectan con una nueva rama de la teoría de los nilespacios. Aprovecharemos para ofrecer una breve introducción a esta joven teoría, y en particular a los nilespacios finitos, que abren nuevas direcciones de investigación en matemática discreta.

### Referencias

- [1] A. Jammeshan, O. Shalom, T. Tao, The structure of totally disconnected Host–Kra–Ziegler factors, and the inverse theorem for the  $U^k$  Gowers uniformity norms on finite abelian groups of bounded torsion, preprint (2023). <https://arxiv.org/pdf/2303.04860.pdf>

MARTES, 23 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

SESIÓN ESPECIAL 4  
Matemática Discreta y Algorítmica

FACTORIZACIONES EN EXTENSIONES  
DE IDEALES DE MONOIDES LIBRES  
COMUTATIVOS

COLOREAR GRAFOS DE CAYLEY

ALGUNOS ELEMENTOS  
COMBINATORIOS DENTRO DE LA  
TEORÍA DE SINGULARIDADES...

DIÁMETRO CONTINUO EN GRAFOS

ON DISCRETE BRUNN–MINKOWSKI  
TYPE INEQUALITIES

NUMERICAL SEMIGROUPS WITHIN  
THE COPRICA RESEARCH GROUP

ESTIMATING ADAM'S GENEALOGY

TOWARDS A REALIZATION OF THE  
K-ASSOCIAHEDRON?

NILESPACIOS FINITOS Y  
APLICACIONES RECIENTES

INFINITE CHAINS IN THE TREE OF  
NUMERICAL SEMIGROUPS

GRUPO GAPCOMB DE LA UPC  
SISTEMAS DE VOTACIONES Y  
COMBINATORIA ANALÍTICA

## Infinite chains in the tree of numerical semigroups

MARIANA ROSAS-RIBEIRO, MARIA BRAS-AMORÓS

Departament d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques, Universitat Rovira i Virgili

[mariana.rosas@urv.cat](mailto:mariana.rosas@urv.cat)

**Abstract:** A numerical semigroup is a submonoid of the additive monoid  $\mathbf{N}$  with finite complement in  $\mathbf{N}$ . The cardinality of the complement of a numerical semigroup is its genus and its smallest non-zero element is the multiplicity. For a given positive integer  $g$ , there is a limited amount of numerical semigroups that have genus  $g$ . There is no formula for the number  $n_g$  of numerical semigroups of genus  $g$ , but in 2008 Bras-Amorós [1] conjectured that as  $g$  grows  $n_g$  grows Fibonacci-like. One of the tools to study the growth of this  $n_g$  sequence is the tree of numerical semigroups, that organizes all the numerical semigroups in such a way that each level  $g$  of the tree is formed by the numerical semigroups of genus  $g$ . In this tree there are nodes that have infinite descendants. In [2], the authors characterize these nodes (numerical semigroups) using the greatest common divisor of the first elements of the numerical semigroup. The collection formed by a numerical semigroup and its infinitely many descendants, if applicable, is an infinite chain. In this talk we show that at each level of the tree there are more nodes which are not in an infinite chain than the other way around. Furthermore, we find a self-replicating behavior in the subtrees formed by numerical semigroups with fixed multiplicity  $m$ . With this, we can determine the number of numerical semigroups that have infinitely many descendants, genus  $g$  and multiplicity  $m \leq 7$ .

### Referencias

- [1] M. Bras-Amorós (2008). Fibonacci-like behavior of the number of numerical semigroups of a given genus. *Semigroup Forum*, 76, pp. 379–384.
- [2] M. Bras-Amorós, S. Bulygin (2009). Towards a better understanding of the semigroup tree. *Semigroup Forum*, 79, 561-574.

**Acknowledgments:** The first author was supported by the Catalan government under grant 2021 FISDUR 00189. Both authors were supported by the Spanish government under grant PID2021-124928NB-I00, and by the Catalan government under grant 2021 SGR 00115.

MARTES, 23 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 4  
Matemática Discreta y Algorítmica

FACTORIZACIONES EN EXTENSIONES DE IDEALES DE MONOIDES LIBRES CONMUTATIVOS

COLOREAR GRAFOS DE CAYLEY

ALGUNOS ELEMENTOS COMBINATORIOS DENTRO DE LA TEORÍA DE SINGULARIDADES...

DIÁMETRO CONTINUO EN GRAFOS

ON DISCRETE BRUNN-MINKOWSKI TYPE INEQUALITIES

NUMERICAL SEMIGROUPS WITHIN THE COPRICA RESEARCH GROUP

ESTIMATING ADAM'S GENEALOGY

TOWARDS A REALIZATION OF THE K-ASSOCIAHEDRON?

NILES PACIOS FINITOS Y APLICACIONES RECIENTES

INFINITE CHAINS IN THE TREE OF NUMERICAL SEMIGROUPS

GRUPO GAPCOMB DE LA UPC SISTEMAS DE VOTACIONES Y COMBINATORIA ANALÍTICA

## Grupo GAPCOMB de la UPC Sistemas de votaciones y combinatoria analítica

MARC NOY

Departamento de Matemáticas, Universidad Politécnica de Cataluña

[marc.noy@upc.edu](mailto:marc.noy@upc.edu)

**Resumen:** En la charla se dará una breve descripción del grupo de investigación *Combinatoria Geométrica, Algebraica y Probabilística* (GAPCOMB) de la Universidad Politécnica de Cataluña. A continuación se presentará un trabajo en curso sobre sistemas de votaciones que utiliza funciones generadoras y métodos analíticos, en colaboración con Emma Caizerges, François Durand, Élie de Panafieu (Nokia Bell Labs, France) y Vlady Ravelomanana (Université Paris-Cité).

Consideramos un sistema de votación con  $m$  electores y  $n$  candidatos. Cada elector ordena de forma estricta sus preferencias de los  $n$  candidatos. Se dice que el candidato  $C$  es un ganador de Condorcet [1] si la mayoría de electores (suponemos  $n$  impar para evitar empates) prefiere  $C$  a cualquier otro candidato. Suponiendo que cada elector elige el orden de los candidatos de forma aleatoria e independiente, un problema ampliamente estudiado es la probabilidad  $p_m$  de que haya un ganador de Condorcet cuando  $n \rightarrow \infty$ . Claramente  $p_2 = 1$ . Se sabe que  $p_3 = \frac{3}{4} + \frac{3}{2\pi} \arcsin(1/3) \approx 0,9123$  y que  $p_m \rightarrow 0$  cuando  $m \rightarrow \infty$ .

En este trabajo codificamos las preferencias de los electores mediante una función generadora racional  $F(x_1, \dots, x_{m-1})$ . La probabilidad de que exista un ganador de Condorcet se puede expresar en términos del coeficiente de  $x_1^{n/2} x_2^{n/2} \dots x_{m-1}^{n/2}$  en  $F(x_1, \dots, x_{m-1})$ . Utilizando métodos analíticos se puede estimar dicha probabilidad con precisión. Esto proporciona un nuevo método para estudiar este y otros problemas de sistemas de votaciones.

### Referencias

[1] W. Gehrlein (2006). Condorcet's Paradox. Springer.

MARTES, 23 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 4  
Matemática Discreta y Algorítmica

FACTORIZACIONES EN EXTENSIONES DE IDEALES DE MONOIDES LIBRES CONMUTATIVOS

COLOREAR GRAFOS DE CAYLEY

ALGUNOS ELEMENTOS COMBINATORIOS DENTRO DE LA TEORÍA DE SINGULARIDADES...

DIÁMETRO CONTINUO EN GRAFOS

ON DISCRETE BRUNN-MINKOWSKI TYPE INEQUALITIES

NUMERICAL SEMIGROUPS WITHIN THE COPRICA RESEARCH GROUP

ESTIMATING ADAM'S GENEALOGY

TOWARDS A REALIZATION OF THE  $K$ -ASSOCIAHEDRON?

NILESPACIOS FINITOS Y APLICACIONES RECIENTES

INFINITE CHAINS IN THE TREE OF NUMERICAL SEMIGROUPS

GRUPO GAPCOMB DE LA UPC SISTEMAS DE VOTACIONES Y COMBINATORIA ANALÍTICA

## SESIÓN ESPECIAL 5 Recent developments on Convexity

### Organizers:

**MÓNICA BLANCO**  
(Universidad de Cantabria)

**BERNARDO GONZÁLEZ MERINO**  
(Universidad de Murcia)

**RAFAEL VILLA**  
(Universidad de Sevilla)

### Summary:

Convex Geometry is an increasingly growing area of mathematics. Even though its roots go back to the ancient greeks, the core of the theory (the Brunn-Minkowski theory) still attracts many new researchers. Convexity notions and techniques can be found in asymptotic geometric analysis, affine invariant inequalities, discrete geometry, geometry of numbers, geometry of Banach spaces, Optimization, or even linear and convex programming.

The aim of this special session is to gather experts from different research groups, both from Spain and other countries. We expect those experts to deliver research talks, based on their novel mathematical results. We hope that the encounter will boost possible new collaborations and connections among some of the speakers and the audience. Indeed, several speakers are either PhD students or belong to the early stages of their postdoctoral lives.

#### SESIÓN ESPECIAL 5 Recent developments on Convexity

THE ANISOTROPIC ISOPERIMETRIC  
PROBLEM FOR CONVEX CONES

ON COMPLEMENTED BRUNN-  
MINKOWSKI TYPE INEQUALITIES

P-MEANS OF CONVEX BODIES  
AND A NEW SUGGESTION FOR THE  
GEOMETRIC MEAN OF CONVEX BODIES

MEASURE VALUED VALUATIONS ON  
STAR BODIES

ON REFINEMENTS OF CLASSICAL  
INEQUALITIES UNDER PROJECTION  
ASSUMPTIONS

FIBER SYMMETRIZATION AND THE  
ROGERS-BRASCAMP-LIEB-LUTTINGER  
INEQUALITY

THE CHEEGER SET FOR A  
ROTATIONALLY SYMMETRIC PLANAR  
CONVEX BODY

VALORACIONES EN VARIEDADES  
DE KÄHLER

HIGH-DIMENSIONAL LIMIT THEOREMS  
FOR THE DISTANCE BETWEEN  
RANDOM VECTORS...

COMPRESSIONS: AN APPLICATION  
TO DISCRETE ISOPERIMETRIC  
INEQUALITIES

A DISCRETE APPROACH TO ZHANG'S  
INEQUALITY



## The anisotropic isoperimetric problem for convex cones

CÉSAR ROSALES

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada

[crosales@ugr.es](mailto:crosales@ugr.es)

**Abstract:** Given a norm  $\Psi$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$  and a hypersurface  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , the *anisotropic area* of  $\Sigma$  is defined as  $A_\Psi(\Sigma) = \int_\Sigma \Psi(N) d\Sigma$ , where  $N$  is a unit normal over  $\Sigma$  and  $d\Sigma$  denotes the Euclidean area element. The *anisotropic isoperimetric problem* in  $\mathbb{R}^{n+1}$  studies sets minimizing the anisotropic area of the boundary while enclosing a fixed Euclidean volume. It is well-known that the solutions to this problem coincide, up to translations and dilations centered at the origin, with the centrally symmetric convex body  $K$  supported by  $\Psi$ .

In this talk we will analyze the same problem within a *convex open cone*  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . So, we seek compact hypersurfaces  $\Sigma \subset \mathcal{C}$  with  $\partial\Sigma = \Sigma \cap \partial\mathcal{C}$  and minimizing  $A_K(\Sigma)$  while separating a fixed volume in  $\mathcal{C}$ . We will review known results about the existence and characterization of solutions in this setting. Our main contribution shows that, under additional regularity conditions, any second order minimum for this problem is contained in  $\partial K$  (up to a translation and a dilation about the origin).

SESIÓN ESPECIAL 5  
Recent developments on Convexity

THE ANISOTROPIC ISOPERIMETRIC  
PROBLEM FOR CONVEX CONES

ON COMPLEMENTED BRUNN-  
MINKOWSKI TYPE INEQUALITIES

P-MEANS OF CONVEX BODIES  
AND A NEW SUGGESTION FOR THE  
GEOMETRIC MEAN OF CONVEX BODIES

MEASURE VALUED VALUATIONS ON  
STAR BODIES

ON REFINEMENTS OF CLASSICAL  
INEQUALITIES UNDER PROJECTION  
ASSUMPTIONS

FIBER SYMMETRIZATION AND THE  
ROGERS-BRASCAMP-LIEB-LUTTINGER  
INEQUALITY

THE CHEEGER SET FOR A  
ROTATIONALLY SYMMETRIC PLANAR  
CONVEX BODY

VALORACIONES EN VARIEDADES  
DE KÄHLER

HIGH-DIMENSIONAL LIMIT THEOREMS  
FOR THE DISTANCE BETWEEN  
RANDOM VECTORS...

COMPRESSIONS: AN APPLICATION  
TO DISCRETE ISOPERIMETRIC  
INEQUALITIES

A DISCRETE APPROACH TO ZHANG'S  
INEQUALITY

LUNES, 22 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

## On complemented Brunn-Minkowski type inequalities

JESÚS YEPES NICOLÁS, ARTEM ZVAVITCH

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

jesus.yepes@um.es

**Abstract:** A measure  $\mu$  on  $\mathbb{R}^n$  is said to be  $q$ -concave if it satisfies a  $q$ -Brunn-Minkowski inequality, namely,

$$\mu((1-\lambda)A + \lambda B) \geq ((1-\lambda)\mu(A)^q + \lambda\mu(B)^q)^{1/q}$$

for all measurable sets  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  with  $\mu(A)\mu(B) > 0$  such that  $(1-\lambda)A + \lambda B$  is also measurable, and all  $\lambda \in (0, 1)$ .

Following the duality of concave and convex functions, it is natural to wonder about a  $q$ -complemented Brunn-Minkowski inequality, i.e., whether

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus ((1-\lambda)A + \lambda B)) \leq ((1-\lambda)\mu(\mathbb{R}^n \setminus A)^q + \lambda\mu(\mathbb{R}^n \setminus B)^q)^{1/q},$$

provided that  $\mu(\mathbb{R}^n \setminus A), \mu(\mathbb{R}^n \setminus B) < +\infty$ .

When ( $\mu$  is finite and)  $q = 1$  both conditions above are trivially equivalent, but this equivalence is no longer true in general for other values of  $q$ . However, Milman and Rotem in 2014 showed that under certain assumptions of concavity and homogeneity for the density of  $\mu$  such an inequality holds. In particular, the restriction of the Lebesgue measure  $\text{vol}(\cdot)$  to a convex cone  $C$  (which is its support) satisfies the latter inequality for  $q = 1/n$  and any  $A, B \subset C$  with  $\text{vol}(C \setminus A), \text{vol}(C \setminus B) < +\infty$ . This case was later studied also by Schneider in 2018, who gave a different proof and characterized its equality case when  $A$  and  $B$  are convex.

In this talk we will discuss about different functional and geometric forms of complemented Brunn-Minkowski type inequalities for certain absolutely continuous measures on  $\mathbb{R}^n$  containing, among others, both the volume and the standard Gaussian measure  $\gamma_n$ . In particular, we will show the connection between this family of complemented Brunn-Minkowski inequalities and that of dual Brunn-Minkowski inequalities (involving the radial sum).

This is about joint work in progress with A. Zvavitch.

**Acknowledgments:** This work was partially developed during a research stay of the first author at Kent State University, supported by AEI “RYC2021-034858-I” project.

LUNES, 22 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 5  
Recent developments on Convexity

THE ANISOTROPIC ISOPERIMETRIC  
PROBLEM FOR CONVEX CONES

ON COMPLEMENTED BRUNN-  
MINKOWSKI TYPE INEQUALITIES

P-MEANS OF CONVEX BODIES  
AND A NEW SUGGESTION FOR THE  
GEOMETRIC MEAN OF CONVEX BODIES

MEASURE VALUED VALUATIONS ON  
STAR BODIES

ON REFINEMENTS OF CLASSICAL  
INEQUALITIES UNDER PROJECTION  
ASSUMPTIONS

FIBER SYMMETRIZATION AND THE  
ROGERS-BRASCAMP-LIEB-LUTTINGER  
INEQUALITY

THE CHEEGER SET FOR A  
ROTATIONALLY SYMMETRIC PLANAR  
CONVEX BODY

VALORACIONES EN VARIEDADES  
DE KÄHLER

HIGH-DIMENSIONAL LIMIT THEOREMS  
FOR THE DISTANCE BETWEEN  
RANDOM VECTORS...

COMPRESSIONS: AN APPLICATION  
TO DISCRETE ISOPERIMETRIC  
INEQUALITIES

A DISCRETE APPROACH TO ZHANG'S  
INEQUALITY

## $p$ -Means of Convex Bodies and a new Suggestion for the Geometric Mean of Convex Bodies

FLORIAN GRUNDBACHER, RENÉ BRANDENBERG

Department of Mathematics, Technical University of Munich

[florian.grundbacher@tum.de](mailto:florian.grundbacher@tum.de)

**Abstract:** In light of the log-Brunn-Minkowski conjecture, various attempts have been made to define the geometric mean of convex bodies. Many of these constructions are fairly complex and/or fail to satisfy some natural properties one would expect of such a mean. To improve our understanding of potential geometric mean definitions, we study the closely related  $p$ -means of convex bodies, with the usual definition extended to two series ranging over all  $p \in [-\infty, \infty]$ . We characterize their equality cases and obtain (in almost all instances tight) inequalities that quantify how well these means approximate each other. Based on our findings, we propose a fairly simple definition of the geometric mean that satisfies the properties considered in recent literature, and discuss potential axiomatic characterizations. Finally, we conclude that some of these properties are incompatible with approaches to proof the log-Brunn-Minkowski conjecture via geometric means.

SESIÓN ESPECIAL 5  
Recent developments on Convexity

THE ANISOTROPIC ISOPERIMETRIC  
PROBLEM FOR CONVEX CONES

ON COMPLEMENTED BRUNN-  
MINKOWSKI TYPE INEQUALITIES

$P$ -MEANS OF CONVEX BODIES  
AND A NEW SUGGESTION FOR THE  
GEOMETRIC MEAN OF CONVEX BODIES

MEASURE VALUED VALUATIONS ON  
STAR BODIES

ON REFINEMENTS OF CLASSICAL  
INEQUALITIES UNDER PROJECTION  
ASSUMPTIONS

FIBER SYMMETRIZATION AND THE  
ROGERS-BRASCAMP-LIEB-LUTTINGER  
INEQUALITY

THE CHEEGER SET FOR A  
ROTATIONALLY SYMMETRIC PLANAR  
CONVEX BODY

VALORACIONES EN VARIEDADES  
DE KÄHLER

HIGH-DIMENSIONAL LIMIT THEOREMS  
FOR THE DISTANCE BETWEEN  
RANDOM VECTORS...

COMPRESSIONS: AN APPLICATION  
TO DISCRETE ISOPERIMETRIC  
INEQUALITIES

A DISCRETE APPROACH TO ZHANG'S  
INEQUALITY

LUNES, 22 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

## Measure valued valuations on star bodies

IGNACIO VILLANUEVA  
Universidad Complutense Madrid  
[ignaciov@mat.ucm.es](mailto:ignaciov@mat.ucm.es)

**Abstract:** We study valuations defined on the star bodies of  $\mathbb{R}^n$  with values on the space of measures on the unit sphere  $S^{n-1}$ . In particular, we provide an integral representation extending earlier results on scalar valuations on star bodies. Particular attention is devoted to equivariant valuations. A functional characterization of dual area measures is also provided.

### SESIÓN ESPECIAL 5 Recent developments on Convexity

THE ANISOTROPIC ISOPERIMETRIC  
PROBLEM FOR CONVEX CONES

ON COMPLEMENTED BRUNN-  
MINKOWSKI TYPE INEQUALITIES

P-MEANS OF CONVEX BODIES  
AND A NEW SUGGESTION FOR THE  
GEOMETRIC MEAN OF CONVEX BODIES

MEASURE VALUED VALUATIONS ON  
STAR BODIES

ON REFINEMENTS OF CLASSICAL  
INEQUALITIES UNDER PROJECTION  
ASSUMPTIONS

FIBER SYMMETRIZATION AND THE  
ROGERS-BRASCAMP-LIEB-LUTTINGER  
INEQUALITY

THE CHEEGER SET FOR A  
ROTATIONALLY SYMMETRIC PLANAR  
CONVEX BODY

VALORACIONES EN VARIEDADES  
DE KÄHLER

HIGH-DIMENSIONAL LIMIT THEOREMS  
FOR THE DISTANCE BETWEEN  
RANDOM VECTORS...

COMPRESSIONS: AN APPLICATION  
TO DISCRETE ISOPERIMETRIC  
INEQUALITIES

A DISCRETE APPROACH TO ZHANG'S  
INEQUALITY

LUNES, 22 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

## On refinements of classical inequalities under projection assumptions

EUGENIA SAORÍN-GÓMEZ, NICO LOMBARDI, CHRISTIAN RICHTER  
Institute for Algebra, Geometry, Topology and their Applications, Universität Bremen  
[esaoring@math.uni-bremen.de](mailto:esaoring@math.uni-bremen.de)

**Abstract:** Based on projection assumptions, we will discuss some classical and new "linear" refinements of inequalities within the Brunn-Minkowski and elliptic Brunn-Minkowski theory, with the aim of exploring parallelisms and differences of both theories.

MARTES, 23 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 5  
Recent developments on Convexity

THE ANISOTROPIC ISOPERIMETRIC  
PROBLEM FOR CONVEX CONES

ON COMPLEMENTED BRUNN-  
MINKOWSKI TYPE INEQUALITIES

P-MEANS OF CONVEX BODIES  
AND A NEW SUGGESTION FOR THE  
GEOMETRIC MEAN OF CONVEX BODIES

MEASURE VALUED VALUATIONS ON  
STAR BODIES

ON REFINEMENTS OF CLASSICAL  
INEQUALITIES UNDER PROJECTION  
ASSUMPTIONS

FIBER SYMMETRIZATION AND THE  
ROGERS-BRASCAMP-LIEB-LUTTINGER  
INEQUALITY

THE CHEEGER SET FOR A  
ROTATIONALLY SYMMETRIC PLANAR  
CONVEX BODY

VALORACIONES EN VARIEDADES  
DE KÄHLER

HIGH-DIMENSIONAL LIMIT THEOREMS  
FOR THE DISTANCE BETWEEN  
RANDOM VECTORS...

COMPRESSIONS: AN APPLICATION  
TO DISCRETE ISOPERIMETRIC  
INEQUALITIES

A DISCRETE APPROACH TO ZHANG'S  
INEQUALITY

## Fiber symmetrization and the Rogers-Brascamp-Lieb-Luttinger inequality

JULIAN HADDAD

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla

[jhaddad@us.es](mailto:jhaddad@us.es)

**Abstract:** We prove a Rogers-Brascamp-Lieb-Luttinger inequality for functions defined in the space of  $n \times m$  matrices, using a particular form of fiber-symmetrization. Some applications on symmetrization of matrix norms are given. We also discuss a conjectured inequality by Schneider, on the higher-order difference body.

MARTES, 23 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

SESIÓN ESPECIAL 5  
Recent developments on Convexity

THE ANISOTROPIC ISOPERIMETRIC  
PROBLEM FOR CONVEX CONES

ON COMPLEMENTED BRUNN-  
MINKOWSKI TYPE INEQUALITIES

P-MEANS OF CONVEX BODIES  
AND A NEW SUGGESTION FOR THE  
GEOMETRIC MEAN OF CONVEX BODIES

MEASURE VALUED VALUATIONS ON  
STAR BODIES

ON REFINEMENTS OF CLASSICAL  
INEQUALITIES UNDER PROJECTION  
ASSUMPTIONS

FIBER SYMMETRIZATION AND THE  
ROGERS-BRASCAMP-LIEB-LUTTINGER  
INEQUALITY

THE CHEEGER SET FOR A  
ROTATIONALLY SYMMETRIC PLANAR  
CONVEX BODY

VALORACIONES EN VARIEDADES  
DE KÄHLER

HIGH-DIMENSIONAL LIMIT THEOREMS  
FOR THE DISTANCE BETWEEN  
RANDOM VECTORS...

COMPRESSIONS: AN APPLICATION  
TO DISCRETE ISOPERIMETRIC  
INEQUALITIES

A DISCRETE APPROACH TO ZHANG'S  
INEQUALITY

## The Cheeger set for a rotationally symmetric planar convex body

ANTONIO CAÑETE

Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla

[antonio@us.es](mailto:antonio@us.es)

**Abstract:** Let  $\Omega$  be a  $k$ -rotationally symmetric planar convex body, and let  $C_\Omega$  be the *Cheeger set* associated to  $\Omega$  (that is, among all the subsets of  $\Omega$ ,  $C_\Omega$  is the one minimizing the quotient of the perimeter over the enclosed area).

In this talk, we will describe some properties of  $C_\Omega$ . In particular, we will show that  $C_\Omega$  is  $k$ -rotationally symmetric. Additionally, by introducing previously the notions of *dots* and *edges* of  $\Omega$ , we will prove that the boundary of  $C_\Omega$  touches all the edges of  $\Omega$  (in other words,  $\Omega$  is a Cheeger-regular set, in view of a definition from a paper by Kawohl and Lachand-Robert [2]).

### References

- [1] A. Cañete (2022). Cheeger sets for rotationally symmetric planar convex bodies, *Results Math.*, 77, paper n. 9, 15 pp.
- [2] B. Kawohl, T. Lachand-Robert (2006). Characterization of Cheeger sets for convex subsets of the plane, *Pacific J. Math.*, 225, 103–118.

MARTES, 23 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

SESIÓN ESPECIAL 5  
Recent developments on Convexity

THE ANISOTROPIC ISOPERIMETRIC  
PROBLEM FOR CONVEX CONES

ON COMPLEMENTED BRUNN-  
MINKOWSKI TYPE INEQUALITIES

P-MEANS OF CONVEX BODIES  
AND A NEW SUGGESTION FOR THE  
GEOMETRIC MEAN OF CONVEX BODIES

MEASURE VALUED VALUATIONS ON  
STAR BODIES

ON REFINEMENTS OF CLASSICAL  
INEQUALITIES UNDER PROJECTION  
ASSUMPTIONS

FIBER SYMMETRIZATION AND THE  
ROGERS-BRASCAMP-LIEB-LUTTINGER  
INEQUALITY

THE CHEEGER SET FOR A  
ROTATIONALLY SYMMETRIC PLANAR  
CONVEX BODY

VALORACIONES EN VARIEDADES  
DE KÄHLER

HIGH-DIMENSIONAL LIMIT THEOREMS  
FOR THE DISTANCE BETWEEN  
RANDOM VECTORS...

COMPRESSIONS: AN APPLICATION  
TO DISCRETE ISOPERIMETRIC  
INEQUALITIES

A DISCRETE APPROACH TO ZHANG'S  
INEQUALITY

## Valoraciones en variedades de Kähler

GIL SOLANES, ANDREAS BERNIG, JOSEPH H.G. FU, THOMAS WANNERER

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona

[gil.solanes@uab.cat](mailto:gil.solanes@uab.cat)

**Abstract:** En el marco de la teoría de valoraciones en variedades, los funcionales de Lipschitz-Killing generan un álgebra asociada canónicamente a cualquier variedad de Riemann. En el caso de la esfera y del espacio hiperbólico, esta álgebra coincide con el espacio de valoraciones invariantes por isometrías. Esto implica, por ejemplo, que las álgebras de valoraciones invariantes de la esfera y del espacio euclídeo son isomorfas. En la charla presentaremos un álgebra canónica de valoraciones asociada a cualquier variedad de Kähler [2]. En el proyectivo complejo, esta álgebra coincide con el espacio de valoraciones invariantes por isometrías, lo que da lugar a un isomorfismo canónico entre las álgebras de valoraciones invariantes de los espacios proyectivo y euclídeo complejos. A su vez, esto explica de forma satisfactoria algunos resultados un tanto sorprendentes en geometría integral hermítica [1].

### References

- [1] A. Bernig, J.H.G. Fu, G. Solanes (2014). Integral geometry of complex space forms. *Geom. Funct. Anal.* 24, 402-492.
- [2] A. Bernig, J.H.G. Fu, G. Solanes, T. Wannerer (2023). The Weyl tube theorem for Kähler manifolds [arXiv:2209.05806](https://arxiv.org/abs/2209.05806)

MARTES, 23 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

SESIÓN ESPECIAL 5  
Recent developments on Convexity

THE ANISOTROPIC ISOPERIMETRIC  
PROBLEM FOR CONVEX CONES

ON COMPLEMENTED BRUNN-  
MINKOWSKI TYPE INEQUALITIES

P-MEANS OF CONVEX BODIES  
AND A NEW SUGGESTION FOR THE  
GEOMETRIC MEAN OF CONVEX BODIES

MEASURE VALUED VALUATIONS ON  
STAR BODIES

ON REFINEMENTS OF CLASSICAL  
INEQUALITIES UNDER PROJECTION  
ASSUMPTIONS

FIBER SYMMETRIZATION AND THE  
ROGERS-BRASCAMP-LIEB-LUTTINGER  
INEQUALITY

THE CHEEGER SET FOR A  
ROTATIONALLY SYMMETRIC PLANAR  
CONVEX BODY

VALORACIONES EN VARIEDADES  
DE KÄHLER

HIGH-DIMENSIONAL LIMIT THEOREMS  
FOR THE DISTANCE BETWEEN  
RANDOM VECTORS...

COMPRESSIONS: AN APPLICATION  
TO DISCRETE ISOPERIMETRIC  
INEQUALITIES

A DISCRETE APPROACH TO ZHANG'S  
INEQUALITY



## High-dimensional limit theorems for the distance between random vectors in $l_p^n$ -balls

JAVIER MARTÍN GOÑI

Faculty of Computer Sciences and Mathematics, University of Passau/  
 Área de Análisis Matemático, Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza  
[j.martin@unizar.es](mailto:j.martin@unizar.es)  
[javier.martingoni@uni-passau.de](mailto:javier.martingoni@uni-passau.de)

### Resumen:

Let  $p \geq 1$ , and let  $g_1, \dots, g_n$  be independent copies of a random variable  $g$  with density with respect to the lebesgue measure given by

$$\frac{e^{-|t|^p}}{2\Gamma(1 + 1/p)}.$$

Then, the random vector  $G = (g_1, \dots, g_n)$  satisfies that  $\frac{G}{\|G\|_p}$  is uniformly distributed on the boundary of the  $l_p^n$  unit ball, denoted as  $\partial B_p^n$ . Let  $G'$  be an independent copy of  $G$ . Then,

$$\left\| \frac{G}{\|G\|_p} - \frac{G'}{\|G'\|_p} \right\|_2$$

is the distance between two uniformly distributed random vectors on  $\partial B_p^n$ .

In [1], Hammersley proved a central limit theorem for the case  $p = 2$ . In particular, he proved that as the dimension  $n$  tends to infinity, the distance between uniformly distributed random vectors on hyperspheres tends to  $N\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2n}\right)$ , where  $N(\mu, \sigma^2)$  is a Gaussian random variable with mean  $\mu$  and variance  $\sigma^2$ .

In this talk we will study the cases where the random vectors are uniformly distributed on the boundary of  $B_p^n$ , for  $p \geq 1$ , and obtain their respective central limit theorems.

### References

- [1] J. M. Hammersley (1950). The Distribution of Distance in a Hypersphere. The Annals of Mathematical Statistics, vol. 21, no. 3, pp. 447-52.

MARTES, 23 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 5  
Recent developments on Convexity

THE ANISOTROPIC ISOPERIMETRIC  
PROBLEM FOR CONVEX CONES

ON COMPLEMENTED BRUNN-  
MINKOWSKI TYPE INEQUALITIES

P-MEANS OF CONVEX BODIES  
AND A NEW SUGGESTION FOR THE  
GEOMETRIC MEAN OF CONVEX BODIES

MEASURE VALUED VALUATIONS ON  
STAR BODIES

ON REFINEMENTS OF CLASSICAL  
INEQUALITIES UNDER PROJECTION  
ASSUMPTIONS

FIBER SYMMETRIZATION AND THE  
ROGERS-BRASCAMP-LIEB-LUTTINGER  
INEQUALITY

THE CHEEGER SET FOR A  
ROTATIONALLY SYMMETRIC PLANAR  
CONVEX BODY

VALORACIONES EN VARIEDADES  
DE KÄHLER

HIGH-DIMENSIONAL LIMIT THEOREMS  
FOR THE DISTANCE BETWEEN  
RANDOM VECTORS...

COMPRESSIONS: AN APPLICATION  
TO DISCRETE ISOPERIMETRIC  
INEQUALITIES

A DISCRETE APPROACH TO ZHANG'S  
INEQUALITY

## Compressions: An application to discrete isoperimetric inequalities

DAVID IGLESIAS, EDUARDO LUCAS

Departamento de Ciencias, Centro Universitario de la Defensa, Universidad Politécnica de Cartagena  
[eduardo.lucas@tud.upct.es](mailto:eduardo.lucas@tud.upct.es)

**Abstract:** The *isoperimetric inequality* is perhaps one of the most classical results in geometry, and states that for any given positive volume (Lebesgue measure), Euclidean balls are the sets that minimize the surface area measure among the family of compact sets with said volume. Copious extensions and generalizations to diverse contexts and branches in mathematics have been obtained since its original inception in the Hellenistic period. In this talk, we will be specifically interested in versions of this inequality in the discrete setting, in particular, for subsets of lattices, such as  $\mathbb{Z}^n$ .

We will recall the notion of *compressed sets* in this setting, and the corresponding process of *compression*, which has been largely exploited in the context of discrete geometry and number theory, and in particular, in the study of discrete isoperimetric inequalities. We will present some recent discrete versions of this inequality, and a characterization of the equality case in special cases, both of which heavily depend on the process of compression.

This is joint work with David Iglesias (Universidad de Murcia).

**Acknowledgments:** We would like to express our gratitude to María A. Hernández Cifre and J. Yepes Nicolás, who brought this topic to our attention and greatly helped us polish the work.

MARTES, 23 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 5  
Recent developments on Convexity

THE ANISOTROPIC ISOPERIMETRIC  
PROBLEM FOR CONVEX CONES

ON COMPLEMENTED BRUNN-  
MINKOWSKI TYPE INEQUALITIES

P-MEANS OF CONVEX BODIES  
AND A NEW SUGGESTION FOR THE  
GEOMETRIC MEAN OF CONVEX BODIES

MEASURE VALUED VALUATIONS ON  
STAR BODIES

ON REFINEMENTS OF CLASSICAL  
INEQUALITIES UNDER PROJECTION  
ASSUMPTIONS

FIBER SYMMETRIZATION AND THE  
ROGERS-BRASCAMP-LIEB-LUTTINGER  
INEQUALITY

THE CHEEGER SET FOR A  
ROTATIONALLY SYMMETRIC PLANAR  
CONVEX BODY

VALORACIONES EN VARIEDADES  
DE KÄHLER

HIGH-DIMENSIONAL LIMIT THEOREMS  
FOR THE DISTANCE BETWEEN  
RANDOM VECTORS...

COMPRESSIONS: AN APPLICATION  
TO DISCRETE ISOPERIMETRIC  
INEQUALITIES

A DISCRETE APPROACH TO ZHANG'S  
INEQUALITY

## A discrete approach to Zhang's inequality

DAVID ALONSO-GUTIÉRREZ, EDUARDO LUCAS, JAVIER MARTÍN GOÑI

Área de Análisis Matemático, Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza

[alonsod@unizar.es](mailto:alonsod@unizar.es)

**Abstract:** We will consider the inclusion relation between the  $n$ -th Ball body of the covariogram function  $g_K$  of a convex body  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  and its polar projection body,  $\left(\frac{2n}{n}\right)^{\frac{1}{n}} K_n(g_K) \subseteq n(\text{vol}_n(K))\Pi^*(K)$ , which was proved by Gardner and Zhang and leads to Zhang's inequality. We will provide a slightly different proof of such inclusion which will only make use of Berwald's inequality in the positive range of the parameters involved. With this approach we will be able to provide discrete analogues, where we consider the lattice point enumerator measure, instead of the Lebesgue measure. Such discrete inequalities will allow us to recover the continuous ones.

SESIÓN ESPECIAL 5  
Recent developments on Convexity

THE ANISOTROPIC ISOPERIMETRIC  
PROBLEM FOR CONVEX CONES

ON COMPLEMENTED BRUNN-  
MINKOWSKI TYPE INEQUALITIES

P-MEANS OF CONVEX BODIES  
AND A NEW SUGGESTION FOR THE  
GEOMETRIC MEAN OF CONVEX BODIES

MEASURE VALUED VALUATIONS ON  
STAR BODIES

ON REFINEMENTS OF CLASSICAL  
INEQUALITIES UNDER PROJECTION  
ASSUMPTIONS

FIBER SYMMETRIZATION AND THE  
ROGERS-BRASCAMP-LIEB-LUTTINGER  
INEQUALITY

THE CHEEGER SET FOR A  
ROTATIONALLY SYMMETRIC PLANAR  
CONVEX BODY

VALORACIONES EN VARIEDADES  
DE KÄHLER

HIGH-DIMENSIONAL LIMIT THEOREMS  
FOR THE DISTANCE BETWEEN  
RANDOM VECTORS...

COMPRESSIONS: AN APPLICATION  
TO DISCRETE ISOPERIMETRIC  
INEQUALITIES

A DISCRETE APPROACH TO ZHANG'S  
INEQUALITY

MARTES, 23 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

## SESIÓN ESPECIAL 6

### Red de Geometría Algebraica y Singularidades

**Organizadores:**

ENRIQUE ARTAL BARTOLO  
(Universidad de Zaragoza)

JOSÉ IGNACIO COGOLLUDO AGUSTÍN  
(Universidad de Zaragoza)

ILYA SMIRNOV  
(Basque Center for Applied Mathematics)

**Descripción:**

La Red de Geometría Algebraica y Singularidades está reconocida por el MINECO (MTM2016-81735-REDT, RED2018-102583-T, RED2022-134105-T) desde el año 2016, y está formada por más de 120 investigadores integrados en 27 proyectos de investigación financiados por el MINECO y organizados en 13 nodos. La sesión tiene un triple objetivo:

- Presentar los recientes avances en el ámbito de la Geometría Algebraica y las Singularidades.
- Apoyar las actividades de la RSME en cuanto a difusión y visibilidad científica de las matemáticas en España.
- Hacer visible la Red y su investigación en el contexto nacional. La información completa de la Red se puede consultar en su página web: <http://www.mat.ucm.es/~rgas/>

SESIÓN ESPECIAL 6  
Red de Geometría Algebraica y  
Singularidades

ON THE FINITE GENERATION OF THE  
EFFECTIVE CONE AND THE COX RING  
OF A RATIONAL SURFACE

SOME CONSEQUENCES OF THE  
M-CONSTANT CONDITION FOR  
FAMILIES OF SURFACES

HODGE THEORY OF ABELIAN COVERS  
OF ALGEBRAIC VARIETIES

THE TOTAL SPINE AND INVARIANT  
MILNOR FIBRATION AT RADIUS ZERO  
FOR PLANE...

OPERADORES DIFERENCIALES EN  
ANILLOS DE INVARIANTES DE GRUPOS  
FINITOS

ROBUSTEZ DE AGUJEROS EN  
COMPLEJOS SIMPLICIALES FINITOS

SOPHIE GERMAIN COVERINGS OF  
CURVES OF GENUS 2

SOBRE LA MULTISUMABILIDAD DE  
LAS SERIES HIPERGEOMETRICAS

LA CONJETURA DE MOND

DUALITY OF DIVISORS AND CURVES  
ON MORI DREAM SPACES

VISUALIZING THE VALUATIVE  
NAGATA CONJECTURE: A GEOMETRIC  
APPROACH

ON AUTOMORPHISM GROUPS AND  
TWISTING THEORY FOR SMOOTH  
PLANE CURVES

## On the finite generation of the effective cone and the Cox ring of a rational surface

FRANCISCO MONSERRAT, C. GALINDO, C. J. MORENO ÁVILA  
Universidad Politécnica de Valencia  
[framonde@mat.upv.es](mailto:framonde@mat.upv.es)

**Abstract:** Let  $X$  be a rational surface obtained from a Hirzebruch surface by a sequence of blowups centered at closed points. We will show conditions which imply, on the one hand, that the effective cone of  $X$  is polyhedral and minimally generated and, on the other hand, the finite generation of the Cox ring of  $X$ . Moreover, we provide a set of generators of the nef cone of  $X$  in these cases. The talk is based on joint work with C. Galindo and C. J. Moreno Ávila.

SESIÓN ESPECIAL 6  
Red de Geometría Algebraica y  
Singularidades

ON THE FINITE GENERATION OF THE  
EFFECTIVE CONE AND THE COX RING  
OF A RATIONAL SURFACE

SOME CONSEQUENCES OF THE  
 $\mathcal{M}$ -CONSTANT CONDITION FOR  
FAMILIES OF SURFACES

HODGE THEORY OF ABELIAN COVERS  
OF ALGEBRAIC VARIETIES

THE TOTAL SPINE AND INVARIANT  
MILNOR FIBRATION AT RADIUS ZERO  
FOR PLANE...

OPERADORES DIFERENCIALES EN  
ANILLOS DE INVARIANTES DE GRUPOS  
FINITOS

ROBUSTEZ DE AGUJEROS EN  
COMPLEJOS SIMPLICIALES FINITOS

SOPHIE GERMAIN COVERINGS OF  
CURVES OF GENUS 2

SOBRE LA MULTISUMABILIDAD DE  
LAS SERIES HIPERGEOMETRICAS

LA CONJETURA DE MOND

DUALITY OF DIVISORS AND CURVES  
ON MORI DREAM SPACES

VISUALIZING THE VALUATIVE  
NAGATA CONJECTURE: A GEOMETRIC  
APPROACH

ON AUTOMORPHISM GROUPS AND  
TWISTING THEORY FOR SMOOTH  
PLANE CURVES

LUNES, 22 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

## Some consequences of the $\mu$ -constant condition for families of surfaces

MARTA ALDASORO, JAVIER FERNÁNDEZ DE BOBADILLA

Basque Center for Applied Mathematics

[maldasoro@bcamath.org](mailto:maldasoro@bcamath.org)

**Abstract:** We work with a 1-parameter family  $X \rightarrow \Delta$  of isolated hypersurface singularities of fibre dimension 2 with constant Milnor number. Let  $W \rightarrow X$  be a semistable resolution of singularities, obtained replacing  $X$  by a suitable base change. We show that the second cohomology groups of the exceptional divisors lying in the central fibre  $W_0$  satisfy the vanishing  $h^{2,0} = 0$ . Furthermore, we prove that the dual complex associated to the mentioned central fibre has the rational homology of a point. These two results allow us to show that if we make a compactification of our family, then the first cohomology group of the compactified central fibre coincides with that of the compactification of the strict transform. To achieve them, we make use of the Steenbrink spectral sequence degenerating to the cohomology of a generic fibre of the resolution, endowed with the limit mixed Hodge structure.

SESIÓN ESPECIAL 6  
Red de Geometría Algebraica y  
Singularidades

ON THE FINITE GENERATION OF THE  
EFFECTIVE CONE AND THE COX RING  
OF A RATIONAL SURFACE

SOME CONSEQUENCES OF THE  
 $\mu$ -CONSTANT CONDITION FOR  
FAMILIES OF SURFACES

HODGE THEORY OF ABELIAN COVERS  
OF ALGEBRAIC VARIETIES

THE TOTAL SPINE AND INVARIANT  
MILNOR FIBRATION AT RADIUS ZERO  
FOR PLANE...

OPERADORES DIFERENCIALES EN  
ANILLOS DE INVARIANTES DE GRUPOS  
FINITOS

ROBUSTEZ DE AGUJEROS EN  
COMPLEJOS SIMPLICIALES FINITOS

SOPHIE GERMAIN COVERINGS OF  
CURVES OF GENUS 2

SOBRE LA MULTISUMABILIDAD DE  
LAS SERIES HIPERGEOMETRICAS

LA CONJETURA DE MOND

DUALITY OF DIVISORS AND CURVES  
ON MORI DREAM SPACES

VISUALIZING THE VALUATIVE  
NAGATA CONJECTURE: A GEOMETRIC  
APPROACH

ON AUTOMORPHISM GROUPS AND  
TWISTING THEORY FOR SMOOTH  
PLANE CURVES

LUNES, 22 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

## Hodge Theory of abelian covers of algebraic varieties

MOIS S HERRADÓN CUETO, EVA ELDUQUE

Universidad Autónoma de Madrid-ICMAT

[moises.herradon@uam.es](mailto:moises.herradon@uam.es)

**Abstract:** Let  $f : U \rightarrow \mathbb{C}^*$  be an algebraic map from a smooth complex connected algebraic variety  $U$  to the punctured complex line  $\mathbb{C}^*$ . Using  $f$  to pull back the exponential map  $C \rightarrow \mathbb{C}^*$ , one obtains an infinite cyclic cover  $U^f$  of the variety  $U$ , together with a  $\mathbb{Z}$ -action coming from adding  $2\pi i$  in  $\mathbb{C}$ . The homology groups of this infinite cyclic cover, with their  $\mathbb{Z}$ -actions, are the family of Alexander modules associated to  $f$ . In previous work jointly with Eva Elduque, Christian Geske, Laurențiu Maxim and Botong Wang, we constructed a mixed Hodge structure on the torsion part of these Alexander modules. In this talk, we will talk about work in progress aimed at generalizing this theory to abelian covering spaces of algebraic varieties which arise in an algebraic way, i.e. from maps  $f : U \rightarrow G$ , where  $G$  is a semiabelian variety. This is joint work with Eva Elduque.

SESIÓN ESPECIAL 6  
Red de Geometría Algebraica y  
Singularidades

ON THE FINITE GENERATION OF THE  
EFFECTIVE CONE AND THE COX RING  
OF A RATIONAL SURFACE

SOME CONSEQUENCES OF THE  
M-CONSTANT CONDITION FOR  
FAMILIES OF SURFACES

HODGE THEORY OF ABELIAN COVERS  
OF ALGEBRAIC VARIETIES

THE TOTAL SPINE AND INVARIANT  
MILNOR FIBRATION AT RADIUS ZERO  
FOR PLANE...

OPERADORES DIFERENCIALES EN  
ANILLOS DE INVARIANTES DE GRUPOS  
FINITOS

ROBUSTEZ DE AGUJEROS EN  
COMPLEJOS SIMPLICIALES FINITOS

SOPHIE GERMAIN COVERINGS OF  
CURVES OF GENUS 2

SOBRE LA MULTISUMABILIDAD DE  
LAS SERIES HIPERGEOMETRICAS

LA CONJETURA DE MOND

DUALITY OF DIVISORS AND CURVES  
ON MORI DREAM SPACES

VISUALIZING THE VALUATIVE  
NAGATA CONJECTURE: A GEOMETRIC  
APPROACH

ON AUTOMORPHISM GROUPS AND  
TWISTING THEORY FOR SMOOTH  
PLANE CURVES

LUNES, 22 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

## The total spine and invariant Milnor fibration at radius zero for plane curve singularities

BALDUR SIGURSSON, PABLO PORTILLA CUADRADO

Universidad Complutense de Madrid

[baldursi@ucm.es](mailto:baldursi@ucm.es)

**Abstract:** Joint work with Pablo Portilla Cuadrado. We consider a plane curve singularity defined by a holomorphic function germ  $f$  in two complex variables. The total spine is the union of trajectories of the negative gradient flow of  $|f|$  which converge to the origin. We prove that for a generic metric, this set is the disjoint union of finitely many submanifolds. The invariant Milnor fibration at radius zero is obtained by collapsing a finite number of embedded disks in the Milnor fibration at radius zero. Its intersection with the strict transform of the total spine is a spine for this fibration, and thus carries algebro-topological invariants of the Milnor fibration. In ongoing work, we apply this situation to study the monodromy, and in particular, the variation map.

SESIÓN ESPECIAL 6  
Red de Geometría Algebraica y  
Singularidades

ON THE FINITE GENERATION OF THE EFFECTIVE CONE AND THE COX RING OF A RATIONAL SURFACE

SOME CONSEQUENCES OF THE  $\chi$ -CONSTANT CONDITION FOR FAMILIES OF SURFACES

HODGE THEORY OF ABELIAN COVERS OF ALGEBRAIC VARIETIES

THE TOTAL SPINE AND INVARIANT MILNOR FIBRATION AT RADIUS ZERO FOR PLANE...

OPERADORES DIFERENCIALES EN ANILLOS DE INVARIANTES DE GRUPOS FINITOS

ROBUSTEZ DE AGUJEROS EN COMPLEJOS SIMPLICIALES FINITOS

SOPHIE GERMAIN COVERINGS OF CURVES OF GENUS 2

SOBRE LA MULTISUMABILIDAD DE LAS SERIES HIPERGEOMETRICAS

LA CONJETURA DE MOND

DUALITY OF DIVISORS AND CURVES ON MORI DREAM SPACES

VISUALIZING THE VALUATIVE NAGATA CONJECTURE: A GEOMETRIC APPROACH

ON AUTOMORPHISM GROUPS AND TWISTING THEORY FOR SMOOTH PLANE CURVES

LUNES, 22 DE ENERO:  
17:30 – 18:00



## Operadores diferenciales en anillos de invariantes de grupos finitos

JOSEP ÀLVAREZ MONTANER

Universitat Politècnica de Catalunya

[josep.alvarez@upc.es](mailto:josep.alvarez@upc.es)

**Resumen:** En esta charla vamos a ver que ciertos aspectos de la teoría de operadores diferenciales sobre anillos de polinomios se pueden extender al caso de anillos de invariantes de grupos finitos. En particular podemos definir la noción de módulos holónomos y estudiar la cohomología de de Rham de estos módulos.

SESIÓN ESPECIAL 6  
Red de Geometría Algebraica y  
Singularidades

ON THE FINITE GENERATION OF THE EFFECTIVE CONE AND THE COX RING OF A RATIONAL SURFACE

SOME CONSEQUENCES OF THE  $M$ -CONSTANT CONDITION FOR FAMILIES OF SURFACES

HODGE THEORY OF ABELIAN COVERS OF ALGEBRAIC VARIETIES

THE TOTAL SPINE AND INVARIANT MILNOR FIBRATION AT RADIUS ZERO FOR PLANE...

OPERADORES DIFERENCIALES EN ANILLOS DE INVARIANTES DE GRUPOS FINITOS

ROBUSTEZ DE AGUJEROS EN COMPLEJOS SIMPLICIALES FINITOS

SOPHIE GERMAIN COVERINGS OF CURVES OF GENUS 2

SOBRE LA MULTISUMABILIDAD DE LAS SERIES HIPERGEOMETRICAS

LA CONJETURA DE MOND

DUALITY OF DIVISORS AND CURVES ON MORI DREAM SPACES

VISUALIZING THE VALUATIVE NAGATA CONJECTURE: A GEOMETRIC APPROACH

ON AUTOMORPHISM GROUPS AND TWISTING THEORY FOR SMOOTH PLANE CURVES

MARTES, 23 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

## Robustez de agujeros en complejos simpliciales finitos

PABLO HERNÁNDEZ

Universidad de Salamanca

[pablohg.eka@usal.es](mailto:pablohg.eka@usal.es)

**Resumen:** La interpretación de los complejos simpliciales como variedades proyectivas y la teoría de Stanley-Reisner sugiere el uso de herramientas y técnicas de geometría/topología algebraica en el estudio de la combinatoria presente en la teoría de redes. En particular, los números de Betti son importantes invariantes topológicos que proporcionan información sobre las componentes conexas y agujeros del complejo simplicial que modeliza la red. En esta charla veremos cómo por un lado el estudio de los coesqueletos y por otro de la teoría de haces sobre espacios topológicos finitos nos permite definir nuevos conjuntos de invariantes asociados a la categoría de complejos simpliciales finitos, los cuales contienen como caso particular a los números de Betti. Finalmente mostraremos cómo la functorialidad de las construcciones permite interpretar estas generalizaciones de los números de Betti como una medida de la robustez de las componentes conexas y agujeros de un complejo simplicial.

SESIÓN ESPECIAL 6  
Red de Geometría Algebraica y  
Singularidades

ON THE FINITE GENERATION OF THE  
EFFECTIVE CONE AND THE COX RING  
OF A RATIONAL SURFACE

SOME CONSEQUENCES OF THE  
 $\chi$ -CONSTANT CONDITION FOR  
FAMILIES OF SURFACES

HODGE THEORY OF ABELIAN COVERS  
OF ALGEBRAIC VARIETIES

THE TOTAL SPINE AND INVARIANT  
MILNOR FIBRATION AT RADIUS ZERO  
FOR PLANE...

OPERADORES DIFERENCIALES EN  
ANILLOS DE INVARIANTES DE GRUPOS  
FINITOS

ROBUSTEZ DE AGUJEROS EN  
COMPLEJOS SIMPLICIALES FINITOS

SOPHIE GERMAIN COVERINGS OF  
CURVES OF GENUS 2

SOBRE LA MULTISUMABILIDAD DE  
LAS SERIES HIPERGEOMETRICAS

LA CONJETURA DE MOND

DUALITY OF DIVISORS AND CURVES  
ON MORI DREAM SPACES

VISUALIZING THE VALUATIVE  
NAGATA CONJECTURE: A GEOMETRIC  
APPROACH

ON AUTOMORPHISM GROUPS AND  
TWISTING THEORY FOR SMOOTH  
PLANE CURVES

MARTES, 23 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

## Sophie Germain coverings of curves of genus 2

JUAN CARLOS NARANJO, A. ORTEGA (HUMBOLDT U.), I. SPELTA (CRM)

Universitat de Barcelona

[jcnaranjo@ub.edu](mailto:jcnaranjo@ub.edu)

**Abstract:** We consider unramified cyclic coverings of odd degree  $d$  of curves of genus 2. By a result of Lange and Ortega, it is known that the corresponding Prym map  $\mathcal{P}_d$  has degree 10 for  $d = 7$ , and Albano and Pirola proved that the generic fibers of  $\mathcal{P}_3$  and  $\mathcal{P}_5$  are positive dimensional. Moreover, Agostini proved that  $\mathcal{P}_d$  is generically finite for  $d \geq 7$ . In this talk I will report on a proof of the generic injectivity for  $\mathcal{P}_d$  for  $d = 2k + 1$  prime such that  $k$  is also prime. It is conjectured that there are infinitely many pairs of prime numbers of the form  $(k, 2k + 1)$ . These are called Sophie Germain prime numbers.

Our method is based on the study of the isogeny type of the Prym variety and the computation of the theta dual variety of some distinguished curves. This is a joint work with A. Ortega (Humboldt U.) and I. Spelta (CRM).

SESIÓN ESPECIAL 6  
Red de Geometría Algebraica y  
Singularidades

ON THE FINITE GENERATION OF THE  
EFFECTIVE CONE AND THE COX RING  
OF A RATIONAL SURFACE

SOME CONSEQUENCES OF THE  
M-CONSTANT CONDITION FOR  
FAMILIES OF SURFACES

HODGE THEORY OF ABELIAN COVERS  
OF ALGEBRAIC VARIETIES

THE TOTAL SPINE AND INVARIANT  
MILNOR FIBRATION AT RADIUS ZERO  
FOR PLANE...

OPERADORES DIFERENCIALES EN  
ANILLOS DE INVARIANTES DE GRUPOS  
FINITOS

ROBUSTEZ DE AGUJEROS EN  
COMPLEJOS SIMPLICIALES FINITOS

SOPHIE GERMAIN COVERINGS OF  
CURVES OF GENUS 2

SOBRE LA MULTISUMABILIDAD DE  
LAS SERIES HIPERGEOMETRICAS

LA CONJETURA DE MOND

DUALITY OF DIVISORS AND CURVES  
ON MORI DREAM SPACES

VISUALIZING THE VALUATIVE  
NAGATA CONJECTURE: A GEOMETRIC  
APPROACH

ON AUTOMORPHISM GROUPS AND  
TWISTING THEORY FOR SMOOTH  
PLANE CURVES

MARTES, 23 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

## Sobre la multisumabilidad de las series hipergeométricas

MARÍA CRUZ FERNÁNDEZ FERNÁNDEZ, FRANCISCO JESÚS CASTRO JIMÉNEZ,  
SAIEI-JAEYEONG MATSUBARA-HEO  
Universidad de Sevilla  
[mcferrer@us.es](mailto:mcferrer@us.es)

**Resumen:** Los  $D$ -módulos hipergeométricos fueron introducidos por Gelfand, Kapranov y Zelevinsky a finales de los 80 y están asociados a un ideal tórico y a un vector de parámetros complejos. Es bien conocido que estos  $D$ -módulos son regulares holónomos exactamente cuando el ideal tórico es homogéneo respecto a la graduación estándar. Una serie hipergeométrica es una solución formal de un  $D$ -módulo hipergeométrico irregular. En un trabajo previo conjunto con Francisco Jesús Castro Jiménez, Tatsuya Koike y Nobuki Takayama, probamos que ciertas series hipergeométricas son sumables Borel. En esta charla presentamos un trabajo en progreso conjunto con Francisco Jesús Castro Jiménez y Saiei-Jaeyeong Matsubara-Heo. En particular, mostraremos un ejemplo de una serie hipergeométrica no sumable Borel pero sí multisumable. Bajo cierta condición sobre las pendientes del  $D$ -módulo hipergeométrico correspondiente, podemos probar que las series hipergeométricas son multisumables. También expon-dremos algunas ideas para abordar el caso general.

SESIÓN ESPECIAL 6  
Red de Geometría Algebraica y  
Singularidades

ON THE FINITE GENERATION OF THE  
EFFECTIVE CONE AND THE COX RING  
OF A RATIONAL SURFACE

SOME CONSEQUENCES OF THE  
 $\mathcal{M}$ -CONSTANT CONDITION FOR  
FAMILIES OF SURFACES

HODGE THEORY OF ABELIAN COVERS  
OF ALGEBRAIC VARIETIES

THE TOTAL SPINE AND INVARIANT  
MILNOR FIBRATION AT RADIUS ZERO  
FOR PLANE...

OPERADORES DIFERENCIALES EN  
ANILLOS DE INVARIANTES DE GRUPOS  
FINITOS

ROBUSTEZ DE AGUJEROS EN  
COMPLEJOS SIMPLICIALES FINITOS

SOPHIE GERMAIN COVERINGS OF  
CURVES OF GENUS 2

SOBRE LA MULTISUMABILIDAD DE  
LAS SERIES HIPERGEOMETRICAS

LA CONJETURA DE MOND

DUALITY OF DIVISORS AND CURVES  
ON MORI DREAM SPACES

VISUALIZING THE VALUATIVE  
NAGATA CONJECTURE: A GEOMETRIC  
APPROACH

ON AUTOMORPHISM GROUPS AND  
TWISTING THEORY FOR SMOOTH  
PLANE CURVES

MARTES, 23 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

## La conjetura de Mond

GUILLERMO PEÑAFORT SANCHÍS

Universitat de València  
guillermo.penafort@uv.es

**Resumen:** Al estudiar deformaciones de objetos en determinados contextos, existen dos números, que aquí vamos a llamar  $\mu$  y  $\tau$ , que *conjeturalmente*, cumplen la desigualdad

$$\mu \geq \tau.$$

Estos contextos incluyen la teoría de deformaciones de hipersuperficies con singularidad aislada, la teoría de deformaciones de discriminantes de aplicaciones holomorfas finitamente determinadas o, por poner otro ejemplo, el estudio de deformaciones de frontales.

Dado un objeto  $X$ , el número  $\mu$  controla la característica de Euler de un objeto genérico  $X_\epsilon$  próximo a  $X$ , mientras que el número  $\tau$  es el número de parámetros necesario para construir todas las deformaciones de  $X$ . En esta charla intentaremos dar una visión general de la conjetura  $\mu \geq \tau$ , relacionándola con la propiedad de Cohen Macaulay.

SESIÓN ESPECIAL 6  
Red de Geometría Algebraica y  
Singularidades

ON THE FINITE GENERATION OF THE  
EFFECTIVE CONE AND THE COX RING  
OF A RATIONAL SURFACE

SOME CONSEQUENCES OF THE  
M-CONSTANT CONDITION FOR  
FAMILIES OF SURFACES

HODGE THEORY OF ABELIAN COVERS  
OF ALGEBRAIC VARIETIES

THE TOTAL SPINE AND INVARIANT  
MILNOR FIBRATION AT RADIUS ZERO  
FOR PLANE...

OPERADORES DIFERENCIALES EN  
ANILLOS DE INVARIANTES DE GRUPOS  
FINITOS

ROBUSTEZ DE AGUJEROS EN  
COMPLEJOS SIMPLICIALES FINITOS

SOPHIE GERMAIN COVERINGS OF  
CURVES OF GENUS 2

SOBRE LA MULTISUMABILIDAD DE  
LAS SERIES HIPERGEOMETRICAS

LA CONJETURA DE MOND

DUALITY OF DIVISORS AND CURVES  
ON MORI DREAM SPACES

VISUALIZING THE VALUATIVE  
NAGATA CONJECTURE: A GEOMETRIC  
APPROACH

ON AUTOMORPHISM GROUPS AND  
TWISTING THEORY FOR SMOOTH  
PLANE CURVES

MARTES, 23 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

## Duality of divisors and curves on Mori dream spaces

LUIS JOSÉ SANTANA SÁNCHEZ, MARIA CHIARA BRAMBILLA,  
OLIVIA DUMITRESCU, ELISA POSTINGHEL  
Universidad de Valladolid  
[luisjose.santana@uva.es](mailto:luisjose.santana@uva.es)

**Abstract:** Let  $X$  be a normal  $\mathbb{Q}$ -factorial variety with zero irregularity. In [2], Payne addresses a duality problem between the cone of divisors and the cone of curves for toric varieties. Namely, on one hand, for  $0 \leq k \leq n-1$ , we define  $\mathcal{D}_k$  to be the cone of numerical classes of effective divisors on  $X$  whose stable base locus has codimension larger than  $k$  and we set  $\mathcal{D}_k$  to be its closure in  $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ . This gives the filtration

$$\text{Nef}(X) = \mathcal{D}_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_0 = \overline{\text{Eff}(X)}.$$

On the other hand, we denote by  $\mathcal{C}_k$  the closure of the cone in  $N_1(X)_{\mathbb{R}}$  generated by classes of curves moving in a family that sweeps out an  $(n-k)$ -dimensional subvariety of  $X$ . Thus, we obtain the following filtration for the cone of pseudo-effective curves:

$$\overline{NE(X)} = \mathcal{C}_{n-1} \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{C}_1 \supseteq \mathcal{C}_0.$$

It is known that  $\mathcal{C}_{n-1}$  and  $\mathcal{C}_0$  are dual to  $\mathcal{D}_{n-1}$  and  $\mathcal{D}_0$ , respectively, under the standard intersection product. In general, duality for intermediate cones is not expected. For toric varieties Payne proved that we reach duality if we also consider curves sweeping out varieties in some small modification of  $X$ . We call this *weak duality*. Later, in [1], Choi proved that this weak duality holds for Mori dream spaces and asked if, as the pseudo-effective cone, the  $\mathcal{D}_k$  cones are also polyhedral.

In this talk we give a positive answer to Choi's question, by relating the filtration of  $\overline{\text{Eff}(X)}$  to the Mori chamber decomposition of  $X$ .

### Referencias

- [1] S. R. Choi (2012). Duality of the cones of divisors and curves. *Math. Res. Lett.* 19, no. 2, 403-416.
- [2] S. Payne (2006). Stable base loci, movable curves, and small modications, for toric varieties. *Math. Z.* 253, no. 2, pp. 421-431.

MARTES, 23 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 6  
Red de Geometría Algebraica y  
Singularidades

ON THE FINITE GENERATION OF THE  
EFFECTIVE CONE AND THE COX RING  
OF A RATIONAL SURFACE

SOME CONSEQUENCES OF THE  
M-CONSTANT CONDITION FOR  
FAMILIES OF SURFACES

HODGE THEORY OF ABELIAN COVERS  
OF ALGEBRAIC VARIETIES

THE TOTAL SPINE AND INVARIANT  
MILNOR FIBRATION AT RADIUS ZERO  
FOR PLANE...

OPERADORES DIFERENCIALES EN  
ANILLOS DE INVARIANTES DE GRUPOS  
FINITOS

ROBUSTEZ DE AGUJEROS EN  
COMPLEJOS SIMPLICIALES FINITOS

SOPHIE GERMAIN COVERINGS OF  
CURVES OF GENUS 2

SOBRE LA MULTISUMABILIDAD DE  
LAS SERIES HIPERGEOMETRICAS

LA CONJETURA DE MOND

DUALITY OF DIVISORS AND CURVES  
ON MORI DREAM SPACES

VISUALIZING THE VALUATIVE  
NAGATA CONJECTURE: A GEOMETRIC  
APPROACH

ON AUTOMORPHISM GROUPS AND  
TWISTING THEORY FOR SMOOTH  
PLANE CURVES

## Visualizing the valuative Nagata conjecture: A geometric approach

CARLOS-JESÚS MORENO-ÁVILA, C. GALINDO, F. MONSERRAT,  
J.-J. MOYANO-FERNÁNDEZ  
Universitat Jaume I  
[carlosjesus.moreno@uja.es](mailto:carlosjesus.moreno@uja.es)

**Abstract:** The Nagata conjecture arises as a result of the negative answer to the 14th Hilbert problem [5]. Despite many efforts this conjecture remains open after more than 60 years. There exist several reformulations using interesting objects in Algebraic Geometry as Seshadri constants, Mori cone and irrational nef divisors. Recently, a valuative Nagata conjecture has been stated in [2, 4]. This conjecture involves a (real) plane valuation  $\nu$  of the projective plane and a constant named Seshadri-type constant, denoted  $\hat{\mu}(\nu)$  and introduced in [1]. In addition, the valuative Nagata conjecture implies the Nagata conjecture and asymptotic evidences of its trueness in some particular cases have been proved in [4]. In this talk we introduce a natural Seshadri constant for a smooth projective surface  $S$ , a nef divisor on  $S$  and a divisorial plane valuation of  $S$  and we show some of their properties. These results will help us to give several equivalent geometrical statements to the valuative Nagata conjecture for divisorial plane valuations.

This talk is based on a joint work [3] with C. Galindo, F. Monserrat and J.-J. Moyano-Fernández.

### Referencias

- [1] S. Boucksom, A. Küronya, C. Maclean, T. Szemberg (2015). Vanishing sequences and Okounkov bodies. *Math. Ann.*, 361, 811–834.
- [2] M. Dumnicki, B. Harbourne, A. Küronya, J. Roé, T. Szemberg (2017). Very general monomial valuations of  $\mathbb{P}^2$  and a Nagata type conjecture. *Comm. Anal. Geom.*, 25, 125–161.
- [3] C. Galindo, F. Monserrat, C.-J. Moreno-Ávila, J.-J. Moyano-Fernández (2022). On the valuative Nagata conjecture, *arXiv:2208.11041*.
- [4] C. Galindo, F. Monserrat, J. J. Moyano-Fernández (2018). Minimal plane valuations. *J. Alg. Geom.*, 27, 751–783.
- [5] M. Nagata (1959). On the 14-th problem of Hilbert. *Amer. J. Math.*, 81, 766–772.

MARTES, 23 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 6  
Red de Geometría Algebraica y  
Singularidades

ON THE FINITE GENERATION OF THE  
EFFECTIVE CONE AND THE COX RING  
OF A RATIONAL SURFACE

SOME CONSEQUENCES OF THE  
 $\mathcal{M}$ -CONSTANT CONDITION FOR  
FAMILIES OF SURFACES

HODGE THEORY OF ABELIAN COVERS  
OF ALGEBRAIC VARIETIES

THE TOTAL SPINE AND INVARIANT  
MILNOR FIBRATION AT RADIUS ZERO  
FOR PLANE...

OPERADORES DIFERENCIALES EN  
ANILLOS DE INVARIANTES DE GRUPOS  
FINITOS

ROBUSTEZ DE AGUJEROS EN  
COMPLEJOS SIMPLICIALES FINITOS

SOPHIE GERMAIN COVERINGS OF  
CURVES OF GENUS 2

SOBRE LA MULTISUMABILIDAD DE  
LAS SERIES HIPERGEOMETRICAS

LA CONJETURA DE MOND

DUALITY OF DIVISORS AND CURVES  
ON MORI DREAM SPACES

VISUALIZING THE VALUATIVE  
NAGATA CONJECTURE: A GEOMETRIC  
APPROACH

ON AUTOMORPHISM GROUPS AND  
TWISTING THEORY FOR SMOOTH  
PLANE CURVES

## On automorphism groups and twisting theory for smooth plane curves

ESLAM BADR

American University in Cairo

[eslammath@aucegypt.edu](mailto:eslammath@aucegypt.edu)

**Abstract:** Automorphism groups of smooth plane curves play a crucial role in various areas of mathematics, including algebraic geometry and topology. On the other hand, the study of the set of twists of a curve has been proven to be really useful for a better understanding of the arithmetic behavior of the curve. This talk aims to explore automorphism groups of smooth plane curves and their twists. We will discuss the intricate interplay between the geometry of smooth plane curves and their automorphisms, focusing on the significant role played by twists in uncovering the underlying arithmetics. Moreover, the talk will offer insights into ongoing research in the field, presenting results and open problems that contribute to a deeper understanding of automorphism groups and their twists in smooth plane curves, and more generally for smooth projective hypersurfaces.

SESIÓN ESPECIAL 6  
Red de Geometría Algebraica y  
Singularidades

ON THE FINITE GENERATION OF THE  
EFFECTIVE CONE AND THE COX RING  
OF A RATIONAL SURFACE

SOME CONSEQUENCES OF THE  
 $N$ -CONSTANT CONDITION FOR  
FAMILIES OF SURFACES

HODGE THEORY OF ABELIAN COVERS  
OF ALGEBRAIC VARIETIES

THE TOTAL SPINE AND INVARIANT  
MILNOR FIBRATION AT RADIUS ZERO  
FOR PLANE...

OPERADORES DIFERENCIALES EN  
ANILLOS DE INVARIANTES DE GRUPOS  
FINITOS

ROBUSTEZ DE AGUJEROS EN  
COMPLEJOS SIMPLICIALES FINITOS

SOPHIE GERMAIN COVERINGS OF  
CURVES OF GENUS 2

SOBRE LA MULTISUMABILIDAD DE  
LAS SERIES HIPERGEOMETRICAS

LA CONJETURA DE MOND

DUALITY OF DIVISORS AND CURVES  
ON MORI DREAM SPACES

VISUALIZING THE VALUATIVE  
NAGATA CONJECTURE: A GEOMETRIC  
APPROACH

ON AUTOMORPHISM GROUPS AND  
TWISTING THEORY FOR SMOOTH  
PLANE CURVES

MARTES, 23 DE ENERO:  
17:30 – 18:00



## SESIÓN ESPECIAL 7

### Sesión especial de la red MATSI: Criptografía

#### Organizadores:

**VERÓNICA REQUENA**  
(Universidad de Alicante)

**MIGUEL BELTRÁ**  
(Universidad de Alicante)

**SARA DÍAZ CARDELL**  
(Universidade Estadual Paulista)

#### Descripción:

La teoría de la información fue introducida por Claude Shannon y Warren Weaver a finales de los años 40. Corresponde a una rama de las matemáticas y de la computación que estudia la transmisión y el procesamiento de datos. La criptografía es un método de protección de la información y las comunicaciones; además de una herramienta fundamental en la protección de la privacidad y la seguridad en la era digital, y su relación con las matemáticas es crucial. El objetivo de la criptografía es diseñar, implementar, implantar, y hacer uso de sistemas criptográficos para dotar de alguna forma de seguridad. La combinación de criptografía y tecnología proporciona la base para una infraestructura digital segura y eficiente en esta era digital. En esta sesión pretendemos recoger distintas nociones, métodos y algoritmos propios del álgebra, la geometría, la combinatoria, la estadística y la computación, que están siendo desarrolladas por diferentes investigadoras e investigadores españoles, atendiendo al área de la criptografía y sus variantes.

SESIÓN ESPECIAL 7  
Sesión especial de la red MATSI:  
Criptografía

SIN MATEMÁTICAS NO HAY  
CIBERSEGURIDAD

Q-ALICE Y C-BOB TIENEN QUE HABLAR

ON SELF-DUAL BUTSON BENT  
SEQUENCES

COMPLEXITY MEASURES OF  
INTERLEAVED SEQUENCES

ASCON: EL NUEVO ESTÁNDAR DE  
CRYPTOGRAFÍA LIGERA

FUTUROS ESTÁNDARES DE LA  
CRYPTOGRAFÍA POSTUÁNTICA

SEGURIDAD DE LAS  
IMPLEMENTACIONES DE LOS  
ALGORITMOS CRIPTOGRAFICOS

MEDIDAS DE ALEATORIEDAD DE  
SECUENCIAS

ALICIA EN UN MUNDO  
SUPERSINGULAR

RECENT ADVANCES IN SECRET  
SHARING SCHEMES FOR GENERAL  
ACCESS STRUCTURES

CRIPTO SISTEMA DE MCELIECE CON  
CÓDIGOS CONVOLUCIONALES Y  
SECUENCIAS TRUNCADAS

## Sin matemáticas no hay ciberseguridad

LLORENÇ HUGUET-ROTGER

Universitat de les Illes Balears

[l.huguet@uib.es](mailto:l.huguet@uib.es)

**Resumen:** La criptografía es uno de los pilares de la ciberseguridad y esta se basa en conceptos matemáticos sólidos para cifrar y descifrar datos de manera segura. Las matemáticas son esenciales para desarrollar algoritmos criptográficos, evaluar su resistencia a los ataques y garantizar que la información confidencial permanezca segura. Las matemáticas proporcionan las bases teóricas y prácticas para el desarrollo de sistemas seguros, a través de algoritmos criptográficos, la identificación de vulnerabilidades y para proteger la información contra amenazas cibernéticas. En ciberseguridad se complementan resultados de álgebra lineal y teoría de números para la definición de algoritmos criptográficos y de sus sistemas de intercambio de claves. La probabilidad y estadística, base de la teoría de la información y de la entropía de los sistemas de comunicación, de Shannon, se aplica también a la evaluación de riesgos, el análisis de datos de seguridad, la detección de anomalías y la toma de decisiones basada en la probabilidad. La teoría de grafos se utiliza para modelar relaciones y conexiones en redes, lo que es esencial para comprender cómo se propagan las amenazas y cómo se pueden proteger las infraestructuras de red, así como la teoría de juegos se utiliza en el análisis de estrategias de ataque y defensa en ciberseguridad. El análisis de complejidad computacional se usa para evaluar la seguridad de algoritmos criptográficos al determinar cuán difícil es romperlos mediante ataques de fuerza bruta u otros métodos. A partir del detalle de estos conceptos matemáticos utilizados en ciberseguridad, aunque no es exhaustivo, permite asegurar que la ciberseguridad es un campo multidisciplinario que combina, además de las matemáticas, informática y otros conocimientos para proteger sistemas y datos contra amenazas cibernéticas. Y en el futuro, ya presente, se contempla la irrupción de criptografía cuántica, combinando conceptos matemáticos y físicos de la mecánica cuántica, donde la unidad de información básica es el qubit, y se usan los conceptos cuánticos de superposición, para codificar información de manera segura, y el entrelazamiento para garantizar la seguridad de la comunicación y detectar intrusiones. En esta ponencia se hará un breve recorrido sobre la evolución de los sistemas criptográficos y estos diferentes conceptos, matemáticos, utilizados para garantizar la seguridad de los sistemas de comunicación, donde la criptografía cuántica, o postcuántica, viene a paliar los efectos de la computación cuántica sobre los algoritmos basados en sistemas algebraicos. Quizás queden libres de estos efectos los basados en sistemas probabilísticos, incluyendo los que utilizan códigos correctores de errores.

LUNES, 22 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

SESIÓN ESPECIAL 7  
Sesión especial de la red MATSI:  
Criptografía

SIN MATEMÁTICAS NO HAY  
CIBERSEGURIDAD

Q-ALICE Y C-BOB TIENEN QUE HABLAR

ON SELF-DUAL BUTSON BENT  
SEQUENCES

COMPLEXITY MEASURES OF  
INTERLEAVED SEQUENCES

ASCON: EL NUEVO ESTÁNDAR DE  
CRYPTOGRAFÍA LIGERA

FUTUROS ESTÁNDARES DE LA  
CRYPTOGRAFÍA POSTCUÁNTICA

SEGURIDAD DE LAS  
IMPLEMENTACIONES DE LOS  
ALGORITMOS CRIPTOGRAFICOS

MEDIDAS DE ALEATORIEDAD DE  
SECUENCIAS

ALICIA EN UN MUNDO  
SUPERSINGULAR

RECENT ADVANCES IN SECRET  
SHARING SCHEMES FOR GENERAL  
ACCESS STRUCTURES

CRIPTO SISTEMA DE MCELIECE CON  
CÓDIGOS CONVOLUCIONALES Y  
SECUENCIAS TRUNCADAS

## Q-Alice y C-Bob tienen que hablar

M.I. GONZÁLEZ VASCO, R. STEINWANDT

Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid

[mariaisabel.gonzalez@uc3m.es](mailto:mariaisabel.gonzalez@uc3m.es)

**Resumen:** Los avances en computación cuántica han motivado el desarrollo de numerosas herramientas criptográficas potencialmente robustas ante ataques implementados con hardware cuántico. Estas herramientas, llamadas *post-cuánticas*, se implementan a través de tecnología *clásica* (es decir, se asume que los usuarios legítimos son máquinas de Turing probabilísticas) y su seguridad se demuestra usando modelos de seguridad habituales. En el caso de esquemas de intercambio de clave para dos usuarios, los modelos establecidos (e.g., [1]) no son útiles para analizar la seguridad de herramientas que usan tecnología cuántica, los llamados esquemas QKD (de Quantum Key Distribution), cuya seguridad puede analizarse usando el modelo de Mosca y otros propuesto en [2]. Pero, ¿qué ocurre cuando el intercambio de clave involucra a más de dos usuarios, y algunos de éstos utilizan a tal fin tecnología cuántica, siendo otros esencialmente *clásicos*? En esta charla presentaremos los retos formales a los que nos enfrentamos para evaluar este tipo de construcciones, y comentaremos el tipo de soluciones que estamos desarrollando en el marco de un proyecto financiado por el programa *Science for Peace and Security* de la OTAN.

### Referencias

- [1] R. Canetti, H. Krawczyk, B. Pfitzmann (2001). Analysis of Key-Exchange Protocols and Their Use for Building Secure Channels, Proceedings of Eurocrypt 2001, Springer, LNCS, Vol. 2045, pp. 453–474.
- [2] M. Mosca, D. Stebila, B. Ustaoglu (2013). Quantum Key Distribution in the Classical Authenticated Key Exchange Framework, Proceedings of Post-Quantum Cryptography – 5th International Workshop, PQCrypto 2013, Springer, LNCS, Vol. 7932, pp. 136–154.

**Agradecimientos:** Este trabajo está financiado por los proyectos CREEME (MINECO PID2019-109379RB-I00 ) y Secure Communication via Classical and Quantum Technologies (NATO SPS Project G5985)

LUNES, 22 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 7  
Sesión especial de la red MATSI:  
Criptografía

SIN MATEMÁTICAS NO HAY  
CIBERSEGURIDAD

Q-ALICE Y C-BOB TIENEN QUE HABLAR

ON SELF-DUAL BUTSON BENT  
SEQUENCES

COMPLEXITY MEASURES OF  
INTERLEAVED SEQUENCES

ASCON: EL NUEVO ESTÁNDAR DE  
CRIPTOGRAFÍA LIGERA

FUTUROS ESTÁNDARES DE LA  
CRIPTOGRAFÍA POSTCUÁNTICA

SEGURIDAD DE LAS  
IMPLEMENTACIONES DE LOS  
ALGORITMOS CRIPTOGRÁFICOS

MEDIDAS DE ALEATORIEDAD DE  
SECUENCIAS

ALICIA EN UN MUNDO  
SUPERSINGULAR

RECENT ADVANCES IN SECRET  
SHARING SCHEMES FOR GENERAL  
ACCESS STRUCTURES

CRIPTO SISTEMA DE MCELIECE CON  
CÓDIGOS CONVOLUCIONALES Y  
SECUENCIAS TRUNCADAS

## On self-dual Butson bent sequences

JOSÉ ANDRÉS ARMARIO

Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla

[armario@us.es](mailto:armario@us.es)

**Abstract:** A new notion of bent sequences, motivated by a cryptographic problem (PUFs=Physically Unclonable Functions), was introduced in [2] as a solution in  $X, Y$  to the system

$$\frac{1}{\sqrt{n}}HX = Y,$$

where  $H$  is a real Hadamard matrix of order  $n$  and  $X, Y \in \{\pm 1\}^n$ .  $X$  is called a *bent sequence for  $H$* . If  $H$  is the Sylvester Hadamard matrix then any bent Boolean function  $f: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2$  determines a bent sequence for  $H$  by the rule  $X = (-1)^f$  (and vice versa).

In this talk, we deal with the problem of extending the notion of self-dual bent sequences for Butson Hadamard matrices and we will review some of the recent progresses on this topic [1, 3].

### Referencias

- [1] J.A. Armario, R. Egan, P. Ó Catháin (2023). On the matrix equation  $MX = \bar{X}$  and self-dual Butson bent sequences. The 8th International Workshop on Boolean Functions and their Applications, Voss, Norway, Sep 3–8, <https://boolean.w.uib.no/bfa-2023/>
- [2] P. Solé, W. Cheng, S. Guilley, and O. Rioul (2021). Bent sequences over Hadamard codes for physically unclonable functions, IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT), Melbourne, Australia, 801–806.
- [3] M. Shi, D. Lu, J.A. Armario, R. Egan, F. Ozbudak, and P. Solé (2023). Butson Hadamard matrices, bent sequences, and spherical codes. Submitted.

**Acknowledgments:** This research was partially supported by the Strategic R+D Project TED2021-130566B-I00 from the Ministry of Science and Innovation of the Government of Spain.

LUNES, 22 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 7  
Sesión especial de la red MATSI:  
Criptografía

SIN MATEMÁTICAS NO HAY  
CIBERSEGURIDAD

Q-ALICE Y C-BOB TIENEN QUE HABLAR

ON SELF-DUAL BUTSON BENT  
SEQUENCES

COMPLEXITY MEASURES OF  
INTERLEAVED SEQUENCES

ASCON: EL NUEVO ESTÁNDAR DE  
CRYPTOGRAFÍA LIGERA

FUTUROS ESTÁNDARES DE LA  
CRYPTOGRAFÍA POSTUÁNTICA

SEGURIDAD DE LAS  
IMPLEMENTACIONES DE LOS  
ALGORITMOS CRIPTOGRAFICOS

MEDIDAS DE ALEATORIEDAD DE  
SECUENCIAS

ALICIA EN UN MUNDO  
SUPERSINGULAR

RECENT ADVANCES IN SECRET  
SHARING SCHEMES FOR GENERAL  
ACCESS STRUCTURES

CRIPTO SISTEMA DE MCELIECE CON  
CÓDIGOS CONVOLUCIONALES Y  
SECUENCIAS TRUNCADAS

## Complexity measures of Interleaved sequences

D. GÓMEZ-PÉREZ, J. M. PRELLEZO

Dpto. de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria

[domingo.gomez@unican.es](mailto:domingo.gomez@unican.es)

**Abstract:** Pseudorandom binary sequences are sequences of zeros and ones that generated by deterministic algorithms. They are not random at all, but they should not be distinguishable from a ‘truly’ random sequence. Although that there are many constructions, they all rely on conjectures on the computational complexity of a problem. A standard procedure to validate unconditionally the quality of a construction of binary sequences relies on testing on them predictors, i.e. efficient algorithms that from a small portion of the sequence can predict the rest of it.

The main objective of this talk is to detect non random behaviour in binary sequences with interleave structure by studying pseudorandom measurements, like linear complexity, maximum order complexity, 2-adic complexity, etc [2, 3]. For that task, we extend previous results about non randomness of interleave sequences [1].

### Referencias

- [1] A. I. Gómez, D. Gomez-Perez, A. Tirkel (2023). Correlation Measure of Binary Sequence Families With Trace Representation. Arithmetic of Finite Fields. WAI-FI 2022. Lecture Notes in Computer Science, vol 13638.
- [2] L. Mérai, H. Niederreiter, A. Winterhof (2017). Expansion complexity and linear complexity of sequences over finite fields. Cryptography and Communications 9.4, 501-509.
- [3] A. Winterhof (2023). Pseudorandom binary sequences: quality measures and number-theoretic constructions. IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences.

LUNES, 22 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

SESIÓN ESPECIAL 7  
Sesión especial de la red MATSI:  
Criptografía

SIN MATEMÁTICAS NO HAY  
CIBERSEGURIDAD

Q-ALICE Y C-BOB TIENEN QUE HABLAR

ON SELF-DUAL BUTSON BENT  
SEQUENCES

COMPLEXITY MEASURES OF  
INTERLEAVED SEQUENCES

ASCON: EL NUEVO ESTÁNDAR DE  
CRIPTOGRAFÍA LIGERA

FUTUROS ESTÁNDARES DE LA  
CRIPTOGRAFÍA POSTUÁNTICA

SEGURIDAD DE LAS  
IMPLEMENTACIONES DE LOS  
ALGORITMOS CRIPTOGRÁFICOS

MEDIDAS DE ALEATORIEDAD DE  
SECUENCIAS

ALICIA EN UN MUNDO  
SUPERSINGULAR

RECENT ADVANCES IN SECRET  
SHARING SCHEMES FOR GENERAL  
ACCESS STRUCTURES

CRIPTO SISTEMA DE MCELIECE CON  
CÓDIGOS CONVOLUCIONALES Y  
SECUENCIAS TRUNCADAS

## ASCON: el nuevo estándar de Criptografía ligera

A. FÚSTER SABATER, S. DÍAZ CARDELL, V. REQUENA ARÉVALO

Instituto de Tecnologías Físicas y de la Información, CSIC, Madrid.

[amparo.fuster@csic.es](mailto:amparo.fuster@csic.es)

**Resumen:** ASCON cipher suite es un criptosistema que unifica en un solo algoritmo los procesos de Autenticación, Cifrado y Manejo de Datos Asociados (esquema AEAD: Authentication Encryption and Associated Data). Se trata de un criptosistema ligero y de fácil implementación, por tanto muy adecuado para comunicaciones entre dispositivos con poca capacidad y escasos recursos computacionales, por ejemplo en IoT. ASCON ha sido recientemente seleccionado por el NIST (National Institute of Standards and Technology) como estándar de Criptografía ligera en la convocatoria *NIST Lightweight Cryptography Competition* (2019 - 2023) [1]. Previamente había sido seleccionado como primera elección en el portfolio final de la convocatoria *CAESAR Competition* (2014 - 2019) [2]. En este trabajo se describe y analiza el criptosistema ASCON y sus variantes, ASCON-128, ASCON-128a y ASCON-80pq. Se evalúan los márgenes de seguridad aceptados a día de hoy, a la vez que se introduce un análisis de pseudoaleatoriedad de las secuencias generadas por ASCON en los procesos de cifrado y descifrado.

### Referencias

- [1] NIST Lightweight Cryptography Standardization project, 2023. <https://csrc.nist.gov/projects/lightweight-cryptography/finalists>
- [2] Final Portfolio, Caesar Competition, 2019. <https://competitions.cr.yt.to/caesar.html>

### Agradecimientos:

Esta publicación es parte del proyecto de I+D+i P2QProMeTe (PID2020-112586RB-I00), financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033. Asimismo, se ha realizado en el marco de la Red Temática Retos de la Seguridad en Entornos Biomédicos (D5-2022 04) financiada por la Universidad de Málaga.

MARTES, 23 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 7  
Sesión especial de la red MATSI:  
Criptografía

SIN MATEMÁTICAS NO HAY  
CIBERSEGURIDAD

Q-ALICE Y C-BOB TIENEN QUE HABLAR

ON SELF-DUAL BUTSON BENT  
SEQUENCES

COMPLEXITY MEASURES OF  
INTERLEAVED SEQUENCES

ASCON: EL NUEVO ESTÁNDAR DE  
CRYPTOGRAFÍA LIGERA

FUTUROS ESTÁNDARES DE LA  
CRYPTOGRAFÍA POSTUÁNTICA

SEGURIDAD DE LAS  
IMPLEMENTACIONES DE LOS  
ALGORITMOS CRIPTOGRÁFICOS

MEDIDAS DE ALEATORIEDAD DE  
SECUENCIAS

ALICIA EN UN MUNDO  
SUPERSINGULAR

RECENT ADVANCES IN SECRET  
SHARING SCHEMES FOR GENERAL  
ACCESS STRUCTURES

CRYPTOSISTEMA DE MCELIECE CON  
CÓDIGOS CONVOLUCIONALES Y  
SECUENCIAS TRUNCADAS

## Futuros Estándares de la Criptografía Postuántica

LUIS HERNÁNDEZ ENCINAS

Departamento Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC)

Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC)

[luis.h.encinas@csic.es](mailto:luis.h.encinas@csic.es)

**Resumen:** En 1997, P. Shor publicó [1] sendos algoritmos cuánticos capaces de resolver, en tiempo polinómico (una vez que se disponga de ordenadores cuánticos con la suficiente capacidad de cómputo), los dos problemas matemáticos más importantes de la criptografía asimétrica: el problema de la factorización de números enteros y el problema del logaritmo discreto. El primero es la base de la seguridad del RSA y el segundo de los criptosistemas basados en curvas elípticas [2]. Como la criptografía asimétrica actual tiene sus días contados, el NIST (*National Institute of Standards and Technology*) lanzó, en 2016, una Convocatoria Internacional para seleccionar nuevos algoritmos criptográficos resistentes a la computación cuántica, con el fin de ser los nuevos estándares [3]. Esta convocatoria solo considera los mecanismos de encapsulamiento de claves o KEM (*Key Encapsulation Mechanism*) y las firmas digitales. En esta charla se presentarán las principales propuestas de esta convocatoria y los problemas matemáticos en los que basan su seguridad, destacando los considerados como estándares como KEM y firmas digitales, ya publicados como *borradores*.

### Referencias

- [1] P.W. Shor (1997). Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM Journal on Computing*, 26(5), 1484–1509.
- [2] A. Fúster Sabater, L. Hernández Encinas, A. Martín Muñoz, F. Montoya Vitini, J. Muñoz Masqué (2012). *Criptografía, protección de datos y aplicaciones*. RAMA
- [3] NIST (2022). Post-quantum cryptography. Selected algorithms. <https://csrc.nist.gov/Projects/post-quantum-cryptography/selected-algorithms-2022>

**Agradecimientos:** Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) del Ministerio de Ciencia e Innovación (MCIN) a través del proyecto P2QProMeTe (PID2020-112586RBI00/AEI/10.13039/501100011033) y por el proyecto QURSA (TED2021-130369BC33), financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por la Unión Europea “NextGenerationEU”/PRTR.

MARTES, 23 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

SESIÓN ESPECIAL 7  
Sesión especial de la red MATSI:  
Criptografía

SIN MATEMÁTICAS NO HAY  
CIBERSEGURIDAD

Q-ALICE Y C-BOB TIENEN QUE HABLAR

ON SELF-DUAL BUTSON BENT  
SEQUENCES

COMPLEXITY MEASURES OF  
INTERLEAVED SEQUENCES

ASCON: EL NUEVO ESTÁNDAR DE  
CRYPTOGRAFÍA LIGERA

FUTUROS ESTÁNDARES DE LA  
CRYPTOGRAFÍA POSTUÁNTICA

SEGURIDAD DE LAS  
IMPLEMENTACIONES DE LOS  
ALGORITMOS CRIPTOGRÁFICOS

MEDIDAS DE ALEATORIEDAD DE  
SECUENCIAS

ALICIA EN UN MUNDO  
SUPERSINGULAR

RECENT ADVANCES IN SECRET  
SHARING SCHEMES FOR GENERAL  
ACCESS STRUCTURES

CRIPTO SISTEMA DE MCELIECE CON  
CÓDIGOS CONVOLUCIONALES Y  
SECUENCIAS TRUNCADAS

## Seguridad de las implementaciones de los algoritmos criptográficos

AGUSTÍN MARTÍN MUÑOZ, ALBERTO PEINADO DOMÍNGUEZ

Instituto de Tecnologías Físicas y de la Información (ITEFI)

Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC)

[agustin.martin@csic.es](mailto:agustin.martin@csic.es)

**Resumen:** Tradicionalmente los algoritmos criptográficos se diseñaban teniendo en cuenta su seguridad desde un punto de vista matemático. También los diferentes métodos de criptoanálisis se basaban en técnicas matemáticas. Como es sabido, eso cambió cuando en [1] se presentó un ataque basado en el análisis del tiempo de ejecución de las implementaciones de varios criptosistemas asimétricos en dispositivos físicos.

En esta comunicación se describirán los principales métodos (generalmente conocidos como *ataques por canal lateral* [2]) para atacar la seguridad de las implementaciones de los algoritmos criptográficos empleados hoy en día en multitud de dispositivos como tarjetas inteligentes, teléfonos móviles o dispositivos biomédicos [3]. Se explicarán también algunas de las contramedidas que se diseñan para evitar dichos ataques.

### Referencias

- [1] P. Kocher (1996). Timing Attacks on Implementations of Diffie-Hellman, RSA, DSS, and Other Systems. Proceedings of Advances in Cryptology – CRYPTO'96, LNCS 1109, 104–113.
- [2] M. Ouladj, S. Guilley (2021). Side-Channel Analysis of Embedded Systems. An Efficient Algorithmic Approach. Springer.
- [3] S. Faezi, S. R. Chhetri, A. V. Malawade, J. C. Chaput, W. H. Grover, P. Brisk, M. A. Al Faruque (2019). Oligo-Snoop: A Non-Invasive Side Channel Attack Against DNA Synthesis Machines. Proceedings of the 26<sup>th</sup> Annual Network and Distributed System Security Symposium, NDSS.

**Agradecimientos:** Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) del Ministerio de Ciencia e Innovación (MCIN) a través del proyecto P2QProMeTe (PID2020-112586RB-I00/AEI/10.13039/501100011033), y por la Universidad de Málaga a través de la Red temática BIOMED-Sec “Retos de la seguridad en entornos biomédicos” (referencia D5-2022-04).

MARTES, 23 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

SESIÓN ESPECIAL 7  
Sesión especial de la red MATSI:  
Criptografía

SIN MATEMÁTICAS NO HAY  
CIBERSEGURIDAD

Q-ALICE Y C-BOB TIENEN QUE HABLAR

ON SELF-DUAL BUTSON BENT  
SEQUENCES

COMPLEXITY MEASURES OF  
INTERLEAVED SEQUENCES

ASCON: EL NUEVO ESTÁNDAR DE  
CRYPTOGRAFÍA LIGERA

FUTUROS ESTÁNDARES DE LA  
CRYPTOGRAFÍA POSTUÁNTICA

SEGURIDAD DE LAS  
IMPLEMENTACIONES DE LOS  
ALGORITMOS CRIPTOGRAFICOS

MEDIDAS DE ALEATORIEDAD DE  
SECUENCIAS

ALICIA EN UN MUNDO  
SUPERSINGULAR

RECENT ADVANCES IN SECRET  
SHARING SCHEMES FOR GENERAL  
ACCESS STRUCTURES

CRIPTO SISTEMA DE MCELIECE CON  
CÓDIGOS CONVOLUCIONALES Y  
SECUENCIAS TRUNCADAS



## Medidas de aleatoriedad de secuencias

D. SADORNIL, D. GÓMEZ-PÉREZ

Dpto. de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria

[daniel.sadornil@unican.es](mailto:daniel.sadornil@unican.es)

**Resumen:** En el campo de la computación y la estadística, los generadores de números pseudoaleatorios (PRNGs) juegan un papel fundamental en diversas aplicaciones, desde simulaciones hasta criptografía. Aunque estos algoritmos proporcionan secuencias de números aparentemente aleatorios, es esencial someterlos a rigurosos tests de aleatoriedad para garantizar su idoneidad en aplicaciones críticas.

Las secuencias automáticas, dentro de las que incluyen la secuencia Thue-Morse y la secuencia Rudin-Shapiro, han sido ampliamente estudiadas debido a sus propiedades como generadores pseudoaleatorios de números [1], pero además para también han sido utilizados para definir nuevas medidas de aleatoriedad [2].

Recientemente, Arne Winterhof [3] ha recopilado varias preguntas abiertas respecto a subsecuencias de secuencias automáticas y varias de medidas de aleatoriedad como el máximo orden de estas secuencias, la complejidad lineal, etc.

En esta charla daremos nuevos resultados de diferentes medidas para estas secuencias y compararemos con los resultados computacionales.

### Referencias

- [1] J. P. Allouche, J. Shallit (2003). Automatic Sequences: Theory, Applications, Generalizations. Cambridge: Cambridge University Press.
- [2] L. Mérai, H. Niederreiter, A. Winterhof (2017). Expansion complexity and linear complexity of sequences over finite fields. *Cryptography and Communications* 9.4, 501-509.
- [3] A. Winterhof (2023). Pseudorandom binary sequences: quality measures and number-theoretic constructions. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*.

MARTES, 23 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

SESIÓN ESPECIAL 7  
Sesión especial de la red MATSI:  
Criptografía

SIN MATEMÁTICAS NO HAY  
CIBERSEGURIDAD

Q-ALICE Y C-BOB TIENEN QUE HABLAR

ON SELF-DUAL BUTSON BENT  
SEQUENCES

COMPLEXITY MEASURES OF  
INTERLEAVED SEQUENCES

ASCON: EL NUEVO ESTÁNDAR DE  
CRYPTOGRAFÍA LIGERA

FUTUROS ESTÁNDARES DE LA  
CRYPTOGRAFÍA POSTUÁNTICA

SEGURIDAD DE LAS  
IMPLEMENTACIONES DE LOS  
ALGORITMOS CRIPTOGRÁFICOS

MEDIDAS DE ALEATORIEDAD DE  
SECUENCIAS

ALICIA EN UN MUNDO  
SUPERSINGULAR

RECENT ADVANCES IN SECRET  
SHARING SCHEMES FOR GENERAL  
ACCESS STRUCTURES

CRIPTO SISTEMA DE MCELIECE CON  
CÓDIGOS CONVOLUCIONALES Y  
SECUENCIAS TRUNCADAS

## Alicia en un mundo supersingular

JOSEP M. MIRET, JORDI PUJOLÀS, JUAN TENA, JAVIER VALERA

Departament de Matemàtica, Universitat de Lleida

[josepmaria.miret@udl.cat](mailto:josepmaria.miret@udl.cat)

**Resumen:** En estas últimas décadas han aparecido distintos esquemas criptográficos basados en isogenias de curvas elípticas supersingulares, como el intercambio de claves de De Feo-Jao-Plüt [3], el de funciones Hash Charles-Goren-Lauter [2] o el esquema de firma Galbraith-Petit-Silva [4]. La seguridad de estos esquemas se basa en la dificultad computacional de encontrar un camino entre dos curvas del grafo supersingular. En esta charla, haremos un recorrido por algunos de estos protocolos criptográficos, describiendo ciertos aspectos de la estructura de estos grafos de isogenias de curvas elípticas supersingulares [1] en contraste con los grafos de curvas ordinarias [5].

### Referencias

- [1] S. Arpin, C. Camacho-Navarro, K. Lauter, J. Lim, K. Nelson, T. Scholl, J. Sotáková (2023). Adventures in supersingularland. *Experimental Mathematics*, 32(2), 241-268.
- [2] D.X. Charles, E.Z. Goren, K.E. Lauter (2009). Cryptographic Hash Functions from Expander Graphs. *Journal of Cryptology*, 22(1), 93-113.
- [3] L. De Feo, D. Jao, J. Plüt (2014). Towards quantum-resistant cryptosystems from supersingular elliptic curve isogenies. *Journal of Mathematical Cryptology*, 8(3), 209-247.
- [4] S. Galbraith, C. Petit, J. Silva (2017). Identification Protocols and Signature Schemes Based on Supersingular Isogeny Problems. ASIACRYPT 2017, Part I, LNCS 10624, 3-33.
- [5] J. Miret, R. Moreno, D. Sadornil, J. Tena, M. Valls (2008). Computing the height of volcanoes of  $l$ -isogenies of elliptic curves over finite fields. *Applied mathematics and computation*, 196(1), 67-76.

**Agradecimientos:** Trabajo financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación mediante el proyecto PID2021-124613OB-I00, por la Generalitat de Catalunya mediante el grupo 2021SGR 00434 y por la red Iberoamerica 522RT0131 de CyTeD.

MARTES, 23 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

SESIÓN ESPECIAL 7  
Sesión especial de la red MATSI:  
Criptografía

SIN MATEMÁTICAS NO HAY  
CIBERSEGURIDAD

Q-ALICE Y C-BOB TIENEN QUE HABLAR

ON SELF-DUAL BUTSON BENT  
SEQUENCES

COMPLEXITY MEASURES OF  
INTERLEAVED SEQUENCES

ASCON: EL NUEVO ESTÁNDAR DE  
CRIPTOGRAFÍA LIGERA

FUTUROS ESTÁNDARES DE LA  
CRIPTOGRAFÍA POSTUÁNTICA

SEGURIDAD DE LAS  
IMPLEMENTACIONES DE LOS  
ALGORITMOS CRIPTOGRAFICOS

MEDIDAS DE ALEATORIEDAD DE  
SECUENCIAS

ALICIA EN UN MUNDO  
SUPERSINGULAR

RECENT ADVANCES IN SECRET  
SHARING SCHEMES FOR GENERAL  
ACCESS STRUCTURES

CRIPTO SISTEMA DE MCELIECE CON  
CÓDIGOS CONVOLUCIONALES Y  
SECUENCIAS TRUNCADAS

## Recent Advances in Secret Sharing Schemes for General Access Structures

ORIOL FARRÀS

Departament d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques, Universitat Rovira i Virgili  
[oriol.farras@urv.cat](mailto:oriol.farras@urv.cat)

**Abstract:** A secret sharing scheme is a method by which a dealer distributes shares to parties such that only authorized subsets of parties can reconstruct the secret. The family of these authorized subsets is called the access structure of the scheme.

The share size of secret sharing schemes for general access structures is poorly understood. The gap between the best known upper bound on the total share size per party of  $1,5^n$  [1] and the best known lower bound of  $\Omega(n/\log n)$  [4] is huge (where  $n$  is the number of parties in the scheme).

This talk is dedicated to the latest constructions for general access structures. In particular, we will review a joint work with Amos Beimel and Or Lasri [3] dedicated to polynomial secret sharing schemes.

### Referencias

- [1] B. Applebaum, O. Nir (2021). Upslices, downslices, and secret-sharing with complexity of  $1,5^n$ . CRYPTO 2021, volume 12827 of LNCS, pages 627–655. Springer-Verlag.
- [2] A. Beimel, O. Farràs (2020). The Share Size of Secret-Sharing Schemes for Almost All Access Structures and Graphs. Theory of Cryptography, TCC 2020, volume 12552 of LNCS, pages 499–529.
- [3] A. Beimel, O. Farràs, O. Lasri (2023). Improved Polynomial Secret-Sharing Schemes. To appear in Theory of Cryptography, TCC.
- [4] L. Csirmaz (1997). The size of a share must be large. J. of Cryptology, 10(4):223–231.

MARTES, 23 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 7  
Sesión especial de la red MATSI:  
Criptografía

SIN MATEMÁTICAS NO HAY  
CIBERSEGURIDAD

Q-ALICE Y C-BOB TIENEN QUE HABLAR

ON SELF-DUAL BUTSON BENT  
SEQUENCES

COMPLEXITY MEASURES OF  
INTERLEAVED SEQUENCES

ASCON: EL NUEVO ESTÁNDAR DE LA  
CRIPTOGRAFÍA LIGERA

FUTUROS ESTÁNDARES DE LA  
CRIPTOGRAFÍA POSTUÁNTICA

SEGURIDAD DE LAS  
IMPLEMENTACIONES DE LOS  
ALGORITMOS CRIPTOGRÁFICOS

MEDIDAS DE ALEATORIEDAD DE  
SECUENCIAS

ALICIA EN UN MUNDO  
SUPERSINGULAR

RECENT ADVANCES IN SECRET  
SHARING SCHEMES FOR GENERAL  
ACCESS STRUCTURES

CRIPTO SISTEMA DE MCELIECE CON  
CÓDIGOS CONVOLUCIONALES Y  
SECUENCIAS TRUNCADAS

## Criptosistema de McEliece con códigos convolucionales y secuencias truncadas

MIGUEL BELTRÁ, PAULO ALMEIDA, DIEGO NAPP, CLÁUDIA SEBASTIÃO

Departamento de Matemáticas, Universidad de Alicante

[miguel.beltra@ua.es](mailto:miguel.beltra@ua.es)

**Resumen:** El NIST ha llevado a cabo en los últimos años un proceso de estandarización de sistemas de cifrado resistentes a ataques con computadores cuánticos. Entre los candidatos encontramos propuestas basadas en teoría de códigos: *McEliece clásico* [2], *BIKE* y *HQC*. El criptosistema de McEliece fue uno de los primeros criptosistemas propuestos [1]. Basa su seguridad en la dificultad de decodificar un código lineal en general. La propuesta original utiliza códigos binarios de Goppa, que poseen un algoritmo de decodificación eficiente, pero debido a su baja capacidad correctora, es necesario utilizar claves públicas muy grandes para alcanzar los requerimientos de seguridad. Por este motivo el criptosistema nunca se ha utilizado en la práctica.

En esta charla se presentará una variante del criptosistema de McEliece que utiliza códigos de Reed-Solomon con una máscara convolucional [3] que es capaz de reducir considerablemente el tamaño de la clave pública del criptosistema de McEliece.

### Referencias

- [1] R. J. McEliece. (1978) A public-key cryptosystem based on algebraic coding theory. Deep Space Network Progress Report, 44:114–116.
- [2] D. J. Bernstein, T. Chou, T. Lange, I. von Maurich, R. Mizoczki, R. Niederhagen, E. Persichetti, C. Peters, P. Schwabe, N. Sendrier, J. Szefer, and W. Wen. (2022) Classic McEliece: conservative code-based cryptography. Round 4 submission to the NIST post-quantum cryptography call
- [3] P. Almeida, M. Beltrá, D. Napp, and C. Sebastião. (2023) Smaller keys for the mceliece cryptosystem: A convolutional variant with GRS codes. Submitted.

**Agradecimientos:** El primer autor y la cuarta autora han sido financiados por el *Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações* (CIDMA) a través de la *Fundação para a Ciência e Tecnologia* (FCT), referencia UIDB/04106/2020. El segundo y el tercer autor han sido financiados con el Proyecto Español de I+D+i PID2022-142159OB-I00.

MARTES, 23 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 7  
Sesión especial de la red MATSI:  
Criptografía

SIN MATEMÁTICAS NO HAY  
CIBERSEGURIDAD

Q-ALICE Y C-BOB TIENEN QUE HABLAR

ON SELF-DUAL BUTSON BENT  
SEQUENCES

COMPLEXITY MEASURES OF  
INTERLEAVED SEQUENCES

ASCON: EL NUEVO ESTÁNDAR DE  
CRIPTOGRAFÍA LIGERA

FUTUROS ESTÁNDARES DE LA  
CRIPTOGRAFÍA POSTUÁNTICA

SEGURIDAD DE LAS  
IMPLEMENTACIONES DE LOS  
ALGORITMOS CRIPTOGRÁFICOS

MEDIDAS DE ALEATORIEDAD DE  
SECUENCIAS

ALICIA EN UN MUNDO  
SUPERSINGULAR

RECENT ADVANCES IN SECRET  
SHARING SCHEMES FOR GENERAL  
ACCESS STRUCTURES

CRIPOTOSISTEMA DE MCELIECE CON  
CÓDIGOS CONVOLUCIONALES Y  
SECUENCIAS TRUNCADAS

## SESIÓN ESPECIAL 8

### Teoría de números

**Organizadores:**

**ÓSCAR RIVERO SALGADO**  
 (Universidade de Santiago de Compostela)

**CARLOS DE VERA PIQUERO**  
 (Universidad de Zaragoza)

#### Descripción:

La teoría de números es un área que goza de gran tradición en España. Son varios los polos geográficos donde se concentran investigadores de esta rama (Barcelona, Lleida, Madrid, Málaga, Sevilla, Zaragoza o Santiago) y la diversidad de temas tratados cubre un amplio espectro dentro de la disciplina: geometría aritmética, métodos  $p$ -ádicos, teoría analítica, teoría de Hopf–Galois o métodos computacionales. Pretendemos que esta sesión sirva para poner en contacto a distintos investigadores, crear sinergias y potenciar colaboraciones dentro de la comunidad de teoría de números en España.

SESIÓN ESPECIAL 8  
 Teoría de números

CONSTRUCCIÓN CON REGLA Y COMPÁS DEL POLÍGONO REGULAR DE 17 LADOS SOBRE LA LEMNISCATA

TÉCNICAS GEOMÉTRICAS EN MONOGENEIDAD

BRACES DE TIPO SCHUR-ZASSENHAUS

UNA GENERALIZACIÓN DE LA TEORÍA DE KUMMER MEDIANTE LA TEORÍA DE HOPF GALOIS

EQUIDISTRIBUCIÓN DE SUMAS DE GAUSS MULTINOMIALES

THE REFINED CLASS NUMBER FORMULA FOR DRINFELD MODULES

SOBRE UNA FACTORIZACIÓN DE FUNCIONES  $L$   $p$ -ÁDICAS

FUNDAMENTAL DOMAINS FOR THE BRUHAT-TITS TREE FOR  $GL_2(\mathbb{F}_p)$

PERIODOS, MODULARIDAD DE CURVAS ELÍPTICAS Y VALORES CRÍTICOS DE FUNCIONES  $L$

EXPLORING THE IMPLICATIONS OF THE PLECTIC PHILOSOPHY FOR THE BSD CONJECTURE

LÍMITES INFERIORES DEL RATIO DE SZPIRO MODIFICADO

FALTINGS ELLIPTIC CURVES OVER  $\mathbb{Q}$

## Construcción con regla y compás del polígono regular de 17 lados sobre la lemniscata

MARÍA DE LOS ÁNGELES GÓMEZ MOLLEDA

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad de Málaga

[gomezma@uma.es](mailto:gomezma@uma.es)

**Resumen:** En 1796 Gauss dio una expresión por radicales de  $\cos(\frac{2\pi}{17})$ , proporcionando un método de construcción con regla y compás del heptadecágono regular. Poco después, su trabajo sobre los periodos ciclotómicos le permitió demostrar que son construibles todos los polígonos regulares cuyo número de lados es producto de una potencia de 2 y primos de Fermat distintos, condición que Wantzel demostró que es necesaria en 1837. En 1893, H.W. Richmond dio una construcción explícita del heptadecágono regular, mucho más sencilla que la de Gauss.

En 1827, Abel publicó sus *Recherches sur les Fonctions elliptiques*, que incluyen un teorema sobre la división de la lemniscata en partes iguales paralelo al de Gauss: el polígono regular de  $n$  lados es construible sobre la lemniscata si y solo si lo es sobre la circunferencia.

En este trabajo calculamos una expresión por radicales del seno lemniscático  $\varphi(2\omega/17)$  que, reescrita en función de las coordenadas de los vértices del heptadecágono regular, proporciona un método bastante sencillo de división de la lemniscata en 17 partes iguales.

LUNES, 22 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

SESIÓN ESPECIAL 8  
Teoría de números

CONSTRUCCIÓN CON REGLA Y  
COMPÁS DEL POLÍGONO REGULAR DE  
17 LADOS SOBRE LA LEMNISCATA

TÉCNICAS GEOMÉTRICAS EN  
MONOGENEIDAD

BRACES DE TIPO SCHUR-  
ZASSENHAUS

UNA GENERALIZACIÓN DE LA TEORÍA  
DE KUMMER MEDIANTE LA TEORÍA DE  
HOPF GALOIS

EQUIDISTRIBUCIÓN DE SUMAS DE  
GAUSS MULTINOMIALES

THE REFINED CLASS NUMBER  
FORMULA FOR DRINFELD MODULES

SOBRE UNA FACTORIZACIÓN DE  
FUNCIONES L P-ÁDICAS

FUNDAMENTAL DOMAINS FOR THE  
BRUHAT-TITS TREE FOR  $GL_2(\mathbb{F}_p)$

PERIODOS, MODULARIDAD DE  
CURVAS ELÍPTICAS Y VALORES  
CRÍTICOS DE FUNCIONES L

EXPLORING THE IMPLICATIONS OF  
THE PLECTIC PHILOSOPHY FOR THE  
BSD CONJECTURE

LÍMITES INFERIORES DEL RATIO DE  
SZPIRO MODIFICADO

FALTINGS ELLIPTIC CURVES OVER  $\mathbb{Q}$

## Técnicas geométricas en monogeneidad

FRANCESC PEDRET MARTÍNEZ

Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona

[francesc.pedret@estudiantat.upc.edu](mailto:francesc.pedret@estudiantat.upc.edu)

**Resumen:** Un cuerpo de números  $K$  es monógeno si su anillo de enteros está generado por un solo elemento como  $\mathbb{Z}$ -álgebra. En el caso cúbico, determinar si  $K$  es monógeno o no es equivalente a resolver la ecuación diofántica  $|\mathrm{IK}(X, Y)| = 1$  sobre  $\mathbb{Z}$ , donde  $\mathrm{IK}$  es la forma índice del cuerpo. Una solución entera determina un punto racional en la curva de género uno  $\mathrm{IK}(X, Y) = Z^3$ . Mediante esta construcción, se puede demostrar que  $K$  determina una  $\mathbb{F}_3$ -órbita en  $H^1(\mathbb{Q}, E[3])$ , donde  $E$  es la curva elíptica definida por  $Y^2 = 4X^3 + \mathrm{Disc}(K)$ . En esta presentación, daremos la construcción explícita de esta órbita para el caso de cuerpos cúbicos puros y analizaremos la suma de cociclos asociados a cuerpos no isomorfos.

SESIÓN ESPECIAL 8  
Teoría de números

CONSTRUCCIÓN CON REGLA Y COMPÁS DEL POLÍGONO REGULAR DE 17 LADOS SOBRE LA LEMNISCATA

TÉCNICAS GEOMÉTRICAS EN MONOGENEIDAD

BRACES DE TIPO SCHUR-ZASSENHAUS

UNA GENERALIZACIÓN DE LA TEORÍA DE KUMMER MEDIANTE LA TEORÍA DE HOPF GALOIS

EQUIDISTRIBUCIÓN DE SUMAS DE GAUSS MULTINOMIALES

THE REFINED CLASS NUMBER FORMULA FOR DRINFELD MODULES

SOBRE UNA FACTORIZACIÓN DE FUNCIONES L P-ÁDICAS

FUNDAMENTAL DOMAINS FOR THE BRUHAT-TITS TREE FOR  $GL_2(\mathbb{F}_p)$

PERIODOS, MODULARIDAD DE CURVAS ELÍPTICAS Y VALORES CRÍTICOS DE FUNCIONES L

EXPLORING THE IMPLICATIONS OF THE PLECTIC PHILOSOPHY FOR THE BSD CONJECTURE

LÍMITES INFERIORES DEL RATIO DE SZPIRO MODIFICADO

FALTINGS ELLIPTIC CURVES OVER  $\mathbb{Q}$

LUNES, 22 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

## Braces de tipo Schur–Zassenhaus

ANNA RÍO DOVAL

Departament de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya

[ana.rio@upc.edu](mailto:ana.rio@upc.edu)

**Resumen:** Surgida desde ámbitos tan diferentes como la generalización de extensiones de Galois o la caracterización de soluciones de la ecuación de Yang Baxter, la teoría de *braces*, o de estructuras Hopf–Galois, plantea de manera obvia una teoría paralela a la teoría de grupos. En nuestro caso, estudiamos un tipo de braces a cuyas estructuras aditiva y multiplicativa se puede aplicar el teorema de Schur–Zassenhaus y obtenemos un algoritmo para construir la estructura de brace como producto semidirecto doble de subbraces. Aplicando dicho algoritmo clasificamos los braces de tamaño  $12p$ , verificando así un resultado conjetural sobre el número de braces de dicho tamaño.

SESIÓN ESPECIAL 8  
Teoría de números

CONSTRUCCIÓN CON REGLA Y COMPÁS DEL POLÍGONO REGULAR DE 17 LADOS SOBRE LA LEMNISCATA

TÉCNICAS GEOMÉTRICAS EN MONOGENEIDAD

BRACES DE TIPO SCHUR–ZASSENHAUS

UNA GENERALIZACIÓN DE LA TEORÍA DE KUMMER MEDIANTE LA TEORÍA DE HOPF GALOIS

EQUIDISTRIBUCIÓN DE SUMAS DE GAUSS MULTINOMIALES

THE REFINED CLASS NUMBER FORMULA FOR DRINFELD MODULES

SOBRE UNA FACTORIZACIÓN DE FUNCIONES L P-ÁDICAS

FUNDAMENTAL DOMAINS FOR THE BRUHAT–TITS TREE FOR  $GL_2(\mathbb{F}_p)$

PERIODOS, MODULARIDAD DE CURVAS ELÍPTICAS Y VALORES CRÍTICOS DE FUNCIONES L

EXPLORING THE IMPLICATIONS OF THE PLECTIC PHILOSOPHY FOR THE BSD CONJECTURE

LÍMITES INFERIORES DEL RATIO DE SZPIRO MODIFICADO

FALTINGS ELLIPTIC CURVES OVER  $\mathbb{Q}$

LUNES, 22 DE ENERO:  
17:00 – 17:30



## Una generalización de la teoría de Kummer mediante la teoría de Hopf Galois

DANIEL GIL MUÑOZ

Institut de Matemàtiques, Universitat de Barcelona

[daniel.gilmu@ub.edu](mailto:daniel.gilmu@ub.edu)

**Resumen:** Una extensión de Galois es de Kummer si el cuerpo base contiene las raíces primitivas  $n$ -ésimas de la unidad para algún número entero  $n$  y su cuerpo de Galois es abeliano y con exponente  $n$ . La relevancia de este concepto es que, fijando un cuerpo base, sus extensiones de Kummer son exactamente sus extensiones radicales, esto es, aquellas que se obtienen de adjuntar raíces  $n$ -ésimas de elementos del cuerpo base. Una limitación típica de este resultado es la mencionada restricción sobre el cuerpo base, pues, por ejemplo, las únicas extensiones de Kummer de  $\mathbb{Q}$  son sus extensiones cuadráticas. En esta charla veremos una noción generalizada de extensión de Kummer en el lenguaje de la teoría de Hopf-Galois, cuyo punto de partida es el concepto de extensión Hopf-Galois (o  $H$ -Galois): una extensión sobre la que actúa un álgebra de Hopf  $H$  del mismo modo que un grupo de Galois sobre una extensión de Galois. La idea es que una extensión de Galois es de Kummer si y solamente si tiene un conjunto finito de generadores que son autovectores de la acción galoisiana. Así, definimos una extensión  $H$ -Kummer como una extensión  $H$ -Galois que admite un conjunto finito de generadores que son autovectores de la acción de  $H$ . Veremos que esta noción permite caracterizar las extensiones radicales que son linealmente disjuntas con el cuerpo generado por una raíz primitiva  $n$ -ésima de la unidad.

LUNES, 22 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

SESIÓN ESPECIAL 8  
Teoría de números

CONSTRUCCIÓN CON REGLA Y COMPÁS DEL POLÍGONO REGULAR DE 17 LADOS SOBRE LA LEMNISCATA

TÉCNICAS GEOMÉTRICAS EN MONOGENEIDAD

BRACES DE TIPO SCHUR-ZASSENHAUS

UNA GENERALIZACIÓN DE LA TEORÍA DE KUMMER MEDIANTE LA TEORÍA DE HOPF GALOIS

EQUIDISTRIBUCIÓN DE SUMAS DE GAUSS MULTINOMIALES

THE REFINED CLASS NUMBER FORMULA FOR DRINFELD MODULES

SOBRE UNA FACTORIZACIÓN DE FUNCIONES L P-ÁDICAS

FUNDAMENTAL DOMAINS FOR THE BRUHAT-TITS TREE FOR  $GL_2(\mathbb{F}_p)$

PERIODOS, MODULARIDAD DE CURVAS ELÍPTICAS Y VALORES CRÍTICOS DE FUNCIONES L

EXPLORING THE IMPLICATIONS OF THE PLECTIC PHILOSOPHY FOR THE BSD CONJECTURE

LÍMITES INFERIORES DEL RATIO DE SZPIRO MODIFICADO

FALTINGS ELLIPTIC CURVES OVER  $\mathbb{Q}$

## Equidistribución de sumas de Gauss multinomiales

ANTONIO ROJAS-LEÓN

Departamento de Álgebra, Universidad de Sevilla

[arojas@us.es](mailto:arojas@us.es)

**Resumen:** Dado un cuerpo finito  $k/\mathbb{F}_p$  y  $n$   $r$ -tuplas  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{Z}^r$  de exponentes, estudiaremos la distribución simultánea de las sumas de Gauss normalizadas  $G(\chi^{\mathbf{a}_1}), \dots, G(\chi^{\mathbf{a}_n})$  en el producto de  $n$  copias de la circunferencia  $(S^1)^n$  cuando  $\chi$  recorre el conjunto de caracteres de  $k^{r \times}$ , usando la teoría de haces perversos en toros de Gabber y Loeser. Como corolario, probaremos que todas las relaciones no triviales entre estas sumas de Gauss se pueden expresar en función de las identidades conocidas: invariancia por Frobenius y la fórmula del producto de Hasse–Davenport.

SESIÓN ESPECIAL 8  
Teoría de números

CONSTRUCCIÓN CON REGLA Y  
COMPÁS DEL POLÍGONO REGULAR DE  
17 LADOS SOBRE LA LEMNISCATA

TÉCNICAS GEOMÉTRICAS EN  
MONOGENEIDAD

BRACES DE TIPO SCHUR-  
ZASSENHAUS

UNA GENERALIZACIÓN DE LA TEORÍA  
DE KUMMER MEDIANTE LA TEORÍA DE  
HOPF GALOIS

EQUIDISTRIBUCIÓN DE SUMAS DE  
GAUSS MULTINOMIALES

THE REFINED CLASS NUMBER  
FORMULA FOR DRINFELD MODULES

SOBRE UNA FACTORIZACIÓN DE  
FUNCIONES L P-ÁDICAS

FUNDAMENTAL DOMAINS FOR THE  
BRUHAT–TITS TREE FOR  $GL_2(\mathbb{F}_p)$

PERIODOS, MODULARIDAD DE  
CURVAS ELÍPTICAS Y VALORES  
CRÍTICOS DE FUNCIONES L

EXPLORING THE IMPLICATIONS OF  
THE PLECTIC PHILOSOPHY FOR THE  
BSD CONJECTURE

LÍMITES INFERIORES DEL RATIO DE  
SZPIRO MODIFICADO

FALTINGS ELLIPTIC CURVES OVER  $\mathbb{Q}$

MARTES, 23 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

## The refined class number formula for Drinfeld modules

MARÍA INÉS DE FRUTOS FERNÁNDEZ

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid

[maria.defrutos@uam.es](mailto:maria.defrutos@uam.es)

**Abstract:** Let  $K/k$  be a finite Galois extension of function fields, and let  $E$  be a Drinfeld module over  $k$ . In joint work with Daniel Macías Castillo and Daniel Martínez Marqués, we have formulated and proved an equivariant refinement of Taelman's analogue of the analytic class number formula for  $(E, K/k)$ , and derived explicit consequences for the Galois structure of the Taelman class group of  $E$  over  $K$ .

SESIÓN ESPECIAL 8  
Teoría de números

CONSTRUCCIÓN CON REGLA Y COMPÁS DEL POLÍGONO REGULAR DE 17 LADOS SOBRE LA LEMNISCATA

TÉCNICAS GEOMÉTRICAS EN MONOGENEIDAD

BRACES DE TIPO SCHUR-ZASSENHAUS

UNA GENERALIZACIÓN DE LA TEORÍA DE KUMMER MEDIANTE LA TEORÍA DE HOPF GALOIS

EQUIDISTRIBUCIÓN DE SUMAS DE GAUSS MULTINOMIALES

THE REFINED CLASS NUMBER FORMULA FOR DRINFELD MODULES

SOBRE UNA FACTORIZACIÓN DE FUNCIONES L P-ÁDICAS

FUNDAMENTAL DOMAINS FOR THE BRUHAT-TITS TREE FOR  $GL_2(\mathbb{F}_p)$

PERIODOS, MODULARIDAD DE CURVAS ELÍPTICAS Y VALORES CRÍTICOS DE FUNCIONES L

EXPLORING THE IMPLICATIONS OF THE PLECTIC PHILOSOPHY FOR THE BSD CONJECTURE

LÍMITES INFERIORES DEL RATIO DE SZPIRO MODIFICADO

FALTINGS ELLIPTIC CURVES OVER  $\mathbb{Q}$

MARTES, 23 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

## Sobre una factorización de funciones $L$ $p$ -ádicas

CARLOS DE VERA PIQUERO

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza

[devera@unizar.es](mailto:devera@unizar.es)

**Resumen:** El objetivo de la charla será exponer una estrategia para probar una factorización conjetural de funciones  $L$   $p$ -ádicas asociadas a ciertos productos triples de familias de Hida  $p$ -ádicas. Dicha estrategia es parte de un trabajo conjunto con K. Buyukboduk, D. Casazza y A. Pal, y está inspirada por resultados previos de Gross y Dasgupta.

Más concretamente, sean  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  dos familias de Hida  $p$ -ádicas, con espacios de pesos respectivos  $\mathcal{W}_{\mathbf{f}}$  y  $\mathcal{W}_{\mathbf{g}}$ , y sea  $\mathbf{g}^c$  la familia conjugada de  $\mathbf{g}$ . Sea  $\mathcal{L}_p^{\mathbf{g}}(\mathbf{f} \otimes \mathbf{g} \otimes \mathbf{g}^c)$  la función  $L$   $p$ -ádica que interpola los valores centrales de las funciones  $L$  asociadas a los productos triples  $\mathbf{f}_{\kappa} \otimes \mathbf{g}_{\lambda} \otimes \mathbf{g}_{\mu}^c$  en la llamada región  $\mathbf{g}$ -dominante  $\mathcal{W}^{\mathbf{g}}$  del espacio de pesos  $\mathcal{W} := \mathcal{W}_{\mathbf{f}} \times \mathcal{W}_{\mathbf{g}} \times \mathcal{W}_{\mathbf{g}}$ , y sea  $\mathcal{L}_p^{\mathbf{g}}(\mathbf{f} \otimes \mathbf{g} \otimes \mathbf{g}^c)|_{\mathcal{W}_0}$  su restricción al subespacio 2-dimensional  $\mathcal{W}_0 = \mathcal{W}_{\mathbf{f}} \times \mathcal{W}_{\mathbf{g}} \subset \mathcal{W}$ . Aunque la función  $L$   $p$ -ádica  $\mathcal{L}_p^{\mathbf{g}}(\mathbf{f} \otimes \mathbf{g} \otimes \mathbf{g}^c)|_{\mathcal{W}_0}$  tiene región de interpolación vacía, el formalismo de Artin para funciones  $L$  complejas sugiere una factorización no trivial como producto de dos funciones  $L$   $p$ -ádicas (de grados 6 y 2, respectivamente). Expondremos una conjetura para tal factorización y explicaremos cómo una posible prueba requiere comparar dos sistemas de Euler: uno proveniente de ciclos diagonales en productos triples de variedades de Kuga-Sato, y el otro proveniente de puntos de Heegner.

SESIÓN ESPECIAL 8  
Teoría de números

CONSTRUCCIÓN CON REGLA Y COMPÁS DEL POLÍGONO REGULAR DE 17 LADOS SOBRE LA LEMNISCATA

TÉCNICAS GEOMÉTRICAS EN MONOGENEIDAD

BRACES DE TIPO SCHUR-ZASSENHAUS

UNA GENERALIZACIÓN DE LA TEORÍA DE KUMMER MEDIANTE LA TEORÍA DE HOPF GALOIS

EQUIDISTRIBUCIÓN DE SUMAS DE GAUSS MULTINOMIALES

THE REFINED CLASS NUMBER FORMULA FOR DRINFELD MODULES

SOBRE UNA FACTORIZACIÓN DE FUNCIONES  $L$   $p$ -ÁDICAS

FUNDAMENTAL DOMAINS FOR THE BRUHAT-TITS TREE FOR  $GL_2(\mathbb{F}_p)$

PERIODOS, MODULARIDAD DE CURVAS ELÍPTICAS Y VALORES CRÍTICOS DE FUNCIONES  $L$

EXPLORING THE IMPLICATIONS OF THE PLECTIC PHILOSOPHY FOR THE BSD CONJECTURE

LÍMITES INFERIORES DEL RATIO DE SZPIRO MODIFICADO

FALTINGS ELLIPTIC CURVES OVER  $\mathbb{Q}$

MARTES, 23 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

## Fundamental domains for the Bruhat–Tits tree for $GL_2(F_p)$

ELOI TORRENTS JUSTE

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona

[eloi.torrents@uab.cat](mailto:eloi.torrents@uab.cat)

**Abstract:** The computation of fundamental domains of the Bruhat–Tits tree by the action of quaternionic groups allows the computation of harmonic cocycles on it. These are related to automorphic forms and from this fact are derived several applications, as for example the computation of points on Shimura curves and Heegner points on elliptic curves as done by M. Greenberg and later generalized by C. Franc and M. Masdeu.

In this talk we will review these concepts, and we will explain how to apply them in the computation of Heegner points on elliptic curves in cases where the Heegner hypothesis is not satisfied, and therefore the classical archimedean construction of these points is difficult to compute.

SESIÓN ESPECIAL 8  
Teoría de números

CONSTRUCCIÓN CON REGLA Y  
COMPÁS DEL POLÍGONO REGULAR DE  
17 LADOS SOBRE LA LEMNISCATA

TÉCNICAS GEOMÉTRICAS EN  
MONOGENEIDAD

BRACES DE TIPO SCHUR-  
ZASSENHAUS

UNA GENERALIZACIÓN DE LA TEORÍA  
DE KUMMER MEDIANTE LA TEORÍA DE  
HOPF GALOIS

EQUIDISTRIBUCIÓN DE SUMAS DE  
GAUSS MULTINOMIALES

THE REFINED CLASS NUMBER  
FORMULA FOR DRINFELD MODULES

SOBRE UNA FACTORIZACIÓN DE  
FUNCIONES L P-ÁDICAS

FUNDAMENTAL DOMAINS FOR THE  
BRUHAT–TITS TREE FOR  $GL_2(FP)$

PERIODOS, MODULARIDAD DE  
CURVAS ELÍPTICAS Y VALORES  
CRÍTICOS DE FUNCIONES L

EXPLORING THE IMPLICATIONS OF  
THE PLECTIC PHILOSOPHY FOR THE  
BSD CONJECTURE

LÍMITES INFERIORES DEL RATIO DE  
SZPIRO MODIFICADO

FALTINGS ELLIPTIC CURVES OVER  $\mathbb{Q}$

MARTES, 23 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

## Periodos, modularidad de curvas elípticas y valores críticos de funciones $L$

SANTIAGO MOLINA BLANCO

Departament de Matemàtica, Universitat de Lleida

[santiago.molina@udl.cat](mailto:santiago.molina@udl.cat)

**Resumen:** Los periodos de una forma modular nueva normalizada son constantes complejas que otorgan de estructura algebraica al correspondiente espacio de símbolos modulares. Por un resultado clásico de Shimura, el cociente de la función  $L$  asociada y dicho periodo es un valor algebraico. Recientemente hemos hallado una fórmula similar que generaliza la fórmula de Gross para formas modulares cuaterniónicas. En esta charla explicaré cómo podemos utilizar ambas fórmulas para entender mejor la modularidad de curvas elípticas definidas sobre cuerpos totalmente reales. Este trabajo está financiado por el proyecto PID2021-124613OB-I00.

SESIÓN ESPECIAL 8  
Teoría de números

CONSTRUCCIÓN CON REGLA Y COMPÁS DEL POLÍGONO REGULAR DE 17 LADOS SOBRE LA LEMNISCATA

TÉCNICAS GEOMÉTRICAS EN MONOGENEIDAD

BRACES DE TIPO SCHUR-ZASSENHAUS

UNA GENERALIZACIÓN DE LA TEORÍA DE KUMMER MEDIANTE LA TEORÍA DE HOPF GALOIS

EQUIDISTRIBUCIÓN DE SUMAS DE GAUSS MULTINOMIALES

THE REFINED CLASS NUMBER FORMULA FOR DRINFELD MODULES

SOBRE UNA FACTORIZACIÓN DE FUNCIONES  $L$  P-ÁDICAS

FUNDAMENTAL DOMAINS FOR THE BRUHAT-TITS TREE FOR  $GL_2(\mathbb{F}_p)$

PERIODOS, MODULARIDAD DE CURVAS ELÍPTICAS Y VALORES CRÍTICOS DE FUNCIONES  $L$

EXPLORING THE IMPLICATIONS OF THE PLECTIC PHILOSOPHY FOR THE BSD CONJECTURE

LÍMITES INFERIORES DEL RATIO DE SZPIRO MODIFICADO

FALTINGS ELLIPTIC CURVES OVER  $\mathbb{Q}$

MARTES, 23 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

## Exploring the implications of the plectic philosophy for the BSD conjecture

MICHELE FORNEA  
Centre de Recerca Matemàtica  
[mfornea@crm.cat](mailto:mfornea@crm.cat)

**Abstract:** I will survey recent findings illuminating the arithmetic intricacies of higher rank elliptic curves. Inspired by Nekovar and Scholl's plectic conjectures, our research is deeply rooted in the extensive contributions of Darmon, his coauthors and his school. The results discussed in this talk were obtained in a series of collaborations with H. Darmon, L. Gehrmann, X. Guitart and M. Masdeu.

SESIÓN ESPECIAL 8  
Teoría de números

CONSTRUCCIÓN CON REGLA Y COMPÁS DEL POLÍGONO REGULAR DE 17 LADOS SOBRE LA LEMNISCATA

TÉCNICAS GEOMÉTRICAS EN MONOGENEIDAD

BRACES DE TIPO SCHUR-ZASSENHAUS

UNA GENERALIZACIÓN DE LA TEORÍA DE KUMMER MEDIANTE LA TEORÍA DE HOPF GALOIS

EQUIDISTRIBUCIÓN DE SUMAS DE GAUSS MULTINOMIALES

THE REFINED CLASS NUMBER FORMULA FOR DRINFELD MODULES

SOBRE UNA FACTORIZACIÓN DE FUNCIONES L P-ÁDICAS

FUNDAMENTAL DOMAINS FOR THE BRUHAT-TITS TREE FOR  $GL_2(\mathbb{F}_p)$

PERIODOS, MODULARIDAD DE CURVAS ELÍPTICAS Y VALORES CRÍTICOS DE FUNCIONES L

EXPLORING THE IMPLICATIONS OF THE PLECTIC PHILOSOPHY FOR THE BSD CONJECTURE

LÍMITES INFERIORES DEL RATIO DE SZPIRO MODIFICADO

FALTINGS ELLIPTIC CURVES OVER  $\mathbb{Q}$

MARTES, 23 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

## Límites inferiores del ratio de Szpiro modificado

ALEXANDER J. BARRIOS

Department of Mathematics, University of St. Thomas

[abarrios@stthomas.edu](mailto:abarrios@stthomas.edu)

**Resumen:** La conjetura modificada de Szpiro, que es equivalente a la conjetura abc, afirma que para cada  $\epsilon > 0$ , hay un número finito de curvas elípticas  $E/\mathbb{Q}$  que satisfacen  $N_E^{6+\epsilon} < \max\{|c_4|^3, c_6^2\}$ , donde  $c_4$  y  $c_6$  son las invariantes asociadas a un modelo mínimo de  $E$  y  $N_E$  es el conductor de  $E$ . Dada una curva elíptica  $E$ , el ratio de Szpiro modificado se define como  $\sigma_m(E) = \log \max\{|c_4|^3, c_6^2\} / \log N_E$ . En esta charla, demostramos que para cada uno de los quince posibles subgrupos de torsión  $T$  de una curva elíptica, hay un número racional  $l_T$  tal que  $\sigma_m(E) > l_T$ .

SESIÓN ESPECIAL 8  
Teoría de números

CONSTRUCCIÓN CON REGLA Y COMPÁS DEL POLÍGONO REGULAR DE 17 LADOS SOBRE LA LEMNISCATA

TÉCNICAS GEOMÉTRICAS EN MONOGENEIDAD

BRACES DE TIPO SCHUR-ZASSENHAUS

UNA GENERALIZACIÓN DE LA TEORÍA DE KUMMER MEDIANTE LA TEORÍA DE HOPF GALOIS

EQUIDISTRIBUCIÓN DE SUMAS DE GAUSS MULTINOMIALES

THE REFINED CLASS NUMBER FORMULA FOR DRINFELD MODULES

SOBRE UNA FACTORIZACIÓN DE FUNCIONES L P-ÁDICAS

FUNDAMENTAL DOMAINS FOR THE BRUHAT-TITS TREE FOR  $GL_2(\mathbb{F}_p)$

PERIODOS, MODULARIDAD DE CURVAS ELÍPTICAS Y VALORES CRÍTICOS DE FUNCIONES L

EXPLORING THE IMPLICATIONS OF THE PLECTIC PHILOSOPHY FOR THE BSD CONJECTURE

LÍMITES INFERIORES DEL RATIO DE SZPIRO MODIFICADO

FALTINGS ELLIPTIC CURVES OVER  $\mathbb{Q}$

MARTES, 23 DE ENERO:  
17:00 – 17:30



## Faltings elliptic curves over $\mathbb{Q}$

ENRIQUE GONZÁLEZ JIMÉNEZ

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid

[enrique.gonzalez.jimenez@uam.es](mailto:enrique.gonzalez.jimenez@uam.es)

**Abstract:** Let  $\mathcal{E}$  be a  $\mathbb{Q}$ -isogeny class of elliptic curves defined over  $\mathbb{Q}$ . Stevens [2] shows that there is a unique elliptic curve in  $\mathcal{E}$  with minimal Faltings height. We call this curve the Faltings elliptic curve in  $\mathcal{E}$ . Let  $G$  be the isogeny graph attached to  $\mathcal{E}$ : a vertex for every elliptic curve in  $\mathcal{E}$ , and edges in correspondence with the prime degree rational isogenies between them.

For every square-free integer  $d$ , we consider the graph  $G^d$  attached to the twisted elliptic curves in  $\mathcal{E}$  by the quadratic character of  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ . It turns out that  $G$  and  $G^d$  are canonically isomorphic as abstract graphs (the isomorphism identifies the vertices with equal  $j$ -invariant). We determine which vertex is the Faltings elliptic curve in  $G^d$ . In particular we obtain the probability distribution of a vertex to be the Faltings elliptic curve in  $\mathcal{E}^d$  as  $|d|$  grows up to infinity. This probability depends on the  $p$ -valuations of rational values of certain modular functions.

(This is joint work with Joan Carles Lario).

### Referencias

- [1] E. González Jiménez, J. C. Lario (preprint). Faltings elliptic curves in twisted  $\mathbb{Q}$ -isogeny classes.
- [2] G. Stevens (1989). Stickelberger elements and modular parametrizations of elliptic curves. *Invent. Math.*, 98, 75–106.

MARTES, 23 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

SESIÓN ESPECIAL 8  
Teoría de números

CONSTRUCCIÓN CON REGLA Y COMPÁS DEL POLÍGONO REGULAR DE 17 LADOS SOBRE LA LEMNISCATA

TÉCNICAS GEOMÉTRICAS EN MONOGENEIDAD

BRACES DE TIPO SCHUR-ZASSENHAUS

UNA GENERALIZACIÓN DE LA TEORÍA DE KUMMER MEDIANTE LA TEORÍA DE HOPF GALOIS

EQUIDISTRIBUCIÓN DE SUMAS DE GAUSS MULTINOMIALES

THE REFINED CLASS NUMBER FORMULA FOR DRINFELD MODULES

SOBRE UNA FACTORIZACIÓN DE FUNCIONES L P-ÁDICAS

FUNDAMENTAL DOMAINS FOR THE BRUHAT-TITS TREE FOR  $GL_2(\mathbb{F}_p)$

PERIODOS, MODULARIDAD DE CURVAS ELÍPTICAS Y VALORES CRÍTICOS DE FUNCIONES L

EXPLORING THE IMPLICATIONS OF THE PLECTIC PHILOSOPHY FOR THE BSD CONJECTURE

LÍMITES INFERIORES DEL RATIO DE SZPIRO MODIFICADO

FALTINGS ELLIPTIC CURVES OVER  $\mathbb{Q}$

## SESIÓN ESPECIAL 9 Álgebra Computacional y Aplicaciones

### Organizadores:

Red EACA: Red Temática de Cálculo Simbólico  
<https://riemann.unizar.es/RedEACA/index.html>

PHILIPPE GIMENEZ  
 (Universidad de Valladolid)

SONIA PÉREZ-DÍAZ  
 (Universidad de Alcalá)

ANA ROMERO  
 (Universidad de La Rioja)

### Descripción:

La lista de ponentes propuesta incluye 11 jóvenes investigadores españoles, pre o postdoctorales, que se dedican a áreas diversas dentro del álgebra computacional como son el álgebra conmutativa, la topología computacional o la formalización de las matemáticas. Además, se ha incluido un reconocido investigador en el área, J. Rafael Sendra, profesor Catedrático de CUNEF-Universidad y uno de los fundadores de la Red EACA.

SESIÓN ESPECIAL 9  
 Álgebra Computacional y  
 Aplicaciones

EL PROBLEMA DE LA  
 SUPRAYECTIVIDAD DE UNA  
 PARAMETRIZACIÓN

QUANTUM ERROR-CORRECTING  
 CODES CONSTRUCTED FROM TRACE-  
 DEPENDENT POLYNOMIALS

POSITIVE ZEROS OF PARAMETRIC  
 POLYNOMIAL FAMILIES FROM  
 REACTION NETWORKS

ALGORITMOS PARA LA COMPUTACIÓN  
 DEL IDEAL DEL REES DE IDEALES  
 MONOMIALES...

CASTELNUOVO-MUMFORD  
 REGULARITY OF PROJECTIVE  
 MONOMIAL CURVES, SUMSETS...

MULTIGRADED CASTELNUOVO-  
 MUMFORD REGULARITY AND  
 MULTIGENERIC INITIAL IDEALS

CONSTRUCTION AND MANIPULATION  
 OF BIRATIONAL TRILINEAR VOLUMES

AN ALGORITHM TO COMPUTE  
 RATIONAL FIRST INTEGRALS OF  
 POLYNOMIAL FOLIATIONS

OPTIMIZANDO ALGORITMOS  
 ALGEBRAICOS UTILIZANDO  
 INTELIGENCIA ARTIFICIAL

RECONSTRUCTION OF UNIVARIATE  
 FUNCTIONS FROM DIRECTIONAL  
 PERSISTENCE...

FORMALIZACIÓN DE ÁLGEBRA  
 COMPUTACIONAL EN  
 DEMOSTRADORES INTERACTIVOS...

EL RESOLVEDOR DESCARTES ES  
 CUASI-ÓPTIMO EN MEDIA

## El problema de la suprayectividad de una parametrización

J. R. SENDRA

Departamento de Métodos Cuantitativos, CUNEF-Universidad

[jrafael.sendra@cunef.edu](mailto:jrafael.sendra@cunef.edu)

**Resumen:** Una parametrización de una variedad algebraica (afín) se puede visualizar como una aplicación de un abierto no vacío del espacio afín de parámetros en la variedad. Desde ese punto de vista, resulta natural preguntarse por la inyectividad y/o la suprayectividad de la aplicación. Esta cuestión, inicialmente de interés teórico, tiene trascendencia en la aplicabilidad de la parametrización. Así, por ejemplo, la no inyectividad implica un aumento de la complejidad de los cálculos y la suprayectividad conduce a la pérdida de información, quizás relevante en el problema que se esté tratando, de la variedad parametrizada. Si la parametrización es racional, la inyectividad está directamente relacionada con los Teoremas de Lüroth, para curvas, y Castelnuovo para superficies. Esta charla se centra en el estudio (primeras aportaciones) del problema de la suprayectividad de parametrizaciones radicales de curvas algebraicas, comentando previamente la correspondiente problemática para el caso parametrizaciones racionales de curvas y superficies.

Las principales ideas presentadas en esta charla proceden del trabajo [1]

### Referencias

- [1] J. Caravantes, J.R. Sendra, D. Sevilla, C. Villarino. Sufficient conditions for the surjectivity of radical curve parametrizations. *Journal of Algebra* (2023): available on line. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2023.11.004>

**Agradecimientos:** Investigación desarrollada en el marco del proyecto PID2020-113192GB-I00/AEI/10.13039/501100011033 (Mathematical Visualization: Foundations, Algorithms and Applications), Ministerio de Ciencia e Innovación.

LUNES, 22 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

SESIÓN ESPECIAL 9  
Álgebra Computacional y  
Aplicaciones

EL PROBLEMA DE LA  
SUPRAYECTIVIDAD DE UNA  
PARAMETRIZACIÓN

QUANTUM ERROR-CORRECTING  
CODES CONSTRUCTED FROM TRACE-  
DEPENDENT POLYNOMIALS

POSITIVE ZEROS OF PARAMETRIC  
POLYNOMIAL FAMILIES FROM  
REACTION NETWORKS

ALGORITMOS PARA LA COMPUTACIÓN  
DEL IDEAL DEL REES DE IDEALES  
MONOMIALES...

CASTELNUOVO-MUMFORD  
REGULARITY OF PROJECTIVE  
MONOMIAL CURVES, SUMSETS...

MULTIGRADED CASTELNUOVO-  
MUMFORD REGULARITY AND  
MULTIGENERIC INITIAL IDEALS

CONSTRUCTION AND MANIPULATION  
OF BIRATIONAL TRILINEAR VOLUMES

AN ALGORITHM TO COMPUTE  
RATIONAL FIRST INTEGRALS OF  
POLYNOMIAL FOLIATIONS

OPTIMIZANDO ALGORITMOS  
ALGEBRAICOS UTILIZANDO  
INTELIGENCIA ARTIFICIAL

RECONSTRUCTION OF UNIVARIATE  
FUNCTIONS FROM DIRECTIONAL  
PERSISTENCE...

FORMALIZACIÓN DE ÁLGEBRA  
COMPUTACIONAL EN  
DEMOSTRADORES INTERACTIVOS...

EL RESOLVEDOR DESCARTES ES  
CUASI-ÓPTIMO EN MEDIA

## Quantum error-correcting codes constructed from trace-dependent polynomials

HELENA MARTÍN-CRUZ, CARLOS GALINDO,  
FERNANDO HERNANDO, DIEGO RUANO

Departamento de Matemáticas e Instituto de Matemáticas y Aplicaciones de Castellón (IMAC),  
Universitat Jaume I  
[martinh@uji.es](mailto:martinh@uji.es)

**Abstract:** Many of the known quantum error-correcting codes are stabilizer codes. A stabilizer code  $\mathcal{C} \neq \{0\}$  is the common eigenspace (with respect to the eigenvalue 1) of a commutative subgroup of the error group generated by a suitable error basis on the space  $\mathbb{C}^{q^n}$ , where  $\mathbb{C}$  denotes the complex field,  $q$  is a prime power and  $n$  is a positive integer. A main advantage of stabilizer quantum error-correcting codes is that they can be constructed from self-orthogonal classical linear codes [3].

Quantum error-correcting codes with good parameters can be constructed from evaluation codes by evaluating polynomials at the roots of the polynomial trace  $\text{tr}_{2n}(X) = X + X^q + \dots + X^{q^{2n-1}} \in \mathbb{F}_{q^{2n}}[X]$  [1]. In this talk, we propose to evaluate polynomials at the roots of trace-dependent polynomials  $a + \text{tr}_{2n}(h(X))$ , where  $a \in \mathbb{F}_{q^{2n}}$  and  $h(X) \in \mathbb{F}_{q^{2n}}[X]$ , and show that this procedure gives rise to stabilizer quantum error-correcting codes with a wider range of lengths than in [1] and with excellent parameters. Namely, we are able to provide new binary records according to [2] and non-binary codes improving the ones available in the literature.

### Referencias

- [1] C. Galindo, F. Hernando, D. Ruano (2019). Classical and quantum evaluation codes at the trace roots. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 65(4), 2593-2602.
- [2] M. Grassl. Bounds on the minimum distance of linear codes (accessed on 29/06/2022). <http://www.codetables.de>
- [3] A. Ketkar, A. Klappenecker, S. Kumar, P. K. Sarvepalli (2006). Nonbinary stabilizer codes over finite fields. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 52(11), 4892-4914.

LUNES, 22 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 9  
Álgebra Computacional y  
Aplicaciones

EL PROBLEMA DE LA  
SUPRAYECTIVIDAD DE UNA  
PARAMETRIZACIÓN

QUANTUM ERROR-CORRECTING  
CODES CONSTRUCTED FROM TRACE-  
DEPENDING POLYNOMIALS

POSITIVE ZEROS OF PARAMETRIC  
POLYNOMIAL FAMILIES FROM  
REACTION NETWORKS

ALGORITMOS PARA LA COMPUTACIÓN  
DEL IDEAL DEL REES DE IDEALES  
MONOMIALES...

CASTELNUOVO-MUMFORD  
REGULARITY OF PROJECTIVE  
MONOMIAL CURVES, SUMSETS...

MULTIGRADED CASTELNUOVO-  
MUMFORD REGULARITY AND  
MULTIGENERIC INITIAL IDEALS

CONSTRUCTION AND MANIPULATION  
OF BIRATIONAL TRILINEAR VOLUMES

AN ALGORITHM TO COMPUTE  
RATIONAL FIRST INTEGRALS OF  
POLYNOMIAL FOLIATIONS

OPTIMIZANDO ALGORITMOS  
ALGEBRAICOS UTILIZANDO  
INTELIGENCIA ARTIFICIAL

RECONSTRUCTION OF UNIVARIATE  
FUNCTIONS FROM DIRECTIONAL  
PERSISTENCE...

FORMALIZACIÓN DE ÁLGEBRA  
COMPUTACIONAL EN  
DEMOSTRADORES INTERACTIVOS...

EL RESOLVEDOR DESCARTES ES  
QUASI-ÓPTIMO EN MEDIA

## Positive zeros of parametric polynomial families from Reaction Networks

BEATRIZ PASCUAL ESCUDERO

Departamento de Matemática e Informática aplicadas a las Ingenierías civil y naval,  
Universidad Politécnica de Madrid  
[beatriz.pascual@upm.es](mailto:beatriz.pascual@upm.es)

**Abstract:** In the study of reaction networks, equilibria correspond to the positive zeros of a parametric family of polynomial systems. Under certain assumptions on the kinetics, the structure of the polynomials is completely determined by the structure of the network: all polynomials are linear combinations of a fixed set of monomials, each one scaled by a free parameter.

Motivated by applications to reaction networks, we will discuss the dimension of the set of positive zeros for such systems, as well as the existence of nondegenerate ones.

This talk is based on joint work with E. Feliu and O. Henriksson.

### Referencias

- [1] E. Feliu, O. Henriksson, B. Pascual-Escudero. Dimension and degeneracy of zeros of parametric polynomial systems arising from reaction networks. (arXiv:2304.02302).

LUNES, 22 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 9  
Álgebra Computacional y  
Aplicaciones

EL PROBLEMA DE LA  
SUPRAYECTIVIDAD DE UNA  
PARAMETRIZACIÓN

QUANTUM ERROR-CORRECTING  
CODES CONSTRUCTED FROM TRACE-  
DEPENDENT POLYNOMIALS

POSITIVE ZEROS OF PARAMETRIC  
POLYNOMIAL FAMILIES FROM  
REACTION NETWORKS

ALGORITMOS PARA LA COMPUTACIÓN  
DEL IDEAL DEL REES DE IDEALES  
MONOMIALES...

CASTELNUOVO-MUMFORD  
REGULARITY OF PROJECTIVE  
MONOMIAL CURVES, SUMSETS...

MULTIGRADED CASTELNUOVO-  
MUMFORD REGULARITY AND  
MULTIGENERIC INITIAL IDEALS

CONSTRUCTION AND MANIPULATION  
OF BIRATIONAL TRILINEAR VOLUMES

AN ALGORITHM TO COMPUTE  
RATIONAL FIRST INTEGRALS OF  
POLYNOMIAL FOLIATIONS

OPTIMIZANDO ALGORITMOS  
ALGEBRAICOS UTILIZANDO  
INTELIGENCIA ARTIFICIAL

RECONSTRUCTION OF UNIVARIATE  
FUNCTIONS FROM DIRECTIONAL  
PERSISTENCE...

FORMALIZACIÓN DE ÁLGEBRA  
COMPUTACIONAL EN  
DEMOSTRADORES INTERACTIVOS...

EL RESOLVEDOR DESCARTES ES  
CUASI-ÓPTIMO EN MEDIA

## Algoritmos para la computación del Ideal del Rees de ideales monomiales trigerados en dos variables

RODRIGO IGLESIAS GONZÁLEZ, EDUARDO SAÉNZ DE CABEZÓN IRIGARAY

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

[roiglesi@unirioja.es](mailto:roiglesi@unirioja.es)

**Resumen:** En esta charla mostraremos unos algoritmos para la obtención del sistema generador mínimo del ideal de definición del Rees (también conocido como las ecuaciones de definición del Algebra del Rees) de ideales monomiales generados mínimamente por tres generadores en el anillo polinómico de dos variables. Este tipo de ideales monomiales generaliza la conocida clase de los ideales monomiales asociados a la parametrización de una curva monomial plana, cuyo Ideal del Rees es conocido en la literatura como el ideal de las curvas en movimiento. En particular, mostraremos una adaptación del algoritmo para este caso particular. Además daremos unas pautas de en que direcciones se preeven extender dichos algoritmos.

### Referencias

- [1] T. Cortadellas Benítez, C. D'Andrea (2015). The Rees algebra of a monomial plane parametrization, *J. Symb. Comput.* 70, 71-105.
- [2] D. A. Cox (2008). The moving curve ideal and the Rees algebra. *Theoretical computer Science*, 392(1), 23-36.

**Agradecimientos:** Ayuda PID2020-116641GB-I00 financiada por MCIN/AEI 10.13039/501100011033.

LUNES, 22 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

SESIÓN ESPECIAL 9  
Álgebra Computacional y  
Aplicaciones

EL PROBLEMA DE LA  
SUPRAYECTIVIDAD DE UNA  
PARAMETRIZACIÓN

QUANTUM ERROR-CORRECTING  
CODES CONSTRUCTED FROM TRACE-  
DEPENDENT POLYNOMIALS

POSITIVE ZEROS OF PARAMETRIC  
POLYNOMIAL FAMILIES FROM  
REACTION NETWORKS

ALGORITMOS PARA LA COMPUTACIÓN  
DEL IDEAL DEL REES DE IDEALES  
MONOMIALES...

CASTELNUOVO-MUMFORD  
REGULARITY OF PROJECTIVE  
MONOMIAL CURVES, SUMSETS...

MULTIGRADED CASTELNUOVO-  
MUMFORD REGULARITY AND  
MULTIGENERIC INITIAL IDEALS

CONSTRUCTION AND MANIPULATION  
OF BIRATIONAL TRILINEAR VOLUMES

AN ALGORITHM TO COMPUTE  
RATIONAL FIRST INTEGRALS OF  
POLYNOMIAL FOLIATIONS

OPTIMIZANDO ALGORITMOS  
ALGEBRAICOS UTILIZANDO  
INTELIGENCIA ARTIFICIAL

RECONSTRUCTION OF UNIVARIATE  
FUNCTIONS FROM DIRECTIONAL  
PERSISTENCE...

FORMALIZACIÓN DE ÁLGEBRA  
COMPUTACIONAL EN  
DEMOSTRADORES INTERACTIVOS...

EL RESOLVEDOR DESCARTES ES  
CUASI-ÓPTIMO EN MEDIA

## Castelnuovo-Mumford regularity of projective monomial curves, sumsets and semigroups

MARIO GONZÁLEZ-SÁNCHEZ, PHILIPPE GIMENEZ

IMUVA, Universidad de Valladolid

[mario.gonzalez.sanchez@uva.es](mailto:mario.gonzalez.sanchez@uva.es)

**Abstract:** Let  $A = \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$  be a finite set of  $n \geq 4$  non-negative relatively prime integers, such that  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} = d$ . The  $s$ -fold sumset of  $A$  is the set  $sA$  of integers that contains all the sums of  $s$  elements in  $A$ . On the other hand, given an infinite field  $k$ , one can associate with  $A$  the projective monomial curve  $\mathcal{C}_A$  parametrized by  $A$ ,

$$\mathcal{C}_A = \{(v^d : u^{a_1} v^{d-a_1} : \dots : u^{a_{n-2}} v^{d-a_{n-2}} : u^d) \mid (u : v) \in \mathbb{P}_k^1\} \subset \mathbb{P}_k^{n-1}.$$

The exponents in the previous parametrization of  $\mathcal{C}_A$  define a homogeneous semigroup  $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}^2$ . This talk is based on [2], where we provide several results relating the Castelnuovo-Mumford regularity of  $\mathcal{C}_A$  to the behavior of the sumsets of  $A$  and to the combinatorics of the semigroup  $\mathcal{S}$ . This relation reveals a new interplay between commutative algebra and additive number theory that was first studied in [1] for projective monomial curves.

### Referencias

- [1] J. Elias (2022). Sumsets and Projective Curves. *Mediterr. J. Math.*, 19, 177.
- [2] P. Gimenez, M. Gonzalez-Sánchez (2023). Castelnuovo-Mumford Regularity of Projective Monomial Curves via Sumsets. *Mediterr. J. Math.*, 20, 287.

**Acknowledgments:** This work was supported in part by the grants PID2019-104844GB-I00 and TED2021-130358B-I00 funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and by the European Union NextGenerationEU/PRTR. The first author thanks financial support from European Social Fund, *Programa Operativo de Castilla y León*, and *Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León*.

MARTES, 23 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 9  
Álgebra Computacional y  
Aplicaciones

EL PROBLEMA DE LA  
SUPRAYECTIVIDAD DE UNA  
PARAMETRIZACIÓN

QUANTUM ERROR-CORRECTING  
CODES CONSTRUCTED FROM TRACE-  
DEPENDENT POLYNOMIALS

POSITIVE ZEROS OF PARAMETRIC  
POLYNOMIAL FAMILIES FROM  
REACTION NETWORKS

ALGORITMOS PARA LA COMPUTACIÓN  
DEL IDEAL DEL REES DE IDEALES  
MONOMIALES...

CASTELNUOVO-MUMFORD  
REGULARITY OF PROJECTIVE  
MONOMIAL CURVES, SUMSETS...

MULTIGRADED CASTELNUOVO-  
MUMFORD REGULARITY AND  
MULTIGENERIC INITIAL IDEALS

CONSTRUCTION AND MANIPULATION  
OF BIRATIONAL TRILINEAR VOLUMES

AN ALGORITHM TO COMPUTE  
RATIONAL FIRST INTEGRALS OF  
POLYNOMIAL FOLIATIONS

OPTIMIZANDO ALGORITMOS  
ALGEBRAICOS UTILIZANDO  
INTELIGENCIA ARTIFICIAL

RECONSTRUCTION OF UNIVARIATE  
FUNCTIONS FROM DIRECTIONAL  
PERSISTENCE...

FORMALIZACIÓN DE ÁLGEBRA  
COMPUTACIONAL EN  
DEMOSTRADORES INTERACTIVOS...

EL RESOLVEDOR DESCARTES ES  
CUASI-ÓPTIMO EN MEDIA

## Multigraded Castelnuovo-Mumford regularity and multigeneric initial ideals

MATÍAS R. BENDER, LAURENT BUSÉ, CARLES CHECA, ELIAS TSIGARIDAS

Department of Informatics and Telecommunications, NKU Athens and ATHENA

Research Innovation Center, Greece

[ccheca@di.uoa.gr](mailto:ccheca@di.uoa.gr)

**Abstract:** We review the relevance of regularity as an invariant that governs the computations with polynomial systems by Gröbner bases methods. We will briefly explain the classical results of Bayer and Stillman on the regularity and generic initial ideals with respect to a reverse lexicographical order. In the setting of multi-homogeneous polynomial systems many problems arise: the relative order of the variables of different multi-degree becomes relevant. We will explain the relation between the multigraded Castelnuovo-Mumford regularity and the degrees of the generators of multi-generic initial ideals in this context, by using the machinery of local cohomology and multigraded Betti numbers.

### Referencias

- [1] D. Bayer, M. Stillman (2000). A criterion for detecting  $m$ -regularity. *Inventiones Mathematicae*, 1, 1–11.
- [2] D. Maclagan, G. Smith (2004). Multigraded Castelnuovo-Mumford regularity. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 571, 179–212.
- [3] T. Römer (2001). Homological properties of bigraded algebras. *Illinois Journal of Mathematics*. 4, 1361–1376.

MARTES, 23 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

SESIÓN ESPECIAL 9  
Álgebra Computacional y  
Aplicaciones

EL PROBLEMA DE LA  
SUPRAYECTIVIDAD DE UNA  
PARAMETRIZACIÓN

QUANTUM ERROR-CORRECTING  
CODES CONSTRUCTED FROM TRACE-  
DEPENDENT POLYNOMIALS

POSITIVE ZEROS OF PARAMETRIC  
POLYNOMIAL FAMILIES FROM  
REACTION NETWORKS

ALGORITMOS PARA LA COMPUTACIÓN  
DEL IDEAL DEL REES DE IDEALES  
MONOMIALES...

CASTELNUOVO-MUMFORD  
REGULARITY OF PROJECTIVE  
MONOMIAL CURVES, SUMSETS...

MULTIGRADED CASTELNUOVO-  
MUMFORD REGULARITY AND  
MULTIGENERIC INITIAL IDEALS

CONSTRUCTION AND MANIPULATION  
OF BIRATIONAL TRILINEAR VOLUMES

AN ALGORITHM TO COMPUTE  
RATIONAL FIRST INTEGRALS OF  
POLYNOMIAL FOLIATIONS

OPTIMIZANDO ALGORITMOS  
ALGEBRAICOS UTILIZANDO  
INTELIGENCIA ARTIFICIAL

RECONSTRUCTION OF UNIVARIATE  
FUNCTIONS FROM DIRECTIONAL  
PERSISTENCE...

FORMALIZACIÓN DE ÁLGEBRA  
COMPUTACIONAL EN  
DEMOSTRADORES INTERACTIVOS...

EL RESOLVEDOR DESCARTES ES  
CUASI-ÓPTIMO EN MEDIA



## Construction and manipulation of birational trilinear volumes

PABLO GONZÁLEZ-MAZÓN, LAURENT BUSÉ

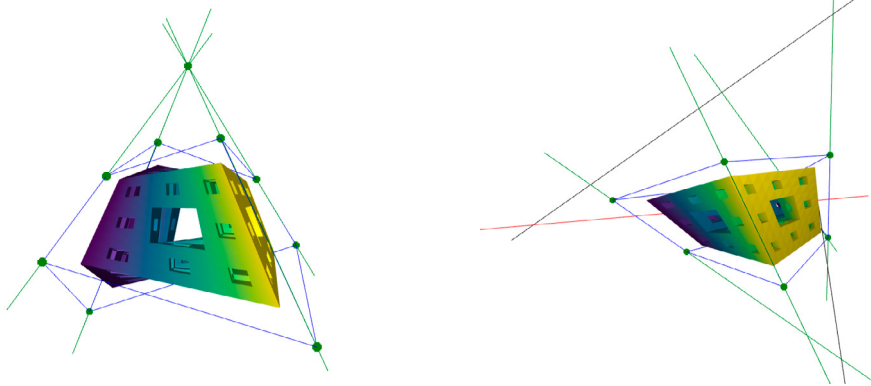
Centre Inria d'Université Côte d'Azur

[pablo.gonzalez-mazon@inria.fr](mailto:pablo.gonzalez-mazon@inria.fr)

**Abstract:** We present effective methods to construct and manipulate birational maps  $\phi : (\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1)^3 \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$  defined by four trilinear polynomials [1, 2], which determine the first family of nonlinear 3D birational transformations that can be operated with enough flexibility in geometric modeling. A trilinear rational map is defined by  $2 \times 2 \times 2 = 8$  control points  $\mathbf{P}_{ijk} = (1, x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$  in  $\mathbb{R}^4$ , and their associated (nonnegative) weights  $w_{ijk}$  for each  $0 \leq i, j, k \leq 1$ , namely

$$\phi : (s_0 : s_1) \times (t_0 : t_1) \times (u_0 : u_1) \mapsto \sum_{0 \leq i, j, k \leq 1} w_{ijk} \mathbf{P}_{ijk} b_i(s_0, s_1) b_j(t_0, t_1) b_k(u_0, u_1)$$

where  $b_0(s_0, s_1) = s_0 - s_1$  and  $b_1(s_0, s_1) = s_1$ . We address several problems of interest in applications, and solve them by establishing a novel connection between birationality and tensor rank. Specifically, birationality holds if and only if a certain tensor of format  $2 \times 2 \times 2$  has rank one. From this perspective, we can apply tools from a vast literature on tensor rank to the construction of birational maps.



Some of the configurations of control points for which birationality becomes possible.

### Referencias

- [1] L. Busé, P. González-Mazón J. Schicho (2023). Tri-linear birational maps in dimension three. *Math. Comp.* 92.342, pp. 1837-1866. URL: <https://doi.org/10.1090/mcom/3804>
- [2] P. González-Mazón, L. Busé. Birational 3D free-form deformations of degree 1 x 1 x 1. Preprint (2023). URL: <https://inria.hal.science/hal-03939273>

MARTES, 23 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

SESIÓN ESPECIAL 9  
Álgebra Computacional y  
Aplicaciones

EL PROBLEMA DE LA  
SUPRAYECTIVIDAD DE UNA  
PARAMETRIZACIÓN

QUANTUM ERROR-CORRECTING  
CODES CONSTRUCTED FROM TRACE-  
DEPENDENT POLYNOMIALS

POSITIVE ZEROS OF PARAMETRIC  
POLYNOMIAL FAMILIES FROM  
REACTION NETWORKS

ALGORITMOS PARA LA COMPUTACIÓN  
DEL IDEAL DEL REES DE IDEALES  
MONOMIALES...

CASTELNUOVO-MUMFORD  
REGULARITY OF PROJECTIVE  
MONOMIAL CURVES, SUMSETS...

MULTIGRADED CASTELNUOVO-  
MUMFORD REGULARITY AND  
MULTIGENERIC INITIAL IDEALS

CONSTRUCTION AND MANIPULATION  
OF BIRATIONAL TRILINEAR VOLUMES

AN ALGORITHM TO COMPUTE  
RATIONAL FIRST INTEGRALS OF  
POLYNOMIAL FOLIATIONS

OPTIMIZANDO ALGORITMOS  
ALGEBRAICOS UTILIZANDO  
INTELIGENCIA ARTIFICIAL

RECONSTRUCTION OF UNIVARIATE  
FUNCTIONS FROM DIRECTIONAL  
PERSISTENCE...

FORMALIZACIÓN DE ÁLGEBRA  
COMPUTACIONAL EN  
DEMOSTRADORES INTERACTIVOS...

EL RESOLVEDOR DESCARTES ES  
QUASI-ÓPTIMO EN MEDIA

## An algorithm to compute rational first integrals of polynomial foliations

ELVIRA PÉREZ-CALLEJO, CARLOS GALINDO, FRANCISCO MONSERRAT

Departamento de Matemáticas, Universitat Jaume I

[callejo@uji.es](mailto:callejo@uji.es)

**Abstract:** The algebraic integrability problem asks for the existence of a rational first integral of a given foliation defined on the complex plane and for its computation in the affirmative case.

We extend polynomial foliations to foliations on the projective plane or on Hirzebruch surfaces and present an algorithm which gives an answer to the algebraic integrability problem knowing of the genus of the expected rational first integral.

SESIÓN ESPECIAL 9  
Álgebra Computacional y  
Aplicaciones

EL PROBLEMA DE LA  
SUPRAYECTIVIDAD DE UNA  
PARAMETRIZACIÓN

QUANTUM ERROR-CORRECTING  
CODES CONSTRUCTED FROM TRACE-  
DEPENDENT POLYNOMIALS

POSITIVE ZEROS OF PARAMETRIC  
POLYNOMIAL FAMILIES FROM  
REACTION NETWORKS

ALGORITMOS PARA LA COMPUTACIÓN  
DEL IDEAL DEL REES DE IDEALES  
MONOMIALES...

CASTELNUOVO-MUMFORD  
REGULARITY OF PROJECTIVE  
MONOMIAL CURVES, SUMSETS...

MULTIGRADED CASTELNUOVO-  
MUMFORD REGULARITY AND  
MULTIGENERIC INITIAL IDEALS

CONSTRUCTION AND MANIPULATION  
OF BIRATIONAL TRILINEAR VOLUMES

AN ALGORITHM TO COMPUTE  
RATIONAL FIRST INTEGRALS OF  
POLYNOMIAL FOLIATIONS

OPTIMIZANDO ALGORITMOS  
ALGEBRAICOS UTILIZANDO  
INTELIGENCIA ARTIFICIAL

RECONSTRUCTION OF UNIVARIATE  
FUNCTIONS FROM DIRECTIONAL  
PERSISTENCE...

FORMALIZACIÓN DE ÁLGEBRA  
COMPUTACIONAL EN  
DEMOSTRADORES INTERACTIVOS...

EL RESOLVEDOR DESCARTES ES  
CUASI-ÓPTIMO EN MEDIA

MARTES, 23 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

## Optimizando algoritmos algebraicos utilizando Inteligencia Artificial

TERESO DEL RÍO, MATTHEW ENGLAND

Centre of Computer Science and Mathematical Modelling, Coventry University

[teresodra@gmail.com](mailto:teresodra@gmail.com)

**Resumen:** Los modelos de inteligencia artificial son estocásticos por naturaleza, y por tanto parecen inservibles para obtener resultados exactos como los que proporcionan los algoritmos algebraicos.

Sin embargo, los algoritmos algebraicos toman múltiples decisiones que no afectan a la validez del resultado, como por ejemplo el orden monomial.

Heurísticas creadas por expertos se suelen utilizar para tomar estas decisiones. Sin embargo, los modelos de inteligencia artificial han sido capaces de superar a los expertos en casi todas las áreas imaginables, y eso no es distinto en el tema que nos incumbe [2]. En esta charla veremos cómo los modelos de inteligencia artificial se pueden entrenar para tomar estas decisiones.

Esta charla servirá como resumen de mi tesis, durante la cual he trabajado en diseñar formas de elegir un buen orden de variables para el algoritmo de Descomposición Cilíndrica Algebraica propuesto por Collins en 1975 [1]. Al comienzo de mi tesis propuse una heurística para elegir el orden de variables, luego trabajé en entrenar modelos de inteligencia artificial para tomar estas decisiones y finalmente extraje, utilizando técnicas de interpretación de modelos, heurísticas simples a partir de modelos de inteligencia artificial complejos.

### Referencias

- [1] G. E. Collins (1975). Quantifier Elimination for Real Closed Fields by Cylindrical Algebraic Decomposition. Lecture Notes in Computer Science, Automata Theory and Formal Languages 134-183, <https://doi.org/10.1007/3-540-07407-417>
- [2] Z. Huang, M. England, D. Wilson, J. Davenport, L. Paulson, J. Bridge (2014). Applying ML to Choosing a Heuristic to Select the Variable Ordering for CAD. Springer, vol. 8543 LNAI, 92-107, [https://doi.org/10.1007/978-3-319-08434-3\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-319-08434-3_8)

**Agradecimientos:** El investigador principal está financiado por Coventry University y puede asistir al congreso gracias al apoyo de la Red EACA.

MARTES, 23 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

SESIÓN ESPECIAL 9  
Álgebra Computacional y  
Aplicaciones

EL PROBLEMA DE LA  
SUPRAYECTIVIDAD DE UNA  
PARAMETRIZACIÓN

QUANTUM ERROR-CORRECTING  
CODES CONSTRUCTED FROM TRACE-  
DEPENDENT POLYNOMIALS

POSITIVE ZEROS OF PARAMETRIC  
POLYNOMIAL FAMILIES FROM  
REACTION NETWORKS

ALGORITMOS PARA LA COMPUTACIÓN  
DEL IDEAL DEL REES DE IDEALES  
MONOMIALES...

CASTELNUOVO-MUMFORD  
REGULARITY OF PROJECTIVE  
MONOMIAL CURVES, SUMSETS...

MULTIGRADED CASTELNUOVO-  
MUMFORD REGULARITY AND  
MULTIGENERIC INITIAL IDEALS

CONSTRUCTION AND MANIPULATION  
OF BIRATIONAL TRILINEAR VOLUMES

AN ALGORITHM TO COMPUTE  
RATIONAL FIRST INTEGRALS OF  
POLYNOMIAL FOLIATIONS

OPTIMIZANDO ALGORITMOS  
ALGEBRAICOS UTILIZANDO  
INTELIGENCIA ARTIFICIAL

RECONSTRUCTION OF UNIVARIATE  
FUNCTIONS FROM DIRECTIONAL  
PERSISTENCE...

FORMALIZACIÓN DE ÁLGEBRA  
COMPUTACIONAL EN  
DEMOSTRADORES INTERACTIVOS...

EL RESOLVEDOR DESCARTES ES  
QUASI-ÓPTIMO EN MEDIA

## Reconstruction of univariate functions from directional persistence diagrams

AINA FERRÀ MARCÚS, CARLES CASACUBERTA, ORIOL PUJOL

Departament de Matemàtiques i Informàtica, Univeristat de Barcelona

[aina.ferra.marcus@ub.edu](mailto:aina.ferra.marcus@ub.edu)

**Abstract:** Persistent homology computes topological features of a space at different spatial resolutions. More precisely, the persistent homology transform is a function on the sphere  $S^{d-1}$  that associates to each unit vector  $v$  the persistence diagram of sublevel sets of a finite geometric simplicial complex in the direction  $v$ . We study the inverse problem for  $d = 2$  in the case of single-variable functions  $f$ , namely, reconstructing the graph of  $f$  by using persistence diagrams of sublevel sets from height functions in different directions. We provide algorithms when  $f$  is piece-wise linear, where three directions suffice, and for the smooth case, where five directions are needed. The study is motivated by the use of topological data analysis (TDA) together with machine learning in the topic of explainability, more specifically, finding out which information from signals is discriminative for classification by a neural network. We will give an example where TDA is applied as a tool to preprocess electrocardiogram data to identify arrhythmia disease using neural networks and gain information about the classification problem.

SESIÓN ESPECIAL 9  
Álgebra Computacional y  
Aplicaciones

EL PROBLEMA DE LA  
SUPRAYECTIVIDAD DE UNA  
PARAMETRIZACIÓN

QUANTUM ERROR-CORRECTING  
CODES CONSTRUCTED FROM TRACE-  
DEPENDENT POLYNOMIALS

POSITIVE ZEROS OF PARAMETRIC  
POLYNOMIAL FAMILIES FROM  
REACTION NETWORKS

ALGORITMOS PARA LA COMPUTACIÓN  
DEL IDEAL DEL REES DE IDEALES  
MONOMIALES...

CASTELNUOVO-MUMFORD  
REGULARITY OF PROJECTIVE  
MONOMIAL CURVES, SUMSETS...

MULTIGRADED CASTELNUOVO-  
MUMFORD REGULARITY AND  
MULTIGENERIC INITIAL IDEALS

CONSTRUCTION AND MANIPULATION  
OF BIRATIONAL TRILINEAR VOLUMES

AN ALGORITHM TO COMPUTE  
RATIONAL FIRST INTEGRALS OF  
POLYNOMIAL FOLIATIONS

OPTIMIZANDO ALGORITMOS  
ALGEBRAICOS UTILIZANDO  
INTELIGENCIA ARTIFICIAL

RECONSTRUCTION OF UNIVARIATE  
FUNCTIONS FROM DIRECTIONAL  
PERSISTENCE...

FORMALIZACIÓN DE ÁLGEBRA  
COMPUTACIONAL EN  
DEMOSTRADORES INTERACTIVOS...

EL RESOLVEDOR DESCARTES ES  
CUASI-ÓPTIMO EN MEDIA

MARTES, 23 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

## Formalización de álgebra computacional en demostradores interactivos de teoremas

JOSE DIVASÓN, RENÉ THIEMANN, SEBASTIAAN JOOSTEN, AKIHISA YAMADA

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

[jose.divason@unirioja.es](mailto:jose.divason@unirioja.es)

**Resumen:** Los demostradores interactivos de teoremas nos ayudan a probar formalmente resultados matemáticos con un ordenador. A pesar de que existen desde hace décadas y de que en los últimos años están teniendo un crecimiento importante, son todavía unos grandes desconocidos para la gran mayoría de matemáticos. En esta charla presentaremos estos sistemas acercándolos a la figura del *matemático puro*, explicando la historia (pasado, presente y futuro), los fundamentos matemáticos subyacentes (lógicas, teorías de tipos, *etc.*), además de qué y cómo se puede demostrar con ellos, incidiendo en trabajos de álgebra computacional. En particular, se presentarán formalizaciones y generación de código verificado del algoritmo de reducción de bases de retículos LLL, el cálculo de la forma normal de Hermite y el algoritmo de factorización de polinomios de Berlekamp–Zassenhaus.

**Agradecimientos:** Ayuda PID2020-116641GB-I00 financiada por MCIN/AEI 10.13039/501100011033.

MARTES, 23 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 9  
Álgebra Computacional y  
Aplicaciones

EL PROBLEMA DE LA  
SUPRAYECTIVIDAD DE UNA  
PARAMETRIZACIÓN

QUANTUM ERROR-CORRECTING  
CODES CONSTRUCTED FROM TRACE-  
DEPENDENT POLYNOMIALS

POSITIVE ZEROS OF PARAMETRIC  
POLYNOMIAL FAMILIES FROM  
REACTION NETWORKS

ALGORITMOS PARA LA COMPUTACIÓN  
DEL IDEAL DEL REES DE IDEALES  
MONOMIALES...

CASTELNUOVO-MUMFORD  
REGULARITY OF PROJECTIVE  
MONOMIAL CURVES, SUMSETS...

MULTIGRADED CASTELNUOVO-  
MUMFORD REGULARITY AND  
MULTIGENERIC INITIAL IDEALS

CONSTRUCTION AND MANIPULATION  
OF BIRATIONAL TRILINEAR VOLUMES

AN ALGORITHM TO COMPUTE  
RATIONAL FIRST INTEGRALS OF  
POLYNOMIAL FOLIATIONS

OPTIMIZANDO ALGORITMOS  
ALGEBRAICOS UTILIZANDO  
INTELIGENCIA ARTIFICIAL

RECONSTRUCTION OF UNIVARIATE  
FUNCTIONS FROM DIRECTIONAL  
PERSISTENCE...

FORMALIZACIÓN DE ÁLGEBRA  
COMPUTACIONAL EN  
DEMOSTRADORES INTERACTIVOS...

EL RESOLVEDOR DESCARTES ES  
CUASI-ÓPTIMO EN MEDIA

## El Resolvedor Descartes es Cuasi-Óptimo en Media

JOSUÉ TONELLI-CUETO, ALPEREN A. ERGÜR, ELIAS TSIGARIDAD

Department of Applied Mathematics and Statistics, Johns Hopkins University

[josue.tonelli.cueto@bizkaia.eu](mailto:josue.tonelli.cueto@bizkaia.eu)

**Resumen:** El resolvedor DESCARTES es un algoritmo que usa la regla de signos de Descartes para aislar las raíces reales de un polinomio real. A pesar de que en la práctica es altamente eficiente, todos los análisis de complejidad de este algoritmo no han mostrado que este algoritmo sea más eficiente que otros resolvedores. Esto se debe a que los análisis de complejidad anteriores usaban el paradigma del peor caso. En esta charla, usando un paradigma de complejidad probabilístico, mostramos que el resolvedor DESCARTES es cuasi-óptimo en media (bajo hipótesis probabilísticas robustas). Esto provee así una justificación teórica para la eficiencia en la práctica del resolvedor DESCARTES.

**Agradecimientos:** Parcialmente financiado por una AMS-Simons Travel Grant 2023. Quisiera agradecer a Jazz G. Suchen por sus sugerencias a la hora de investigar y preparar la charla, y a Evgenia Lagoda por su apoyo moral.

MARTES, 23 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

SESIÓN ESPECIAL 9  
Álgebra Computacional y  
Aplicaciones

EL PROBLEMA DE LA  
SUPRAYECTIVIDAD DE UNA  
PARAMETRIZACIÓN

QUANTUM ERROR-CORRECTING  
CODES CONSTRUCTED FROM TRACE-  
DEPENDENT POLYNOMIALS

POSITIVE ZEROS OF PARAMETRIC  
POLYNOMIAL FAMILIES FROM  
REACTION NETWORKS

ALGORITMOS PARA LA COMPUTACIÓN  
DEL IDEAL DEL REES DE IDEALES  
MONOMIALES...

CASTELNUOVO-MUMFORD  
REGULARITY OF PROJECTIVE  
MONOMIAL CURVES, SUMSETS...

MULTIGRADED CASTELNUOVO-  
MUMFORD REGULARITY AND  
MULTIGENERIC INITIAL IDEALS

CONSTRUCTION AND MANIPULATION  
OF BIRATIONAL TRILINEAR VOLUMES

AN ALGORITHM TO COMPUTE  
RATIONAL FIRST INTEGRALS OF  
POLYNOMIAL FOLIATIONS

OPTIMIZANDO ALGORITMOS  
ALGEBRAICOS UTILIZANDO  
INTELIGENCIA ARTIFICIAL

RECONSTRUCTION OF UNIVARIATE  
FUNCTIONS FROM DIRECTIONAL  
PERSISTENCE...

FORMALIZACIÓN DE ÁLGEBRA  
COMPUTACIONAL EN  
DEMOSTRADORES INTERACTIVOS...

EL RESOLVEDOR DESCARTES ES  
CUASI-ÓPTIMO EN MEDIA

## SESIÓN ESPECIAL 10

### Red Española de Topología

#### Organizadores:

**ENRIQUE ARTAL**  
(Universidad de Zaragoza)

**RAQUEL DÍAZ**  
(Universidad Complutense de Madrid)

**ANTONIO VIRUEL**  
(Universidad de Málaga)

#### Descripción:

La Red Española de Topología incorpora a investigadores/as en materias donde la topología juega un papel esencial. Esta sesión pretende ser un escaparate de algunas de las muchas líneas de investigación que miembros de la RET llevan a cabo en la actualidad. Tienen cabida desde áreas tan aplicadas como el análisis topológico de datos, hasta temáticas tan conceptuales como las infinito-categorías, pasando por disciplinas más clásicas como la teoría de homotopía, de singularidades o la topología diferencial.

#### SESIÓN ESPECIAL 10 Red Española de Topología

INTERSECCIONES SINGULARES DE CUÁDRICAS COAXIALES

SOME QUESTIONS OVER TOPOLOGICAL DATA ANALYSIS WITH PERSISTENT HOMOLOGY

COMPUTATIONAL TOPOLOGY TO MEASURE THE QUALITY OF TRAINING DATA

TOPOLOGÍA DE GÉRMENES DE APLICACIÓN DE TIPO PLIEGUE DE  $R^3$  A  $R^5$

UNA GENERALIZACIÓN A DIMENSIÓN TRES DE LA DESCOMPOSICIÓN SECTORIAL...

SUCESIONES Y TRENZAS DE GYSIN

ON THE COHOMOLOGY OF SPACES OF NON-SINGULAR ALMOST-COMPLEX HYPERSURFACES

ESFERAS DE HOMOLOGÍA HIPERBÓLICAS CON GÉNERO DE HEGGAARD ARBITRARIAMENTE...

LA TEORÍA DE MORITA DERIVADA

¡TODAS LAS TEORÍAS DE HOMOTOPÍA RACIONAL SON COMPATIBLES!

ASPECTOS GEOMÉTRICOS Y TOPOLÓGICOS DE NILVARIETADES

SISTEMAS DE FUSIÓN SOBRE GRUPOS P-TORALES DISCRETOS

## Intersecciones singulares de cuádricas coaxiales

ENRIQUE ARTAL, SANTIAGO LÓPEZ DE MEDRANO, MARÍA TERESA LOZANO

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza

[artal@unizar.es](mailto:artal@unizar.es)

**Resumen:** En una serie de trabajos que incluyen un libro reciente, Santiago López de Medrano ha realizado un intensivo estudio de las intersecciones transversas de cuádricas (reales y en ocasiones complejas), especialmente de su topología. En este trabajo estudiamos los casos de intersecciones singulares con especial atención a las singularidades más sencillas, a las que llamamos genéricas. Definimos los alisamientos de estas intersecciones y los estudiamos en algunos casos especialmente interesante en dimensión 3. Es un trabajo conjunto con Santiago López de Medrano y María Teresa Lozano.

SESIÓN ESPECIAL 10  
Red Española de Topología

INTERSECCIONES SINGULARES DE  
CUÁDRICAS COAXIALES

SOME QUESTIONS OVER  
TOPOLOGICAL DATA ANALYSIS WITH  
PERSISTENT HOMOLOGY

COMPUTATIONAL TOPOLOGY TO  
MEASURE THE QUALITY OF TRAINING  
DATA

TOPOLOGÍA DE GÉRMENES DE  
APLICACIÓN DE TIPO PLIEGUE DE  
R<sup>3</sup> A R<sup>5</sup>

UNA GENERALIZACIÓN A DIMENSIÓN  
TRES DE LA DESCOMPOSICIÓN  
SECTORIAL...

SUCESIONES Y TRENZAS DE GYSIN

ON THE COHOMOLOGY OF SPACES OF  
NON-SINGULAR ALMOST-COMPLEX  
HYPERSURFACES

ESFERAS DE HOMOLOGÍA  
HIPERBÓLICAS CON GÉNERO DE  
HEEGAARD ARBITRARIAMENTE...

LA TEORÍA DE MORITA DERIVADA

¡TODAS LAS TEORÍAS DE HOMOTOPÍA  
RACIONAL SON COMPATIBLES!

ASPECTOS GEOMÉTRICOS Y  
TOPOLÓGICOS DE NILVARIETADES

SISTEMAS DE FUSIÓN SOBRE GRUPOS  
P-TORALES DISCRETOS

LUNES, 22 DE ENERO:  
16:00 – 16:30



## Some questions over topological data analysis with persistent homology

SERGIO ARDANZA-TREVIJANO

Departamento de Física y Matemática Aplicada, Universidad de Navarra

[sardanza@unav.es](mailto:sardanza@unav.es)

**Abstract:** During the past decade persistent homology has been successfully used to extract insights from data in different areas of Science. Topological data analysis using persistent homology is a multi-step process. First, a filtered simplicial complex is constructed from the original data and its persistent homology is computed. The output of this step is a persistent diagram or barcode. Then some kind of vectorization of the persistent diagram is obtained. Finally a statistical/machine learning analysis is performed. There are many possible choices for each of these steps. We will show some implications of these choices and how the aggregation of the information obtained gives a better insight into questions motivated by the analyzed data.

SESIÓN ESPECIAL 10  
Red Española de Topología

INTERSECCIONES SINGULARES DE  
CUÁDRICAS COAXIALES

SOME QUESTIONS OVER  
TOPOLOGICAL DATA ANALYSIS WITH  
PERSISTENT HOMOLOGY

COMPUTATIONAL TOPOLOGY TO  
MEASURE THE QUALITY OF TRAINING  
DATA

TOPOLOGÍA DE GÉRMENES DE  
APLICACIÓN DE TIPO PLIEGUE DE  
 $\mathbb{R}^3$  A  $\mathbb{R}^5$

UNA GENERALIZACIÓN A DIMENSIÓN  
TRES DE LA DESCOMPOSICIÓN  
SECTORIAL...

SUCESIONES Y TRENZAS DE GYSIN

ON THE COHOMOLOGY OF SPACES OF  
NON-SINGULAR ALMOST-COMPLEX  
HYPERSURFACES

ESFERAS DE HOMOLOGÍA  
HIPERBÓLICAS CON GÉNERO DE  
HEEGAARD ARBITRARIAMENTE...

LA TEORÍA DE MORITA DERIVADA

¡TODAS LAS TEORÍAS DE HOMOTOPÍA  
RACIONAL SON COMPATIBLES!

ASPECTOS GEOMÉTRICOS Y  
TOPOLÓGICOS DE NILVARIETADES

SISTEMAS DE FUSIÓN SOBRE GRUPOS  
P-TORALES DISCRETOS

LUNES, 22 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

## Computational Topology to Measure the Quality of Training Data

ROCÍO GONZÁLEZ-DÍAZ, ÁLVARO TORRAS-CASAS, EDUARDO PALUZO-HIDALGO

Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla

[rogodi@us.es](mailto:rogodi@us.es)

**Abstract:** Current deep learning models take a substantial amount of data and computational resources and training processes can take months to complete due to, in part, the size of the datasets used to train them. Furthermore, the training data used to feed the model influences performance, for example, inducing biases that can affect AI applications in social use cases. In this way, data quality aims to measure the degree to which data provide enough information to the model for a specific task. In [1], we introduce the new concept of  $k$ -dimensional topological quality, which is based on partial matching between persistence modules that are built on the persistent homology of the Vietoris-Rips filtration computed from the dataset. We propose to use this new concept to explain when and why a small training dataset generalizes well.

Specifically, our study is done for the case of finite point clouds  $X$  and  $Y$  together with an inclusion  $f : X \hookrightarrow Y$ . We compute the induced morphism between their respective persistent homologies  $\text{PH}_k(X)$  and  $\text{PH}_k(Y)$ . Our topological quality indicator is based on the block function  $\mathcal{M}_f$  that relates the barcodes (i.e., the interval decompositions of  $\text{PH}_k(X)$  and  $\text{PH}_k(Y)$ ) by relying on the inclusion  $f$ .

### Referencias

- [1] A.Torras-Casas, E. Paluzo-Hidalgo, R. Gonzalez-Diaz (2023). A Topological Approach to Measuring Training Data Quality, arXiv eprint 2306.02411

LUNES, 22 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 10  
Red Española de Topología

INTERSECCIONES SINGULARES DE  
CUÁDRICAS COAXIALES

SOME QUESTIONS OVER  
TOPOLOGICAL DATA ANALYSIS WITH  
PERSISTENT HOMOLOGY

COMPUTATIONAL TOPOLOGY TO  
MEASURE THE QUALITY OF TRAINING  
DATA

TOPOLOGÍA DE GÉRMINES DE  
APLICACIÓN DE TIPO PLEGUE DE  
R3 A R5

UNA GENERALIZACIÓN A DIMENSIÓN  
TRES DE LA DESCOMPOSICIÓN  
SECTORIAL...

SUCESIONES Y TRENZAS DE GYSIN

ON THE COHOMOLOGY OF SPACES OF  
NON-SINGULAR ALMOST-COMPLEX  
HYPERSURFACES

ESFERAS DE HOMOLOGÍA  
HIPERBÓLICAS CON GÉNERO DE  
HEGAARD ARBITRARIAMENTE...

LA TEORÍA DE MORITA DERIVADA

¡TODAS LAS TEORÍAS DE HOMOTOPIA  
RACIONAL SON COMPATIBLES!

ASPECTOS GEOMÉTRICOS Y  
TOPOLÓGICOS DE NILVARIETADES

SISTEMAS DE FUSIÓN SOBRE GRUPOS  
P-TORALES DISCRETOS

## Topología de gérmenes de aplicación de tipo pliegue de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^5$

JUAN ANTONIO MOYA PÉREZ, JUAN JOSÉ NUÑO BALLESTEROS

Departamento de Matemáticas, Universitat de València

[juan.moya@uv.es](mailto:juan.moya@uv.es)

**Resumen:** Sea  $f: (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^5, 0)$  un germen de aplicación analítico con inestabilidad aislada. Definimos su link como la aplicación estable obtenida intersectando la imagen de  $f$  con una 4-esfera suficientemente pequeña  $S^4$  centrada en el origen en  $\mathbb{R}^5$ . Si  $f$  es de tipo pliegue, definimos un árbol etiquetado que codifica toda la topología de su link y probamos que se trata de un invariante topológico completo. Como aplicación obtenemos la clasificación topológica de los gérmenes de la  $\mathcal{A}^2$ -clase  $(x, y, z^2, xz, 0)$ .

Este es un trabajo conjunto con Juan José Nuño Ballesteros.

SESIÓN ESPECIAL 10  
Red Española de Topología

INTERSECCIONES SINGULARES DE CUÁDRICAS COAXIALES

SOME QUESTIONS OVER TOPOLOGICAL DATA ANALYSIS WITH PERSISTENT HOMOLOGY

COMPUTATIONAL TOPOLOGY TO MEASURE THE QUALITY OF TRAINING DATA

TOPOLOGÍA DE GÉRMINES DE APLICACIÓN DE TIPO PLIEGUE DE  $\mathbb{R}^3$  A  $\mathbb{R}^5$

UNA GENERALIZACIÓN A DIMENSIÓN TRES DE LA DESCOMPOSICIÓN SECTORIAL...

SUCESIONES Y TRENZAS DE GYSIN

ON THE COHOMOLOGY OF SPACES OF NON-SINGULAR ALMOST-COMPLEX HYPERSURFACES

ESFERAS DE HOMOLOGÍA HIPERBÓLICAS CON GÉNERO DE HEGAARD ARBITRARIAMENTE...

LA TEORÍA DE MORITA DERIVADA

¡TODAS LAS TEORÍAS DE HOMOTOPIA RACIONAL SON COMPATIBLES!

ASPECTOS GEOMÉTRICOS Y TOPOLÓGICOS DE NILVARIETADES

SISTEMAS DE FUSIÓN SOBRE GRUPOS P-TORALES DISCRETOS

LUNES, 22 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

## Una generalización a dimensión tres de la descomposición sectorial de Poincaré para campos de vectores planos

CLEMENTA ALONSO-GONZÁLEZ, FERNANDO SANZ SÁNCHEZ

Departamento de Matemáticas, Universidad de Alicante

[clementa.alonso@ua.es](mailto:clementa.alonso@ua.es)

**Resumen:** Sea  $\xi$  un campo de vectores analítico en  $\mathbb{R}^3$  con una singularidad aislada en el origen y teniendo únicamente singularidades de tipo hiperbólico tras una reducción de singularidades  $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ . En esta charla presentaremos un resultado en el que se establece una descomposición de la dinámica de  $\xi$  alrededor del origen, generalizando a dimensión tres el teorema clásico de Poincaré sobre la descomposición en sectores elípticos, hiperbólicos y parabólicos de la dinámica de campos de vectores en el plano. Este es un trabajo en colaboración con Fernando Sanz Sánchez (Universidad de Valladolid).

### Referencias

- [1] C. Alonso-González, F. Sanz Sánchez (2023). Stratification of three-dimensional real flows I: Fitting domains, *Journal of Differential Equations*, 361, 40-96.
- [2] C. Alonso-González, F. Sanz Sánchez, Stratification of three-dimensional real flows II: A generalization of Poincaré's planar sectorial decomposition. Preprint: <https://arxiv.org/abs/2306.15822>

MARTES, 23 DE ENERO:  
11:30 – 12:0

SESIÓN ESPECIAL 10  
Red Española de Topología

INTERSECCIONES SINGULARES DE CUÁDRICAS COAXIALES

SOME QUESTIONS OVER TOPOLOGICAL DATA ANALYSIS WITH PERSISTENT HOMOLOGY

COMPUTATIONAL TOPOLOGY TO MEASURE THE QUALITY OF TRAINING DATA

TOPOLOGÍA DE GÉRMENES DE APLICACIÓN DE TIPO PLIEGUE DE  $\mathbb{R}^3$  A  $\mathbb{R}^5$

UNA GENERALIZACIÓN A DIMENSIÓN TRES DE LA DESCOMPOSICIÓN SECTORIAL...

SUCESIONES Y TRENZAS DE GYSIN

ON THE COHOMOLOGY OF SPACES OF NON-SINGULAR ALMOST-COMPLEX HYPERSURFACES

ESFERAS DE HOMOLOGÍA HIPERBÓLICAS CON GÉNERO DE HEGGAARD ARBITRARIAMENTE...

LA TEORÍA DE MORITA DERIVADA

¿TODAS LAS TEORÍAS DE HOMOTOPIA RACIONAL SON COMPATIBLES!

ASPECTOS GEOMÉTRICOS Y TOPOLÓGICOS DE NILVARIETADES

SISTEMAS DE FUSIÓN SOBRE GRUPOS P-TORALES DISCRETOS

## Sucesiones y trenzas de Gysin

JOSÉ IGNACIO ROYO PRIETO, MARTINTXO SARALEGI-ARANGUREN

Departamento de Matemáticas, Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea UPV/EHU

[joseignacio.royo@ehu.eus](mailto:joseignacio.royo@ehu.eus)

**Resumen:** La clásica *sucesión exacta larga de Gysin* aparece en el contexto de un fibrado con fibra esférica, y describe la relación entre la cohomología de la base y la del espacio total. Es el caso, por ejemplo, de que  $\mathbb{S}^1$  o  $\mathbb{S}^3$  actúen libremente sobre una variedad, siendo la base el espacio de órbitas. Si esta acción deja de ser libre, la situación torna a más compleja, ya que aparecen diferentes estratos que impiden que el espacio de órbitas sea una variedad, y dejamos de tener la estructura de fibrado. Sin embargo, las órbitas de la acción definen una foliación cuya *cohomología básica* ha demostrado ser un sustituto adaptado y rico de la cohomología de la base. Para estas acciones con singularidades también se tiene una sucesión de Gysin que relaciona la cohomología de la variedad y la cohomología básica (ver [1, 2]), y donde pueden aparecer nuevos términos que dependen de la geometría de la acción. Si introducimos además la *cohomología de intersección* obtenemos nuevas sucesiones que se relacionan formando una trenza exacta [3].

### Referencias

- [1] G. Hector, M. Saralegi-Aranguren (1993). Intersection cohomology of  $\mathbb{S}^1$ -actions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 338, no.1, 263–288.
- [2] J.I. Royo Prieto, M. Saralegi-Aranguren (2013). The Gysin sequence for  $\mathbb{S}^3$ -actions on manifolds. *Publ. Math. Debrecen* 83, no. 3, 275–289.
- [3] J.I. Royo Prieto, M. Saralegi-Aranguren, The Gysin braid for  $\mathbb{S}^3$ -actions on manifolds. [arXiv:2301.09002](https://arxiv.org/abs/2301.09002)

MARTES, 23 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

SESIÓN ESPECIAL 10  
Red Española de Topología

INTERSECCIONES SINGULARES DE  
CUÁDRICAS COAXIALES

SOME QUESTIONS OVER  
TOPOLOGICAL DATA ANALYSIS WITH  
PERSISTENT HOMOLOGY

COMPUTATIONAL TOPOLOGY TO  
MEASURE THE QUALITY OF TRAINING  
DATA

TOPOLOGÍA DE GÉRMENES DE  
APLICACIÓN DE TIPO PLEGUE DE  
R3 A R5

UNA GENERALIZACIÓN A DIMENSIÓN  
TRES DE LA DESCOMPOSICIÓN  
SECTORIAL...

SUCESIONES Y TRENZAS DE GYSIN

ON THE COHOMOLOGY OF SPACES OF  
NON-SINGULAR ALMOST-COMPLEX  
HYPERSURFACES

ESPERAS DE HOMOLOGÍA  
HIPERBÓLICAS CON GÉNERO DE  
HEGAARD ARBITRARIAMENTE...

LA TEORÍA DE MORITA DERIVADA

¡TODAS LAS TEORÍAS DE HOMOTOPÍA  
RACIONAL SON COMPATIBLES!

ASPECTOS GEOMÉTRICOS Y  
TOPOLÓGICOS DE NILVARIETADES

SISTEMAS DE FUSIÓN SOBRE GRUPOS  
P-TORALES DISCRETOS

## On the cohomology of spaces of non-singular almost-complex hypersurfaces

FEDERICO CANTERO, ÁNGEL ALONSO

Departamento Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid

[federico.j.cantero@gmail.com](mailto:federico.j.cantero@gmail.com)

**Abstract:** Twenty years ago, Peters and Steenbrink found that the cohomology of the space of non-singular projective hypersurfaces of degree at least 3 contains a copy of the cohomology of a general linear group. In this talk we will extend their result to the space of almost-complex hypersurfaces, while recovering theirs with different methods coming from rational homotopy theory. This is a joint work with Ángel Alonso (U. Graz).

SESIÓN ESPECIAL 10  
Red Española de Topología

INTERSECCIONES SINGULARES DE CUÁDRICAS COAXIALES

SOME QUESTIONS OVER TOPOLOGICAL DATA ANALYSIS WITH PERSISTENT HOMOLOGY

COMPUTATIONAL TOPOLOGY TO MEASURE THE QUALITY OF TRAINING DATA

TOPOLOGÍA DE GÉRMINES DE APLICACIÓN DE TIPO PLIEGUE DE  $R^3$  A  $R^5$

UNA GENERALIZACIÓN A DIMENSIÓN TRES DE LA DESCOMPOSICIÓN SECTORIAL...

SUCESIONES Y TRENZAS DE GYSIN

ON THE COHOMOLOGY OF SPACES OF NON-SINGULAR ALMOST-COMPLEX HYPERSURFACES

ESFERAS DE HOMOLOGÍA HIPERBÓLICAS CON GÉNERO DE HEGGAARD ARBITRARIAMENTE...

LA TEORÍA DE MORITA DERIVADA

¡TODAS LAS TEORÍAS DE HOMOTOPÍA RACIONAL SON COMPATIBLES!

ASPECTOS GEOMÉTRICOS Y TOPOLÓGICOS DE NILVARIETADES

SISTEMAS DE FUSIÓN SOBRE GRUPOS P-TORALES DISCRETOS

MARTES, 23 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

## Esferas de homología hiperbólicas con género de Heegaard arbitrariamente grande

RAQUEL DÍAZ, JOSÉ LUIS ESTÉVEZ

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad Complutense

[radiaz@mat.ucm.es](mailto:radiaz@mat.ucm.es)

**Resumen:** Las esferas de homología son 3-variedades que tienen la misma homología que la esfera tridimensional, y su existencia motivó la creación del concepto de grupo fundamental por parte de Poincaré y la formulación de su famosa conjetura a principios del siglo XX. En la década de los 70 las ideas de Thurston revolucionaron el área de la topología de dimensión 3, dando lugar al estudio de estructuras geométricas, principalmente la geometría hiperbólica, en las 3-variedades.

Las esferas de homología hiperbólica son muy abundantes y en la literatura se han dado varias construcciones que muestran sus propiedades diversas. En esta charla incidimos en la misma idea, dando una construcción explícita de una familia de esferas de homología hiperbólicas con género de Heegaard arbitrariamente grande. La construcción se lleva a cabo a partir de enlaces hiperbólicos de los que se mantiene un buen control de su poliedro-dominio fundamental.

Este es un trabajo conjunto con José Luis Estévez de la UNED.

MARTES, 23 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

SESIÓN ESPECIAL 10  
Red Española de Topología

INTERSECCIONES SINGULARES DE CUÁDRICAS COAXIALES

SOME QUESTIONS OVER TOPOLOGICAL DATA ANALYSIS WITH PERSISTENT HOMOLOGY

COMPUTATIONAL TOPOLOGY TO MEASURE THE QUALITY OF TRAINING DATA

TOPOLOGÍA DE GÉRMENES DE APLICACIÓN DE TIPO PLIEGUE DE  $R^3$  A  $R^5$

UNA GENERALIZACIÓN A DIMENSIÓN TRES DE LA DESCOMPOSICIÓN SECTORIAL...

SUCESIONES Y TRENZAS DE GYSIN

ON THE COHOMOLOGY OF SPACES OF NON-SINGULAR ALMOST-COMPLEX HYPERSURFACES

ESFERAS DE HOMOLOGÍA HIPERBÓLICAS CON GÉNERO DE HEEGAARD ARBITRARIAMENTE...

LA TEORÍA DE MORITA DERIVADA

¡TODAS LAS TEORÍAS DE HOMOTOPÍA RACIONAL SON COMPATIBLES!

ASPECTOS GEOMÉTRICOS Y TOPOLÓGICOS DE NILVARIETADES

SISTEMAS DE FUSIÓN SOBRE GRUPOS P-TORALES DISCRETOS

## La teoría de Morita derivada

VICTOR CARMONA

Max-Planck Institute Leipzig, Alemania

[vcarmona1@us.es](mailto:vcarmona1@us.es)

**Resumen:** ¿Hasta qué punto una equivalencia de categorías de módulos a derecha  $Mod-R \simeq Mod-S$  relaciona los anillos  $R$  y  $S$ ? K. Morita resolvió esta pregunta y caracterizó cuando  $R$  y  $S$  tienen categorías de módulos equivalentes. Sorprendentemente, muchos invariantes de anillos son realmente “invariantes de Morita” (moralmente, se pueden construir a partir de la categoría de módulos, sin hacer referencia al anillo) y esta es una de las razones que indican la utilidad de esta noción. Un ejemplo sencillo es el centro del anillo,  $Z(R)$ , y de la invariancia de Morita del centro se deduce directamente: dos anillos conmutativos  $A$  y  $B$  son isomorfos sí, y sólo si,  $Mod-A \simeq Mod-B$ . Nótese como esto es la primera parada hacia la geometría no-conmutativa.

Las ideas de Morita, lejos de quedarse ahí y aplicarse exclusivamente al álgebra (no conmutativa), han sido ampliamente generalizadas y empleadas en contextos más generales. Por ejemplo, los “tilting complexes” de J. Rickard responden a la pregunta que resulta al sustituir las categorías de módulos,  $Mod-R$  y  $Mod-S$ , por categorías derivadas,  $D(R)$  y  $D(S)$ . Más generalmente, y de manera extremadamente poco precisa, podemos pensar en “teoría de Morita como la respuesta a la pregunta: Dados dos objetos  $O$  y  $O'$  (e.g. espectros anillos, dg-categorías...), ¿cuánta información podemos extraer de una equivalencia entre sus representaciones  $Rep-O \simeq Rep-O'$ ? En términos homotópicos, lo que queremos es estudiar la teoría de homotopía de los objetos  $\{O, O' \dots\}$  con respecto a los morfismos que inducen equivalencias entre sus representaciones (equivalencias débiles).

En esta charla: (i) repasaremos las ideas fundamentales de la teoría de Morita, aplicaciones importantes de la misma en álgebra homotópica y teoría de dg-categorías; (ii) explicaremos cómo entender dicha teoría a partir de la teoría de homotopía de Dwyer-Kan, dando una nueva construcción de esta última; y (iii) exploraremos nuevos resultados derivados de una versión general, y ahora precisa, de la teoría de Morita. La vaguedad en los últimos enunciados se debe a que esta charla está basada en trabajo en curso (en parte con J.J. Gutiérrez).

MARTES, 23 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

SESIÓN ESPECIAL 10  
Red Española de Topología

INTERSECCIONES SINGULARES DE  
CUÁDRICAS COAXIALES

SOME QUESTIONS OVER  
TOPOLOGICAL DATA ANALYSIS WITH  
PERSISTENT HOMOLOGY

COMPUTATIONAL TOPOLOGY TO  
MEASURE THE QUALITY OF TRAINING  
DATA

TOPOLOGÍA DE GÉRMENES DE  
APLICACIÓN DE TIPO PLIEGUE DE  
R3 A R5

UNA GENERALIZACIÓN A DIMENSIÓN  
TRES DE LA DESCOMPOSICIÓN  
SECTORIAL...

SUCESIONES Y TRENZAS DE GYSIN

ON THE COHOMOLOGY OF SPACES OF  
NON-SINGULAR ALMOST-COMPLEX  
HYPERSURFACES

ESPERAS DE HOMOLOGÍA  
HIPERBÓLICAS CON GÉNERO DE  
HEGAARD ARBITRARIAMENTE...

LA TEORÍA DE MORITA DERIVADA

¿TODAS LAS TEORÍAS DE HOMOTOPÍA  
RACIONAL SON COMPATIBLES!

ASPECTOS GEOMÉTRICOS Y  
TOPOLÓGICOS DE NILVARIETADES

SISTEMAS DE FUSIÓN SOBRE GRUPOS  
P-TORALES DISCRETOS



## ¡Todas las teorías de homotopía racional son compatibles!

MARIO FUENTES

CIMAT Mérida, México

[mfr300@gmail.com](mailto:mfr300@gmail.com)

**Resumen:** La teoría de homotopía racional ofrece dos enfoques principales para modelar el tipo de homotopía racional de un espacio simplemente conexo: los modelos de Sullivan, basados en álgebras conmutativas, y los modelos de Quillen, basados en álgebras de Lie. Cuando se trata de un espacio de tipo finito, es posible transformar el modelo de Quillen, un álgebra de Lie, en un álgebra conmutativa. Esto plantea la pregunta de si el álgebra conmutativa resultante es un modelo de Sullivan, o, inversamente, si tomar el álgebra de Lie dual de un modelo de Sullivan nos da un modelo de Quillen.

Estas preguntas equivalentes, formuladas por Baues y Lemaire, fueron respondidas de manera positiva por Martin Majewski. En esta charla, presentamos una prueba alternativa basada en un nuevo enfoque de la teoría de homotopía racional utilizando álgebras de Lie completas. Esta nueva teoría permite el estudio de espacios no simplemente conexos e incluso no conexos. No obstante, en el caso de espacios simplemente conexos, demostramos que este nuevo funtor coincide con el funtor realización de Quillen. Esta compatibilidad entre ambas teorías tiene diversas consecuencias, entre ellas, la conjetura de Baues y Lemaire.

MARTES, 23 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 10  
Red Española de Topología

INTERSECCIONES SINGULARES DE  
CUÁDRICAS COAXIALES

SOME QUESTIONS OVER  
TOPOLOGICAL DATA ANALYSIS WITH  
PERSISTENT HOMOLOGY

COMPUTATIONAL TOPOLOGY TO  
MEASURE THE QUALITY OF TRAINING  
DATA

TOPOLOGÍA DE GÉRMENES DE  
APLICACIÓN DE TIPO PLIEGUE DE  
R<sup>3</sup> A R<sup>5</sup>

UNA GENERALIZACIÓN A DIMENSIÓN  
TRES DE LA DESCOMPOSICIÓN  
SECTORIAL...

SUCESIONES Y TRENZAS DE GYSIN

ON THE COHOMOLOGY OF SPACES OF  
NON-SINGULAR ALMOST-COMPLEX  
HYPERSURFACES

ESFERAS DE HOMOLOGÍA  
HIPERBÓLICAS CON GÉNERO DE  
HEGAARD ARBITRARIAMENTE...

LA TEORÍA DE MORITA DERIVADA

¡TODAS LAS TEORÍAS DE HOMOTOPÍA  
RACIONAL SON COMPATIBLES!

ASPECTOS GEOMÉTRICOS Y  
TOPOLÓGICOS DE NILVARIETADES

SISTEMAS DE FUSIÓN SOBRE GRUPOS  
P-TORALES DISCRETOS

## Aspectos geométricos y topológicos de nilvariedades

RAQUEL VILLACAMPA

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza (IUMA)

[raquelvg@unizar.es](mailto:raquelvg@unizar.es)

**Resumen:** Las nilvariedades son un tipo especial de variedades diferenciables compactas que se definen como el cociente de un grupo de Lie nilpotente simplemente conexo por un subgrupo discreto maximal.

Desde que Thurston en 1976 mostrara a través de una nilvariedad el primer ejemplo de una variedad compacta compleja simpléctica que no era Kähler, han sido muchas las cuestiones geométricas y topológicas a las que las nilvariedades han dado respuesta. En esta charla mostraremos algunos de estos problemas que pasan por el estudio de la holonomía de determinadas conexiones métricas, deformaciones de estructuras o sucesiones espectrales.

MARTES, 23 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 10  
Red Española de Topología

INTERSECCIONES SINGULARES DE  
CUÁDRICAS COAXIALES

SOME QUESTIONS OVER  
TOPOLOGICAL DATA ANALYSIS WITH  
PERSISTENT HOMOLOGY

COMPUTATIONAL TOPOLOGY TO  
MEASURE THE QUALITY OF TRAINING  
DATA

TOPOLOGÍA DE GÉRMENES DE  
APLICACIÓN DE TIPO PLIEGUE DE  
 $\mathbb{R}^3$  A  $\mathbb{R}^5$

UNA GENERALIZACIÓN A DIMENSIÓN  
TRES DE LA DESCOMPOSICIÓN  
SECTORIAL...

SUCESIONES Y TRENZAS DE GYSIN

ON THE COHOMOLOGY OF SPACES OF  
NON-SINGULAR ALMOST-COMPLEX  
HYPERSURFACES

ESFERAS DE HOMOLOGÍA  
HIPERBÓLICAS CON GÉNERO DE  
HEEGAARD ARBITRARIAMENTE...

LA TEORÍA DE MORITA DERIVADA

¡TODAS LAS TEORÍAS DE HOMOTOPIA  
RACIONAL SON COMPATIBLES!

ASPECTOS GEOMÉTRICOS Y  
TOPOLÓGICOS DE NILVARIIDADES

SISTEMAS DE FUSIÓN SOBRE GRUPOS  
P-TORALES DISCRETOS

## Sistemas de fusión sobre grupos $p$ -torales discretos

CARLES BROTO, RAN LEVI, BOB OLIVER

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona

[broto@mat.uab.cat](mailto:broto@mat.uab.cat)

**Resumen:** Los sistemas de fusión abstractos sobre grupos  $p$ -torales discretos se definen en 2007 como generalización de los sistemas de fusión sobre  $p$ -grupos finitos introducidos por Puig en la década de los años 90. Se trata de modelar la estructura  $p$ -local de grupos de Lie compactos y espacios de lazos finitos. Describiremos brevemente este concepto y expondremos resultados recientes sobre realizabilidad de dichos sistemas abstractos como sistemas de fusión de grupos localmente finitos. Se trata de trabajo conjunto con Bob Oliver y Ran Levi.

SESIÓN ESPECIAL 10  
Red Española de Topología

INTERSECCIONES SINGULARES DE CUÁDRICAS COAXIALES

SOME QUESTIONS OVER TOPOLOGICAL DATA ANALYSIS WITH PERSISTENT HOMOLOGY

COMPUTATIONAL TOPOLOGY TO MEASURE THE QUALITY OF TRAINING DATA

TOPOLOGÍA DE GÉRMENES DE APLICACIÓN DE TIPO PLIEGUE DE  $R^3$  A  $R^5$

UNA GENERALIZACIÓN A DIMENSIÓN TRES DE LA DESCOMPOSICIÓN SECTORIAL...

SUCESIONES Y TRENZAS DE GYSIN

ON THE COHOMOLOGY OF SPACES OF NON-SINGULAR ALMOST-COMPLEX HYPERSURFACES

ESFERAS DE HOMOLOGÍA HIPERBÓLICAS CON GÉNERO DE HEGGAARD ARBITRARIAMENTE...

LA TEORÍA DE MORITA DERIVADA

¡TODAS LAS TEORÍAS DE HOMOTOPÍA RACIONAL SON COMPATIBLES!

ASPECTOS GEOMÉTRICOS Y TOPOLÓGICOS DE NILVARIETADES

SISTEMAS DE FUSIÓN SOBRE GRUPOS  $P$ -TORALES DISCRETOS

MARTES, 23 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

## SESIÓN ESPECIAL 11

### Análisis Geométrico

#### Organizadores:

**LUIS J. ALÍAS LINARES**  
 (Universidad de Murcia)

**FLORENT BALACHEFF**  
 (Universitat Autònoma de Barcelona)

**EDUARDO GARCÍA RÍO**  
 (Universidade de Santiago de Compostela)

#### Descripción:

El Análisis Geométrico se encuentra en la interacción entre la Geometría Diferencial y las Ecuaciones Diferenciales, y tiene aplicaciones en varias ramas de la matemática como la Geometría Riemanniana, la Topología y el Análisis Complejo, y con derivaciones en otros campos científicos (Relatividad General, Cristalografía, Ciencia de Materiales o Arquitectura). Así muchos problemas geométricos pueden formularse como problemas variacionales o como problemas sobre sistemas de ecuaciones diferenciales parciales. En la otra dirección, se puede obtener información importante sobre las soluciones de los problemas variacionales o de ecuaciones diferenciales a partir del conocimiento de la geometría subyacente. El objetivo de esta sesión es dar a conocer algunas contribuciones recientes de relevancia en la teoría así como proporcionar un foro de encuentro entre investigadores de distintos grupos de la Red Española de Análisis Geométrico.

#### SESIÓN ESPECIAL 11

##### Análisis Geométrico

FINSLER METRICS ON SYMMETRIC SPACES

HIPERSUPERFICIES COMPLEJAS HOLOMORFAS PSEUDOSIMÉTRICAS EN UN ESPACIO FORMA COMPLEJO

RIGIDEZ DE VARIETADES EINSTEIN PONDERADAS

ESTABILIDAD DE CILINDROS CAPILARES ENTRE VARIAS SUPERFICIES SOPORTE

GENERALIZANDO UN PROBLEMA DE S.T.YAU SOBRE EL ELIPSOIDE DE REVOLUCIÓN

SOLITONES DE RICCI COMO SUBVARIETADES DEL ESPACIO HIPERBÓLICO COMPLEJO

AREA-BASED SYMMETRIZATION AND FIRST DIRICHLET EIGENVALUE OF A GEODESIC BALL

CONSTRUCCIONES CONJUGADAS PARA H-SUPERFICIES EN  $H^2 \times \mathbb{R}$

¿CÓMO DEFINIR UN FLUJO POR LA CURVATURA MEDIA INVERSA PARA CRISTALES?

GRUPOS FUNDAMENTALES DE ESPACIOS RCD

STUDYING SYMMETRIC-LIKE PROPERTIES ON RIEMANNIAN MANIFOLDS VIA THE SPECTRUM...

STATIONARY SURFACES OF HEIGHT-DEPENDENT WEIGHTED AREA FUNCTIONALS

## Finsler metrics on symmetric spaces

JOAN PORTI, MICHAEL KAPOVICH, BERNHARD LEEB

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona

[joan.porti@uab.cat](mailto:joan.porti@uab.cat)

**Abstract:** Let  $X$  be a symmetric space of non-compact type, its sectional curvature is  $\leq 0$ . If  $X$  has rank  $r \geq 2$ , then it is said to be of higher rank and it contains flats of dimension  $r$ , in particular the sectional curvature vanishes for some directions.

We construct natural Finsler metrics on  $X$  associated to its structure of symmetric space, so that we recover the behavior of strictly negative curvature. We prove analog results of hyperbolic space in this setting.

### Referencias

- [1] M. Kapovich, B. Leeb, J. Porti (2017). Anosov subgroups: dynamical and geometric characterizations. *Eur. J. Math.* 3, no. 4, 808–898.
- [2] M. Kapovich, B. Leeb, J. Porti (2018). A Morse lemma for quasigeodesics in symmetric spaces and Euclidean buildings. *Geom. Topol.* 22, no. 7, 3827–3923.
- [3] M. Kapovich, B. Leeb (2018). Finsler bordifications of symmetric and certain locally symmetric spaces. *Geom. Topol.* 22, no. 5, 2533–2646.

LUNES, 22 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

SESIÓN ESPECIAL 11  
Análisis Geométrico

FINSLER METRICS ON SYMMETRIC SPACES

HIPERSUPERFICIES COMPLEJAS  
HOLOMORFAS PSEUDOSIMÉTRICAS EN  
UN ESPACIO FORMA COMPLEJO

RIGIDEZ DE VARIETADES EINSTEIN  
PONDERADAS

ESTABILIDAD DE CILINDROS  
CAPILARES ENTRE VARIAS  
SUPERFICIES SOPORTE

GENERALIZANDO UN PROBLEMA  
DE S.T.YAU SOBRE EL ELIPSOIDE DE  
REVOLUCIÓN

SOLITONES DE RICCI COMO  
SUBVARIETADES DEL ESPACIO  
HIPERBÓLICO COMPLEJO

AREA-BASED SYMMETRIZATION AND  
FIRST DIRICHLET EIGENVALUE OF A  
GEODESIC BALL

CONSTRUCCIONES CONJUGADAS  
PARA H-SUPERFICIES EN  $H^2 \times \mathbb{R}$

¿CÓMO DEFINIR UN FLUJO POR LA  
CURVATURA MEDIA INVERSA PARA  
CRISTALES?

GRUPOS FUNDAMENTALES DE  
ESPACIOS RCD

STUDYING SYMMETRIC-LIKE  
PROPERTIES ON RIEMANNIAN  
MANIFOLDS VIA THE SPECTRUM...

STATIONARY SURFACES OF HEIGHT-  
DEPENDENT WEIGHTED AREA  
FUNCTIONALS

## Hipersuperficies complejas holomorfas pseudosimétricas en un espacio forma complejo

ALMA L. ALBUJER, JORGE ALCÁZAR, MAGDALENA CABALLERO

Departamento de Matemáticas, Universidad de Córdoba

[alma.albujer@uco.es](mailto:alma.albujer@uco.es)

**Resumen:** Las condiciones de simetría de hipersuperficies complejas de variedades Kaehler con curvatura seccional holomorfa constante han sido ampliamente estudiadas por diversos autores. Es de destacar, en primer lugar, el conocido trabajo de Smyth [4] en el que clasifica las hipersuperficies complejas Einstein de un espacio forma complejo y prueba que tales hipersuperficies son localmente simétricas. Posteriormente, de los trabajos de Ryan [3] y Abe [1] se deduce una clasificación completa de las hipersuperficies complejas semisimétricas de un espacio forma complejo. Dando un paso más, en esta charla consideramos hipersuperficies complejas holomorfas pseudosimétricas en un espacio forma complejo y obtenemos una caracterización de estas en función de su segunda forma fundamental, dando ejemplos concretos de dichas hipersuperficies. Esta charla se basa parcialmente en los resultados contenidos en [2].

### Referencias

- [1] K. Abe (1972). A complex analogue of Hartman-Nirenberg cylinder theorem. *J. Differential Geometry*, 7, 453-460.
- [2] A.L. Albuje, J. Alcázar, M. Caballero. Holomorphically pseudosymmetric complex hyper-surfaces of complex space forms. Preprint.
- [3] P.J. Ryan (1972). A class of complex hypersurfaces. *Colloq. Math.*, 26, 175-182.
- [4] B. Smyth (1967). Differential geometry of complex hypersurfaces. *Ann. of Math.*, 85, 246-266.

LUNES, 22 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 11  
Análisis Geométrico

FINSLER METRICS ON SYMMETRIC SPACES

HIPERSUPERFICIES COMPLEJAS  
HOLOMORFAS PSEUDOSIMÉTRICAS EN  
UN ESPACIO FORMA COMPLEJO

RIGIDEZ DE VARIETADES EINSTEIN  
PONDERADAS

ESTABILIDAD DE CILINDROS  
CAPILARES ENTRE VARIAS  
SUPERFICIES SOPORTE

GENERALIZANDO UN PROBLEMA  
DE S.T.YAU SOBRE EL ELIPSOIDE DE  
REVOLUCIÓN

SOLITONES DE RICCI COMO  
SUBVARIETADES DEL ESPACIO  
HIPERBÓLICO COMPLEJO

AREA-BASED SYMMETRIZATION AND  
FIRST DIRICHLET EIGENVALUE OF A  
GEODESIC BALL

CONSTRUCCIONES CONJUGADAS  
PARA H-SUPERFICIES EN  $H^2 \times \mathbb{R}$

¿CÓMO DEFINIR UN FLUJO POR LA  
CURVATURA MEDIA INVERSA PARA  
CRISTALES?

GRUPOS FUNDAMENTALES DE  
ESPACIOS RCD

STUDYING SYMMETRIC-LIKE  
PROPERTIES ON RIEMANNIAN  
MANIFOLDS VIA THE SPECTRUM...

STATIONARY SURFACES OF HEIGHT-  
DEPENDENT WEIGHTED AREA  
FUNCTIONALS

## Rigidez de variedades Einstein ponderadas

MIGUEL BROZOS VÁZQUEZ, DIEGO MOJÓN-ÁLVAREZ

CITMAga, Universidade da Coruña

miguel.brozos.vazquez@udc.es

**Resumen:** Consideramos una variedad Riemanniana  $(M, g)$  dotada de una función de densidad diferenciable  $f$ , que da lugar a una medida  $e^{-f} dvol_g$  en la variedad. Añadimos además un parámetro dimensional  $m \in \mathbb{R}^+$  y otro de curvatura  $\mu \in \mathbb{R}$ . Estos objetos dan lugar a un quintuple  $(M, g, f, m, \mu)$  denominado *smooth metric measure space* (SMMS para abreviar). En este contexto, se define el tensor de Ricci de Bakry-Émery como  $\rho_f^m = \rho + \text{Hes}_f - \frac{1}{m} df \otimes df$  y, a partir de él, tensores geométricos ponderados relacionados con la curvatura, como el tensor de Schouten ponderado  $P_f^m$  [1]. Estos tensores generalizan los análogos de una variedad Riemanniana sin densidad al tiempo que proporcionan información sobre la densidad del espacio.

Un ejemplo de condición sobre variedades Riemannianas que se generaliza a SMMSs es la de ser Einstein. Así, decimos que  $(M, g, f, m, \mu)$  es Einstein ponderado si su tensor de Schouten es un múltiplo del tensor métrico, es decir, si  $P_f^m = \lambda g$  para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Aunque esta propiedad generaliza la condición Einstein de una variedad Riemanniana Einstein tiene tensor de Weyl armónico, pero esto no se traslada al contexto con densidad. Por este motivo, resulta natural estudiar la estructura geométrica de los SMMSs que son Einstein ponderados y su tensor de Weyl ponderado es armónico en el sentido ponderado. Con el fin de describir estas estructuras, haremos un recorrido por propiedades de SMMSs, observando que los que son Einstein ponderados tienen densidad y tensor métrico analíticos en coordenadas armónicas. Introduciremos análogos de los modelos espacio-forma en el contexto ponderado y veremos que desempeñan un papel fundamental en las clasificaciones que aportaremos de SMMS que son weighted Einstein y tienen tensor de Weyl ponderado armónico. En primer lugar daremos una clasificación local de los SMMSs buscados para ver posteriormente que, bajo condiciones de completitud, los únicos ejemplos son espacios-forma o pertenecen a una familia particular de productos warped.

### Referencias

- [1] J. S. Case (2019). The weighted  $\sigma_k$ -curvature of a smooth metric measure space. *Pacific. J. Math.*, 299 (2), 339-399.

LUNES, 22 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 11  
Análisis Geométrico

FINSLER METRICS ON SYMMETRIC SPACES

HIPERSUPERFICIES COMPLEJAS  
HOLOMORFAS PSEUDOSIMÉTRICAS EN  
UN ESPACIO FORMA COMPLEJO

RIGIDEZ DE VARIEDADES EINSTEIN  
PONDERADAS

ESTABILIDAD DE CILINDROS  
CAPILARES ENTRE VARIAS  
SUPERFICIES SOPORTE

GENERALIZANDO UN PROBLEMA  
DE S.T.YAU SOBRE EL ELIPSOIDE DE  
REVOLUCIÓN

SOLITONES DE RICCI COMO  
SUBVARIEDADES DEL ESPACIO  
HIPERBÓLICO COMPLEJO

AREA-BASED SYMMETRIZATION AND  
FIRST DIRICHLET EIGENVALUE OF A  
GEODESIC BALL

CONSTRUCCIONES CONJUGADAS  
PARA H-SUPERFICIES EN  $H^2 \times \mathbb{R}$

¿CÓMO DEFINIR UN FLUJO POR LA  
CURVATURA MEDIA INVERSA PARA  
CRISTALES?

GRUPOS FUNDAMENTALES DE  
ESPACIOS RCD

STUDYING SYMMETRIC-LIKE  
PROPERTIES ON RIEMANNIAN  
MANIFOLDS VIA THE SPECTRUM...

STATIONARY SURFACES OF HEIGHT-  
DEPENDENT WEIGHTED AREA  
FUNCTIONALS

## Estabilidad de cilindros capilares entre varias superficies soporte

RAFAEL LÓPEZ

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada. Granada, España  
rcamino@ugr.es

**Resumen:** En teoría de capilaridad, es interesante conocer la estabilidad de puentes líquidos que unan varias superficies soportes. En esta charla, se estudia la estabilidad de cilindros que conectan dos esferas del mismo radio y entre dos cilindros paralelos [2, 3]. También se analiza la estabilidad de un cilindro sobre una superficie cilíndrica [4] y se extiende el estudio cuando el espacio ambiente es el espacio hiperbólico [1].

### Referencias

- [1] A. Bueno, R. López, On the stability of Killing cylinders in hyperbolic space, 2023, sometido.
- [2] R. López, An analysis of the Sturm-Liouville eigenvalue problem of a cylinder between two spheres of equal radius, 2023, sometido.
- [3] R. López, Stability of a circular cylinder fluid in a system of two parallel cylinders, 2023, sometido.
- [4] R. López, Capillary liquid channels in cylindrical support surfaces: stability and bifurcation, 2023, sometido.

LUNES, 22 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

SESIÓN ESPECIAL 11  
Análisis Geométrico

FINSLER METRICS ON SYMMETRIC SPACES

HIPERSUPERFICIES COMPLEJAS  
HOLOMORFAS PSEUDOSIMÉTRICAS EN  
UN ESPACIO FORMA COMPLEJO

RIGIDEZ DE VARIETADES EINSTEIN  
PONDERADAS

ESTABILIDAD DE CILINDROS  
CAPILARES ENTRE VARIAS  
SUPERFICIES SOPORTE

GENERALIZANDO UN PROBLEMA  
DE S.T.YAU SOBRE EL ELIPSOIDE DE  
REVOLUCIÓN

SOLITONES DE RICCI COMO  
SUBVARIETADES DEL ESPACIO  
HIPERBÓLICO COMPLEJO

AREA-BASED SYMMETRIZATION AND  
FIRST DIRICHLET EIGENVALUE OF A  
GEODESIC BALL

CONSTRUCCIONES CONJUGADAS  
PARA H-SUPERFICIES EN  $H^2 \times \mathbb{R}$

¿CÓMO DEFINIR UN FLUJO POR LA  
CURVATURA MEDIA INVERSA PARA  
CRISTALES?

GRUPOS FUNDAMENTALES DE  
ESPACIOS RCD

STUDYING SYMMETRIC-LIKE  
PROPERTIES ON RIEMANNIAN  
MANIFOLDS VIA THE SPECTRUM...

STATIONARY SURFACES OF HEIGHT-  
DEPENDENT WEIGHTED AREA  
FUNCTIONALS



## Generalizando un problema de S.T.Yau sobre el elipsoide de revolución

ILDEFONSO CASTRO, PAULA CARRETERO

Departamento de Matemáticas, Universidad de Jaén; IMAG, Universidad de Granada

icastro@ujaen.es

**Resumen:** Es bien conocido ([2]) que el elipsoide de revolución  $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$  verifica la relación  $k_m = \frac{a^4}{b^2} k_p^3$  entre sus curvaturas principales a lo largo de meridianos (m) y paralelos (p). Inspirado por algunos resultados de S.S. Chern [2], S.T. Yau propuso en [6] el siguiente problema: *Si las curvaturas principales  $\kappa_1, \kappa_2$ , de una superficie cerrada en  $\mathbb{R}^3$  satisfacen la relación  $\kappa_1 = \mu \kappa_2^3$ ,  $\mu > 0$  (en algún orden), ¿es la superficie un elipsoide de revolución?* Analizaremos las respuestas positivas de [4] y [5] al citado problema en el caso (real) analítico, y la respuesta negativa de [3] para superficies de clase  $C^2$ . Presentaremos un teorema de [1] caracterizando las superficies cuádricas de revolución en términos de una relación cúbica entre sus curvaturas principales.

### Referencias

- [1] P. Carretero, I. Castro (2022). A new approach to rotational Weingarten surfaces. *Mathematics*, 2022 10(4), 578; <https://doi.org/10.3390/math10040578>
- [2] S.S Chern (1945). Some new characterizations of the Euclidean sphere. *Duke Math. J.*, 12, 279–290.
- [3] I. Fernández, P. Mira (2023). Elliptic Weingarten surfaces: Singularities, rotational examples and the halfspace theorem. *Nonlinear Anal.*, 232, 113244.
- [4] W. Kühnel, M. Steller (2005). On closed Weingarten surfaces. *Monatsh. Math.*, 146, 113–126.
- [5] U. Simon (2007). Yau’s problem on a characterization of rotational ellipsoids. *Asian J. Math.*, 11, 361–372.
- [6] S.T. Yau (1982). Problem section, *Seminar on Differential Geometry*. *Annals of Mathematical Studies*. Princeton University Press, vol. 102, 669–706.

**Agradecimientos:** Proyecto PID2020-117868GB-I00 y Unidad de Excelencia “Maria de Maeztu” IMAG CEX2020-001105-M financiada por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/

MARTES, 23 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 11  
Análisis Geométrico

FINSLER METRICS ON SYMMETRIC SPACES

HIPERSUPERFICIES COMPLEJAS  
HOLONÓRFAS PSEUDOSIMÉTRICAS EN  
UN ESPACIO FORMA COMPLEJO

RIGIDEZ DE VARIETADES EINSTEIN  
PONDERADAS

ESTABILIDAD DE CILINDROS  
CAPILARES ENTRE VARIAS  
SUPERFICIES SOPORTE

GENERALIZANDO UN PROBLEMA  
DE S.T.YAU SOBRE EL ELIPSOIDE DE  
REVOLUCIÓN

SOLITONES DE RICCI COMO  
SUBVARIETADES DEL ESPACIO  
HIPERBÓLICO COMPLEJO

AREA-BASED SYMMETRIZATION AND  
FIRST DIRICHLET EIGENVALUE OF A  
GEODESIC BALL

CONSTRUCCIONES CONJUGADAS  
PARA H-SUPERFICIES EN  $H^2 \times \mathbb{R}$

¿CÓMO DEFINIR UN FLUJO POR LA  
CURVATURA MEDIA INVERSA PARA  
CRISTALES?

GRUPOS FUNDAMENTALES DE  
ESPACIOS RCD

STUDYING SYMMETRIC-LIKE  
PROPERTIES ON RIEMANNIAN  
MANIFOLDS VIA THE SPECTRUM...

STATIONARY SURFACES OF HEIGHT-  
DEPENDENT WEIGHTED AREA  
FUNCTIONALS

## Solitones de Ricci como subvariedades del espacio hiperbólico complejo

VÍCTOR SANMARTÍN-LÓPEZ

Departamento de Matemáticas, Universidade de Santiago de Compostela

[victor.sanmartin@usc.es](mailto:victor.sanmartin@usc.es)

**Resumen:** Esta charla se encuadra en la intersección entre la geometría de subvariedades de espacios simétricos de tipo no compacto y el estudio de métricas homogéneas Einstein o de solitón de Ricci. En primer lugar, veremos que el estudio de los solitones de Ricci homogéneos expanding, en particular de las variedades homogéneas Einstein con curvatura escalar negativa, pasa por la investigación de ciertos subgrupos de Lie de la descomposición de Iwasawa asociada a espacios simétricos de tipo no compacto. En esta línea, presentaremos ejemplos y algunas clasificaciones parciales de este tipo de subgrupos de Lie, centrándonos en aquellos procedentes de la descomposición de Iwasawa asociada a los espacios hiperbólicos complejos.

SESIÓN ESPECIAL 11  
Análisis Geométrico

FINSLER METRICS ON SYMMETRIC SPACES

HIPERSUPERFICIES COMPLEJAS  
HOLOMORFAS PSEUDOSIMÉTRICAS EN  
UN ESPACIO FORMA COMPLEJO

RIGIDEZ DE VARIEDADES EINSTEIN  
PONDERADAS

ESTABILIDAD DE CILINDROS  
CAPILARES ENTRE VARIAS  
SUPERFICIES SOPORTE

GENERALIZANDO UN PROBLEMA  
DE S.T.YAU SOBRE EL ELIPSOIDE DE  
REVOLUCIÓN

SOLITONES DE RICCI COMO  
SUBVARIEDADES DEL ESPACIO  
HIPERBÓLICO COMPLEJO

AREA-BASED SYMMETRIZATION AND  
FIRST DIRICHLET EIGENVALUE OF A  
GEODESIC BALL

CONSTRUCCIONES CONJUGADAS  
PARA H-SUPERFICIES EN  $H^2 \times \mathbb{R}$

¿CÓMO DEFINIR UN FLUJO POR LA  
CURVATURA MEDIA INVERSA PARA  
CRISTALES?

GRUPOS FUNDAMENTALES DE  
ESPACIOS RCD

STUDYING SYMMETRIC-LIKE  
PROPERTIES ON RIEMANNIAN  
MANIFOLDS VIA THE SPECTRUM...

STATIONARY SURFACES OF HEIGHT-  
DEPENDENT WEIGHTED AREA  
FUNCTIONALS

MARTES, 23 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

## Area-based symmetrization and first Dirichlet eigenvalue of a geodesic ball

ERIK SARRIÓN PEDRALVA, VICENT GIMENO I GARCIA, VICENTE PALMER

Departamento de Matemática Aplicada, Ciencia e Ingeniería de los Materiales y Tecnología Electrónica,  
Universidad Rey Juan Carlos  
[erik.sarrion@urjc.es](mailto:erik.sarrion@urjc.es)

**Abstract:** Given a Riemannian manifold, we will see a new method to compute a sharp upper bound for the first eigenvalue of the Laplacian for the Dirichlet problem on a geodesic ball of radius less than the injectivity radius of the manifold. This upper bound is obtained by transforming the metric tensor into a rotationally symmetric metric tensor that preserves the area of the geodesic spheres. Moreover, we will show that the provided upper bound can be computed using only the area function of the geodesic spheres contained in the geodesic ball and it is sharp in the sense that the first eigenvalue of geodesic ball coincides with our upper bound if and only if the mean curvature pointed inward of each geodesic sphere is a radial function.

### Referencias

- [1] V. Gimeno, E. Sarrión-Pedralva (2022). First eigenvalue of the Laplacian of a geodesic ball and area-based symmetrization of its metric tensor. *Journal of Mathematical Inequalities*, vol. 16.1, 371-391.

MARTES, 23 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

SESIÓN ESPECIAL 11  
Análisis Geométrico

FINSLER METRICS ON SYMMETRIC SPACES

HIPERSUPERFICIES COMPLEJAS HOLOMORFAS PSEUDOSIMÉTRICAS EN UN ESPACIO FORMA COMPLEJO

RIGIDEZ DE VARIETADES EINSTEIN PONDERADAS

ESTABILIDAD DE CILINDROS CAPILARES ENTRE VARIAS SUPERFICIES SOPORTE

GENERALIZANDO UN PROBLEMA DE S.T.YAU SOBRE EL ELIPSOIDE DE REVOLUCIÓN

SOLITONES DE RICCI COMO SUBVARIETADES DEL ESPACIO HIPERBÓLICO COMPLEJO

AREA-BASED SYMMETRIZATION AND FIRST DIRICHLET EIGENVALUE OF A GEODESIC BALL

CONSTRUCCIONES CONJUGADAS PARA H-SUPERFICIES EN  $H^2 \times \mathbb{R}$

¿CÓMO DEFINIR UN FLUJO POR LA CURVATURA MEDIA INVERSA PARA CRISTALES?

GRUPOS FUNDAMENTALES DE ESPACIOS RCD

STUDYING SYMMETRIC-LIKE PROPERTIES ON RIEMANNIAN MANIFOLDS VIA THE SPECTRUM...

STATIONARY SURFACES OF HEIGHT-DEPENDENT WEIGHTED AREA FUNCTIONALS

## Construcciones conjugadas para $H$ -superficies en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

JESÚS CASTRO INFANTES

Departamento de Matemática Aplicada a las TIC, ETS de Ingenieros Informáticos,  
Universidad Politécnica de Madrid  
[jesus.castro@upm.es](mailto:jesus.castro@upm.es)

**Resumen:** En esta charla se pretende presentar una técnica de construcción de  $H$ -superficies (superficies de curvatura media constante  $H$ ) en el espacio  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  conocida como construcción conjugada y basada en la correspondencia de Daniel para  $H$ -superficies en los espacios  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ . Presentaremos construcciones para  $H$ -superficies en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  con  $k$  finales y género 0 y 1.

SESIÓN ESPECIAL 11  
Análisis Geométrico

FINSLER METRICS ON SYMMETRIC SPACES

HIPERSUPERFICIES COMPLEJAS  
HOLOMORFAS PSEUDOSIMÉTRICAS EN  
UN ESPACIO FORMA COMPLEJO

RIGIDEZ DE VARIEDADES EINSTEIN  
PONDERADAS

ESTABILIDAD DE CILINDROS  
CAPILARES ENTRE VARIAS  
SUPERFICIES SOPORTE

GENERALIZANDO UN PROBLEMA  
DE S.T.YAU SOBRE EL ELIPSOIDE DE  
REVOLUCIÓN

SOLITONES DE RICCI COMO  
SUBVARIEDADES DEL ESPACIO  
HIPERBÓLICO COMPLEJO

AREA-BASED SYMMETRIZATION AND  
FIRST DIRICHLET EIGENVALUE OF A  
GEODESIC BALL

CONSTRUCCIONES CONJUGADAS  
PARA  $H$ -SUPERFICIES EN  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

¿CÓMO DEFINIR UN FLUJO POR LA  
CURVATURA MEDIA INVERSA PARA  
CRISTALES?

GRUPOS FUNDAMENTALES DE  
ESPACIOS RCD

STUDYING SYMMETRIC-LIKE  
PROPERTIES ON RIEMANNIAN  
MANIFOLDS VIA THE SPECTRUM...

STATIONARY SURFACES OF HEIGHT-  
DEPENDENT WEIGHTED AREA  
FUNCTIONALS

MARTES, 23 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

## ¿Cómo definir un flujo por la curvatura media inversa para cristales?

ESTHER CABEZAS-RIVAS, SALVADOR MOLL, MARCOS SOLERA

Departament de Matemàtiques, Universitat de València

[Esther.Cabezas-Rivas@uv.es](mailto:Esther.Cabezas-Rivas@uv.es)

**Resumen:** Obtenemos existencia y unicidad de minimizantes para el funcional  $p$ -capacidad definido con respecto a una anisotropía simétrica para  $1 < p < \infty$ , incluyendo el caso de normas cristalinas en  $\mathbb{R}^N$ . Esto se prueba en [1] mediante una caracterización de la subdiferencial correspondiente y se aplica para dominios no acotados de la forma  $\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}$  bajo hipótesis débiles de regularidad (frontera Lipschitz-continua) y sin requisitos de convexidad para  $\Omega$ . Si asumimos una condición de bola interior (donde la forma de Wulff juega el papel de bola), entonces cualquier minimizante es Lipschitz-continuo.

Mediante un método de aproximación introducido por Moser, como límites de estos minimizantes (tras un cambio de variable), en [2] construimos soluciones débiles del flujo anisotrópico por la curvatura media inversa bajo suposiciones muy suaves tanto sobre la anisotropía (que es simplemente una norma en  $\mathbb{R}^N$  sin requisitos de elipticidad ni regularidad, para incluir el caso cristalino) como sobre los datos iniciales.

Nuestra noción de solución sigue recuperando definiciones variacionales y geométricas similares a las introducidas por Huisken-Ilmanen, pero requiere trabajar en el contexto más amplio de las funciones  $BV$ . A pesar de ello, seguimos alcanzando resultados clásicos como la continuidad y el crecimiento exponencial del perímetro, así como propiedades de minimización hacia el exterior de los subconjuntos de nivel. Además, asumiendo la regularidad extra dada por una condición de bola interior, se demuestra que las soluciones son continuas y satisfacen una desigualdad tipo Harnack. Por último, se construyen ejemplos de soluciones explícitas.

### Referencias

- [1] E. Cabezas-Rivas, S. Moll and M. Solera (2023). Characterization of the subdifferential and minimizers for the anisotropic  $p$ -capacity, *preprint* arxiv:2305.03498.
- [2] E. Cabezas-Rivas, S. Moll and M. Solera (2023). Weak solutions of Anisotropic (and crystalline) inverse mean curvature flow as limits of  $p$ -capacitary potentials, *preprint*.

MARTES, 23 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

SESIÓN ESPECIAL 11  
Análisis Geométrico

FINSLER METRICS ON SYMMETRIC SPACES

HIPERSUPERFICIES COMPLEJAS  
HOLOMORFAS PSEUDOSIMÉTRICAS EN  
UN ESPACIO FORMA COMPLEJO

RIGIDEZ DE VARIEDADES EINSTEIN  
PONDERADAS

ESTABILIDAD DE CILINDROS  
CAPILARES ENTRE VARIAS  
SUPERFICIES SOPORTE

GENERALIZANDO UN PROBLEMA  
DE S.T.YAU SOBRE EL ELIPSOIDE DE  
REVOLUCIÓN

SOLITONES DE RICCI COMO  
SUBVARIEDADES DEL ESPACIO  
HIPERBÓLICO COMPLEJO

AREA-BASED SYMMETRIZATION AND  
FIRST DIRICHLET EIGENVALUE OF A  
GEODESIC BALL

CONSTRUCCIONES CONJUGADAS  
PARA  $H$ -SUPERFICIES EN  $H^2 \times \mathbb{R}$

¿CÓMO DEFINIR UN FLUJO POR LA  
CURVATURA MEDIA INVERSA PARA  
CRISTALES?

GRUPOS FUNDAMENTALES DE  
ESPACIOS RCD

STUDYING SYMMETRIC-LIKE  
PROPERTIES ON RIEMANNIAN  
MANIFOLDS VIA THE SPECTRUM...

STATIONARY SURFACES OF HEIGHT-  
DEPENDENT WEIGHTED AREA  
FUNCTIONALS

## Grupos fundamentales de espacios RCD

JAIME SANTOS-RODRÍGUEZ, QIN DENG, SERGIO ZAMORA-BARRERA, XINRUI ZHAO

Departamento Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid

[jaime.santos@uam.es](mailto:jaime.santos@uam.es)

**Resumen:** Dadas  $K \in \mathbb{R}$  y  $N \geq 1$  la clase de los espacios  $\text{RCD}(K, N)$  consiste de espacios métricos de medida que satisfacen una noción sintética de cota inferior en la curvatura de Ricci. Ejemplos de estos espacios incluyen límites de Gromov-Hausdorff de variedades Riemannianas y a los espacios de Alexandrov.

Un problema clásico en geometría es estudiar la relación entre la curvatura y la topología. Por ejemplo, uno puede estudiar propiedades del grupo fundamental de tales espacios. Sin embargo, dado que los espacios RCD no son necesariamente variedades primeramente era necesario probar que el recubridor universal existe (Mondino-Wei [2]) y que es simplemente conexo (Wang [4]).

En esta charla primero nos centraremos en dar una motivación para el estudio de nociones sintéticas de cotas de curvatura. Después daremos ejemplos de espacios RCD y describiremos algunas de sus propiedades. Finalmente, presentaremos algunos de los resultados obtenidos con respecto al grupo fundamental. Esta charla está basada en colaboraciones con S. Zamora-Barrera [3] y con Q. Deng, S. Zamora-Barrera, X. Zhao [1].

### Referencias

- [1] Q. Deng, J. Santos-Rodríguez, S. Zamora-Barrera, X. Zhao (2023). Margulis Lemma on  $\text{RCD}(K, N)$  spaces. arXiv:2308.15215
- [2] A. Mondino, G. Wei (2019) On the universal cover and the fundamental group of an  $\text{RCD}^*(K, N)$ -space. *J. Reine Angew. Math.*, 753, 211–237.
- [3] J. Santos-Rodríguez, S. Zamora-Barrera (2023). On fundamental groups of RCD spaces. *J. Reine Angew. Math.*, 799, 249–286.
- [4] J. Wang (2023).  $\text{RCD}^*(K, N)$  spaces are semi-locally simply-connected. *Journal Reine Angew. Math.* <https://doi.org/10.1515/crelle-2023-0058>

MARTES, 23 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 11  
Análisis Geométrico

FINSLER METRICS ON SYMMETRIC SPACES

HIPERSUPERFICIES COMPLEJAS  
HOLONÓRFAS PSEUDOSIMÉTRICAS EN  
UN ESPACIO FORMA COMPLEJO

RIGIDEZ DE VARIEDADES EINSTEIN  
PONDERADAS

ESTABILIDAD DE CILINDROS  
CAPILARES ENTRE VARIAS  
SUPERFICIES SOPORTE

GENERALIZANDO UN PROBLEMA  
DE S.T.YAU SOBRE EL ELIPSOIDE DE  
REVOLUCIÓN

SOLITONES DE RICCI COMO  
SUBVARIEDADES DEL ESPACIO  
HIPERBÓLICO COMPLEJO

AREA-BASED SYMMETRIZATION AND  
FIRST DIRICHLET EIGENVALUE OF A  
GEODESIC BALL

CONSTRUCCIONES CONJUGADAS  
PARA H-SUPERFICIES EN  $H^2 \times \mathbb{R}$

¿CÓMO DEFINIR UN FLUJO POR LA  
CURVATURA MEDIA INVERSA PARA  
CRISTALES?

GRUPOS FUNDAMENTALES DE  
ESPACIOS RCD

STUDYING SYMMETRIC-LIKE  
PROPERTIES ON RIEMANNIAN  
MANIFOLDS VIA THE SPECTRUM...

STATIONARY SURFACES OF HEIGHT-  
DEPENDENT WEIGHTED AREA  
FUNCTIONALS

## Studying symmetric-like properties on Riemannian manifolds via the spectrum of the Laplace-Beltrami operator

JOSÉ MANUEL FERNÁNDEZ-BARROSO

Departamento de Matemáticas, Universidad de Extremadura

[ferbar@unex.es](mailto:ferbar@unex.es)

**Abstract:** *Symmetric-like* properties are those which generalize the local symmetry on Riemannian manifolds. The study of the determination of a geometric property using the information provided by the eigenvalues of the Laplace-Beltrami operator is a problem concerning to the Spectral geometry namely the *Audibility problem*. In that context, two Riemannian manifolds are said to be *isospectral* if there exists an operator which intertwines their Laplace-Beltrami operator. If the Riemannian manifolds are compact, the existence of the intertwining operator is equivalent to the fact that both Riemannian manifolds have the same spectrum for the Laplace-Beltrami operator. Moreover, a geometric property is said to be *inaudible* if there exists a pair of isospectral Riemannian manifolds where that property differs.

In this talk we treat the isospectrality between different pairs of Riemannian manifolds in order to establish the inaudibility of different symmetric-like properties.

Joint work with Teresa Arias-Marco.

SESIÓN ESPECIAL 11  
Análisis Geométrico

FINSLER METRICS ON SYMMETRIC SPACES

HIPERSUPERFICIES COMPLEJAS HOLOMORFAS PSEUDOSIMÉTRICAS EN UN ESPACIO FORMA COMPLEJO

RIGIDEZ DE VARIETADES EINSTEIN PONDERADAS

ESTABILIDAD DE CILINDROS CAPILARES ENTRE VARIAS SUPERFICIES SOPORTE

GENERALIZANDO UN PROBLEMA DE S.T.YAU SOBRE EL ELIPSOIDE DE REVOLUCIÓN

SOLITONES DE RICCI COMO SUBVARIETADES DEL ESPACIO HIPERBÓLICO COMPLEJO

AREA-BASED SYMMETRIZATION AND FIRST DIRICHLET EIGENVALUE OF A GEODESIC BALL

CONSTRUCCIONES CONJUGADAS PARA H-SUPERFICIES EN  $H^2 \times \mathbb{R}$

¿CÓMO DEFINIR UN FLUJO POR LA CURVATURA MEDIA INVERSA PARA CRISTALES?

GRUPOS FUNDAMENTALES DE ESPACIOS RCD

STUDYING SYMMETRIC-LIKE PROPERTIES ON RIEMANNIAN MANIFOLDS VIA THE SPECTRUM...

STATIONARY SURFACES OF HEIGHT-DEPENDENT WEIGHTED AREA FUNCTIONALS

MARTES, 23 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

## Stationary surfaces of height-dependent weighted area functionals

ANTONIO MARTÍNEZ

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada

amartine@ugr.es

**Abstract:** Our main goal is to show some recent advances in the study of stationary surfaces for the following weighted area functional

$$\mathcal{A}^\varphi(\Sigma) = \int_{\Sigma} e^\varphi d\Sigma \quad (1)$$

on isometric immersions of Riemannian surfaces  $\Sigma$  in a domain  $\mathfrak{D}^3$  of  $\mathbb{R}^3$  (or  $\mathbb{L}^3$ ) when  $\varphi$  is the restriction on  $\Sigma$  of a smooth function depending only on the coordinate of  $\mathfrak{D}^3$  in the direction of  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$  and where  $d\Sigma$  denotes the volume element induced on  $\Sigma$  by the Euclidean (or Lorentzian) metric  $\langle \cdot, \cdot \rangle := dx^2 + dy^2 + dz^2$  ( $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{L}^3} := dx^2 + dy^2 - dz^2$ ).

The Euler-Lagrange equation of (1) is given in terms of the mean curvature vector  $\mathbf{H}$  of  $\Sigma$  as follows

$$\mathbf{H} = (\bar{\nabla}\varphi)^\perp = \dot{\varphi} \vec{e}_3^\perp, \quad (2)$$

here  $\perp$  denotes the projection on the normal bundle, and  $\bar{\nabla}$  stands the usual gradient operator in  $\mathbb{R}^3$  (or  $\mathbb{L}^3$ ).

Any critical point of (1) in  $\mathbb{R}^3$  (or  $\mathbb{L}^3$ ) will be called  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -*minimal* (or *spacelike*  $[\varphi, \vec{e}_3]$ -*maximal*) surface. Interesting examples of these families of surfaces are:

- the classical minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$  and the the spacelike maximal surfaces in  $\mathbb{L}^3$  when  $\varphi$  is a constant.
- the translating solitons: if  $\varphi$  is just the height function,  $\varphi(p) = \langle p, \vec{e}_3 \rangle$ , that is, surfaces such that

$$t \rightarrow \Sigma + t\vec{e}_3$$

is a mean curvature flow, i.e. the normal component of the velocity at each point is equal to the mean curvature at that point.

- the singular  $\alpha$ -minimal (spacelike  $\alpha$ -maximal) surfaces: if  $\varphi(p) = \alpha \log \langle p, \vec{e}_3 \rangle$ ,  $\alpha = \text{const}$ . For surfaces in  $\mathbb{R}^3$  and when  $\alpha = 1$ ,  $\Sigma$  describes the shape of a “hanging roof”, i.e. a heavy surface in a gravitational field that, are of importance for the construction of perfect domes.

MARTES, 23 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

SESIÓN ESPECIAL 11  
Análisis Geométrico

FINSLER METRICS ON SYMMETRIC SPACES

HIPERSUPERFICIES COMPLEJAS  
HOLOMORFAS PSEUDOSIMÉTRICAS EN  
UN ESPACIO FORMA COMPLEJO

RIGIDEZ DE VARIETADES EINSTEIN  
PONDERADAS

ESTABILIDAD DE CILINDROS  
CAPILARES ENTRE VARIAS  
SUPERFICIES SOPORTE

GENERALIZANDO UN PROBLEMA  
DE S.T.YAU SOBRE EL ELIPSOIDE DE  
REVOLUCIÓN

SOLITONES DE RICCI COMO  
SUBVARIETADES DEL ESPACIO  
HIPERBÓLICO COMPLEJO

AREA-BASED SYMMETRIZATION AND  
FIRST DIRICHLET EIGENVALUE OF A  
GEODESIC BALL

CONSTRUCCIONES CONJUGADAS  
PARA H-SUPERFICIES EN  $H^2 \times \mathbb{R}$

¿CÓMO DEFINIR UN FLUJO POR LA  
CURVATURA MEDIA INVERSA PARA  
CRISTALES?

GRUPOS FUNDAMENTALES DE  
ESPACIOS RCD

STUDYING SYMMETRIC-LIKE  
PROPERTIES ON RIEMANNIAN  
MANIFOLDS VIA THE SPECTRUM...

STATIONARY SURFACES OF HEIGHT-  
DEPENDENT WEIGHTED AREA  
FUNCTIONALS



## SESIÓN ESPECIAL 12

### Geometría Diferencial y Teoría de Subvariedades

Organizadores:

FIDEL FERNÁNDEZ VILLASEÑOR  
(Universidad de Granada)

RODRIGO MORÓN SANZ  
(Universidad de Málaga)

#### Descripción:

Esta sesión generalista de geometría diferencial está pensada para que abarque temas relacionados con la teoría de subvariedades así como otros temas difíciles de enmarcar en un ámbito más especializado.

SESIÓN ESPECIAL 12  
Geometría Diferencial y Teoría  
de Subvariedades

NUEVOS EJEMPLOS DE VARIETADES  
CON ESTRUCTURAS COMPLEJAS  
SIMPLECTICAS

SUPERFICIES CMC-1 EN  $H^3$  Y CMC-1  
CARAS EN  $S^1$  CON ESTRUCTURA  
COMPLEJA ARBITRARIA

MITTAG-LEFFLER THEOREM FOR  
MEROMORPHIC A-IMMERSIONS

LEY DE SNELL GENERALIZADA  
A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DE  
FINSLER

GRAVEDAD SUPERFICIAL DE UNA  
HIPERSUPERFICIE LUZ

CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES DE  
TRASLACION Y SEPARABLES CON  
CURVATURA CONSTANTE

EL PROBLEMA DE BONNET  
EN ESPACIOS HOMOGÉNEOS  
LORENTZIANOS

SUPERFICIES ATRAPADAS EN PLANE  
FRONTED WAVES

INMERSIONES ESPACIALES A TRAVÉS  
DE HIPERSUPERFICIES LUZ EN  
VARIETADES DE LORENTZ

DINÁMICA DE PARTÍCULAS  
RELATIVISTAS CON CURVATURA Y  
TORSIÓN EN ESPACIO-TIEMPOS...

SUBVARIETADES COMPLETAS  
ATRAPADAS EN ESPACIO-TIEMPOS  
GLOBALMENTE HIPERBÓLICOS

SOBRE EL PRIMER AUTOVALOR  
DEL OPERADOR DE LAPLACE PARA  
SUBVARIETADES COMPACTAS...

## Nuevos ejemplos de variedades con estructuras complejas simplécticas

A. LATORRE, G. BAZZONI, M. FREIBERT, N. TARDINI

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Madrid

[adela.latorre@upm.es](mailto:adela.latorre@upm.es)

**Resumen:** Una variedad compleja simpléctica es una variedad diferenciable  $M$  de dimensión  $4n$  que admite una estructura compleja  $J$  y una forma simpléctica  $\omega$  tales que  $\omega(JX, Y) = \omega(X, JY)$ , para todo par de campos de vectores diferenciables  $X, Y$ . Un ejemplo especial de este tipo de variedades son las variedades hyperkähler, aunque existen variedades complejas simplécticas que no son hyperkähler. De hecho, es posible hallar estructuras complejas simplécticas  $(J, \omega)$  sobre variedades no Kählerianas. En esta charla construiremos ejemplos de este tipo haciendo uso de álgebras de Lie casi Abelianas  $\mathfrak{g}$ , que son aquellas que se caracterizan por tener un ideal Abelianiano de codimensión 1. De hecho, veremos que es posible proporcionar una clasificación de aquellas  $\mathfrak{g}$  que admiten estructuras complejas simplécticas  $(J, \omega)$ .

### Agradecimientos:

Proyecto PID2020-115652GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

LUNES, 22 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

SESIÓN ESPECIAL 12  
Geometría Diferencial y Teoría  
de Subvariedades

NUEVOS EJEMPLOS DE VARIEDADES  
CON ESTRUCTURAS COMPLEJAS  
SIMPLÉCTICAS

SUPERFICIES CMC-1 EN  $H^3$  Y CMC-1  
CARAS EN  $S^1$  CON ESTRUCTURA  
COMPLEJA ARBITRARIA

MITTAG-LEFFLER THEOREM FOR  
MEROMORPHIC A-IMMERSIONS

LEY DE SNELL GENERALIZADA  
A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DE  
FINSLER

GRAVEDAD SUPERFICIAL DE UNA  
HIPERSUPERFICIE LUZ

CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES DE  
TRASLACION Y SEPARABLES CON  
CURVATURA CONSTANTE

EL PROBLEMA DE BONNET  
EN ESPACIOS HOMOGÉNEOS  
LORENTZIANOS

SUPERFICIES ATRAPADAS EN PLANE  
FRONTED WAVES

INMERSIONES ESPACIALES A TRAVÉS  
DE HIPERSUPERFICIES LUZ EN  
VARIEDADES DE LORENTZ

DINÁMICA DE PARTÍCULAS  
RELATIVISTAS CON CURVATURA Y  
TORSIÓN EN ESPACIOTIEMPOS...

SUBVARIEDADES COMPLETAS  
ATRAPADAS EN ESPACIO-TIEMPOS  
GLOBALMENTE HIPERBÓLICOS

SOBRE EL PRIMER AUTOVALOR  
DEL OPERADOR DE LAPLACE PARA  
SUBVARIEDADES COMPACTAS...

# Superficies CMC-1 en $\mathbb{H}^3$ y CMC-1 caras en $\mathbb{S}_1^3$ con estructura compleja arbitraria

JORGE HIDALGO

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada

[jorgehcal@ugr.es](mailto:jorgehcal@ugr.es)

**Resumen:** Esta charla se basa en un trabajo con A.Alarcón y I.Castro-Infantes. Concretamente, explicaré las ideas principales de [1], donde probamos un teorema de aproximación e interpolación tipo Runge-Mergelyan, Weierstrass-Florack (ver [2]) para curvas holomorfas nulas en  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^*$  ( con  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ). Después, usando las proyecciones al espacio hiperbólico y al de Sitter de dimensión 3:

$$\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{H}^3, \quad \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{S}_1^3,$$

que llevan curvas holomorfas nulas en  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^*$  a superficies CMC-1 (ver [3]) y a CMC-1 caras (ver [4]), respectivamente, obtenemos que toda superficie de Riemann abierta  $M$  admite una inmersión conforme CMC-1 casi propia  $M \rightarrow \mathbb{H}^3$  y una inmersión conforme débilmente completa  $M \rightarrow \mathbb{S}_1^3$  como una CMC-1 cara.

En [1] no podemos hacer casi propias estas últimas inmersiones. Para finalizar, daré una idea de cómo, estudiando la proyección  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{S}_1^3$ , se podrían construir CMC-1 caras casi propias con estructura compleja arbitraria.

## Referencias

- [1] A. Alarcón, I. Castro-Infantes, J. Hidalgo (2023). Complete CMC-1 surfaces in hyperbolic space with arbitrary complex structure. Preprint, arXiv:2306.14482.
- [2] A. Alarcón, F. Forstnerič, F.J. López (2021). Minimal surfaces from a complex analytic viewpoint. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Cham.
- [3] R.L. Bryant (1988). Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space. *Asterisque* 353, 154-155.
- [4] S. Fujimori (2006). Spacelike CMC 1 surfaces with elliptic ends in de Sitter 3-space. *Hokkaido Mathematical Journal*, 35(2), 289-320.

LUNES, 22 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 12  
Geometría Diferencial y Teoría  
de Subvariedades

NUEVOS EJEMPLOS DE VARIETADES  
CON ESTRUCTURAS COMPLEJAS  
SIMPLECTICAS

SUPERFICIES CMC-1 EN  $\mathbb{H}^3$  Y CMC-1  
CARAS EN  $\mathbb{S}_1^3$  CON ESTRUCTURA  
COMPLEJA ARBITRARIA

MITTAG-LEFFLER THEOREM FOR  
MEROMORPHIC A-IMMERSIONS

LEY DE SNEEL GENERALIZADA  
A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DE  
FINSLER

GRAVEDAD SUPERFICIAL DE UNA  
HIPERSUPERFICIE LUZ

CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES DE  
TRASLACION Y SEPARABLES CON  
CURVATURA CONSTANTE

EL PROBLEMA DE BONNET  
EN ESPACIOS HOMOGÉNEOS  
LORENTZIANOS

SUPERFICIES ATRAPADAS EN PLANE  
FRONTED WAVES

INMERSIONES ESPACIALES A TRAVÉS  
DE HIPERSUPERFICIES LUZ EN  
VARIETADES DE LORENTZ

DINÁMICA DE PARTÍCULAS  
RELATIVISTAS CON CURVATURA Y  
TORSIÓN EN ESPACIOTIEMPOS...

SUBVARIETADES COMPLETAS  
ATRAPADAS EN ESPACIO-TIEMPOS  
GLOBALMENTE HIPERBÓLICOS

SOBRE EL PRIMER AUTOVALOR  
DEL OPERADOR DE LAPLACE PARA  
SUBVARIETADES COMPACTAS...

## Mittag-Leffler theorem for meromorphic $A$ -immersions

TJAŠA VRHOVNIK

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada

[vrhovnik@ugr.es](mailto:vrhovnik@ugr.es)

**Abstract:** Given an open Riemann surface  $M$ , a finite subset  $E \subset M$  and a closed conical complex subvariety  $A \subset \mathbb{C}^n$ , a holomorphic map  $F = (F_1, \dots, F_n): M \setminus E \rightarrow \mathbb{C}^n$  that meromorphically extends to  $M$  with effective poles in  $E$  is called a meromorphic  $A$ -immersion, if its complex derivative  $F'$  on  $M \setminus E$  with respect to any local holomorphic coordinate on  $M$  assumes values in  $A_* = A \setminus \{0\}$ . When the subvariety equals  $A = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n: z_1^2 + \dots + z_n^2 = 0\}$ , a holomorphic  $A$ -immersion  $F: M \rightarrow \mathbb{C}^n$  is a null curve, and its real and imaginary parts are minimal surfaces in  $\mathbb{R}^n$ . Alarcón and López in [2] proved the Mittag-Leffler theorem for minimal surfaces (see also [3, Chapter 3]). We generalize the latter and results in [1] to a family of meromorphic  $A$ -immersions, as well as present some developments. In particular, how fixing component functions leads to a Mittag-Leffler theorem for proper meromorphic  $A$ -immersions.

### Referencias

- [1] A. Alarcón and F. Forstnerič (2014). Null curves and directed immersions of open Riemann surfaces. *Invent. Math.*, 196(3), 733-771.
- [2] A. Alarcón and F. J. Lopez (2022). Algebraic approximation and the Mittag-Leffler theorem for minimal surfaces. *Anal. PDE*, 15(3), 859-890.
- [3] A. Alarcón, F. Forstnerič, and F. J. López (2021). Minimal surfaces from a complex analytic viewpoint. Springer Monogr. Math. Cham: Springer.

LUNES, 22 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 12  
Geometría Diferencial y Teoría  
de Subvariedades

NUEVOS EJEMPLOS DE VARIEDADES  
CON ESTRUCTURAS COMPLEJAS  
SIMPLECTICAS

SUPERFICIES CMC-1 EN  $H^3$  Y CMC-1  
CARAS EN  $S^1$  CON ESTRUCTURA  
COMPLEJA ARBITRARIA

MITTAG-LEFFLER THEOREM FOR  
MEROMORPHIC  $A$ -IMMERSIONS

LEY DE SNELL GENERALIZADA  
A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DE  
FINSLER

GRAVEDAD SUPERFICIAL DE UNA  
HIPERSUPERFICIE LUZ

CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES DE  
TRASLACIÓN Y SEPARABLES CON  
CURVATURA CONSTANTE

EL PROBLEMA DE BONNET  
EN ESPACIOS HOMOGÉNEOS  
LORENTZIANOS

SUPERFICIES ATRAPADAS EN PLANE  
FRONTED WAVES

INMERSIONES ESPACIALES A TRAVÉS  
DE HIPERSUPERFICIES LUZ EN  
VARIEDADES DE LORENTZ

DINÁMICA DE PARTÍCULAS  
RELATIVISTAS CON CURVATURA Y  
TORSIÓN EN ESPACIOTIEMPOS...

SUBVARIEDADES COMPLETAS  
ATRAPADAS EN ESPACIO-TIEMPOS  
GLOBALMENTE HIPERBÓLICOS

SOBRE EL PRIMER AUTOVALOR  
DEL OPERADOR DE LAPLACE PARA  
SUBVARIEDADES COMPACTAS...

## Ley de Snell generalizada a través de la geometría de Finsler

ENRIQUE PENDÁS RECONDO

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

[e.pendasrecondo@um.es](mailto:e.pendasrecondo@um.es)

**Resumen:** La ley de Snell clásica es una conocida fórmula física que describe la relación entre los ángulos de incidencia y refracción, cuando la luz (o en general, cualquier onda) cruza la superficie de separación entre dos medios de propagación isótropos. En el caso anisótropo, cuando la velocidad de la onda depende de la dirección, esta ley se puede generalizar haciendo uso de la geometría de Finsler. Junto con la análoga generalización de la ley de la reflexión, esto proporciona una representación geométrica completa del comportamiento de la onda en la interfaz entre dos medios anisótropos, así como la descripción de algunos fenómenos relevantes como la reflexión total.

Esta charla está basada principalmente en el artículo [1], en colaboración con el profesor Steen Markvorsen (Technical University of Denmark).

### Referencias

- [1] S. Markvorsen, E. Pendás-Recondo (2023). Snell's law revisited and generalized via Finsler geometry. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, vol. 20, no. 8, 2350138.

**Agradecimientos:** Esta investigación es parte del proyecto PID2021-124157NB-I00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por FEDER “Una manera de hacer Europa”.

LUNES, 22 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

SESIÓN ESPECIAL 12  
Geometría Diferencial y Teoría  
de Subvariedades

NUEVOS EJEMPLOS DE VARIETADES  
CON ESTRUCTURAS COMPLEJAS  
SIMPLECTICAS

SUPERFICIES CMC-1 EN  $H^3$  Y CMC-1  
CARAS EN  $S^1$  CON ESTRUCTURA  
COMPLEJA ARBITRARIARIA

MITTAG-LEFFLER THEOREM FOR  
MEROMORPHIC A-IMMERSIONS

LEY DE SNELL GENERALIZADA  
A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DE  
FINSLER

GRAVEDAD SUPERFICIAL DE UNA  
HIPERSUPERFICIE LUZ

CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES DE  
TRASLACIÓN Y SEPARABLES CON  
CURVATURA CONSTANTE

EL PROBLEMA DE BONNET  
EN ESPACIOS HOMOGÉNEOS  
LORENTZIANOS

SUPERFICIES ATRAPADAS EN PLANE  
FRONTED WAVES

INMERSIONES ESPACIALES A TRAVÉS  
DE HIPERSUPERFICIES LUZ EN  
VARIETADES DE LORENTZ

DINÁMICA DE PARTÍCULAS  
RELATIVISTAS CON CURVATURA Y  
TORSIÓN EN ESPACIOTIEMPOS...

SUBVARIETADES COMPLETAS  
ATRAPADAS EN ESPACIO-TIEMPOS  
GLOBALMENTE HIPERBÓLICOS

SOBRE EL PRIMER AUTOVALOR  
DEL OPERADOR DE LAPLACE PARA  
SUBVARIETADES COMPACTAS...

## Gravedad superficial de una hipersuperficie luz

BENJAMÍN OLEA, IVAN P. COSTA E SILVA, JOSÉ L. FLORES

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Málaga

[benji@uma.es](mailto:benji@uma.es)

**Resumen:** Una hipersuperficie luz de una variedad de Lorentz es una hipersuperficie donde la métrica heredada degenera en todo punto. Las hipersuperficies luz aparecen frecuentemente en Física (horizontes de sucesos), pero también son importantes desde un punto de vista matemático debido a su abundancia. En efecto, cualquier cono luz de una variedad de Lorentz es, al menos localmente, una hipersuperficie luz.

En cada punto de una hipersuperficie luz hay una única dirección luz, por lo que, asumiendo alguna condición sencilla, podemos suponer que existe una sección luz global, es decir, un campo  $\xi$  que es luz y tangente a la hipersuperficie. La *gravedad superficial* respecto de  $\xi$  es la función  $\kappa$  tal que  $\nabla_{\xi}\xi = \kappa\xi$ . Como la sección luz de una hipersuperficie luz no es única, la gravedad superficial tampoco. De hecho, si cambiamos la sección luz, entonces la gravedad superficial también cambia, aunque de forma controlada. Una cuestión importante es encontrar condiciones que aseguren la existencia de una sección luz cuya gravedad superficial sea lo más simple posible, es decir, constante. Esta cuestión tiene una respuesta positiva en algunos casos. Por ejemplo, si existe un campo conforme transverso a la hipersuperficie luz [2], si se cumple la condición de energía dominante (DEC) y la hipersuperficie es un horizonte Killing (ley cero de la termodinámica de agujeros negros) o si se cumple la DEC y la hipersuperficie luz es totalmente geodésica y compacta [3]. En esta comunicación revisaremos los resultados anteriores y probaremos la existencia de una sección luz con gravedad superficial constante bajo condiciones geométricas diferentes a las usadas normalmente en la literatura.

### Referencias

- [1] I.P. Costa e Silva, J.L. Flores, B. Olea, On the existence of sections with constant surface gravity on null hypersurfaces, preprint.
- [2] M. Gutiérrez, B. Olea (2016). Induced Riemannian structures on null hypersurfaces. *Math. Nachr.*, 289, 1219-1236.
- [3] S. Gurriaran, E. Minguzzi (2022). Surface gravity of compact non-degenerate horizons under the dominant energy condition. *Commun. Math. Phys.*, 395, 679-713.

MARTES, 23 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 12  
Geometría Diferencial y Teoría  
de Subvariedades

NUEVOS EJEMPLOS DE VARIETADES  
CON ESTRUCTURAS COMPLEJAS  
SIMPLECTICAS

SUPERFICIES CMC-1 EN  $H^3$  Y CMC-1  
CARAS EN  $S^1$  CON ESTRUCTURA  
COMPLEJA ARBITRARIA

MITTAG-LEFFLER THEOREM FOR  
MEROMORPHIC A-IMMERSIONS

LEY DE SNEEL GENERALIZADA  
A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DE  
FINSLER

GRAVEDAD SUPERFICIAL DE UNA  
HIPERSUPERFICIE LUZ

CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES DE  
TRASLACIÓN Y SEPARABLES CON  
CURVATURA CONSTANTE

EL PROBLEMA DE BONNET  
EN ESPACIOS HOMOGÉNEOS  
LORENTZIANOS

SUPERFICIES ATRAPADAS EN PLANE  
FRONTED WAVES

INMERSIONES ESPACIALES A TRAVÉS  
DE HIPERSUPERFICIES LUZ EN  
VARIETADES DE LORENTZ

DINÁMICA DE PARTÍCULAS  
RELATIVISTAS CON CURVATURA Y  
TORSIÓN EN ESPACIO-TIEMPOS...

SUBVARIETADES COMPLETAS  
ATRAPADAS EN ESPACIO-TIEMPOS  
GLOBALMENTE HIPERBÓLICOS

SOBRE EL PRIMER AUTOVALOR  
DEL OPERADOR DE LAPLACE PARA  
SUBVARIETADES COMPACTAS...

## Clasificación de superficies de traslación y separables con curvatura constante

RAFAEL LÓPEZ

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada. Granada, España

rcamino@ugr.es

**Resumen:** Se propone el estudio de superficies del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$  que tienen especiales parametrizaciones. Así, una superficie se dice que es de traslación si se puede parametrizar como  $X(t, s) = \alpha(s) + \beta(t)$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son dos curvas espaciales. Una superficie se dice que es separable si se puede expresar de forma implícita como  $f(x) + g(y) + h(z) = 0$ , donde  $f$ ,  $g$  y  $h$  son funciones de una variable. En esta charla se muestran recientes avances en la clasificación de las superficies de traslación y superficies separables que tienen curvatura media constante [2, 3, 8], y curvatura de Gauss constante [4, 5, 7]. También se proponen generalizaciones de los resultados [1, 6].

### Referencias

- [1] M. Evren Aydin, R. López, G-E. Vilcu, Classification of separable hypersurfaces with constant sectional curvature, sometido.
- [2] T. Hasanis, R. López (2020), Classification and construction of minimal translation surfaces in Euclidean space. Results Math. 75, Paper No. 2.
- [3] T. Hasanis, R. López (2020), A characteristic property of Delaunay surfaces. Proc. Amer. Math. Soc. 148, 5291-5298.
- [4] T. Hasanis, R. López (2021), Classification of separable surfaces with constant Gaussian curvature. Manuscripta Math. 166, 403-417.
- [5] T. Hasanis, R. López (2021), Translation surfaces in Euclidean space with constant Gaussian curvature. Comm. Anal. Geom. 29, 1415-1447.
- [6] S. Kaya, R. López (2022), Classification of zero mean curvature surfaces of separable type in Lorentz-Minkowski space. Tohoku Math. J. 74, 263-286.
- [7] R. López, M. Moruz (2015), Translation and homothetical surfaces in Euclidean space with constant curvature. J. Korean Math. Soc. 52, 523-535.
- [8] R. López, O. Perdomo (2017), Minimal translation surfaces in Euclidean space. J. Geom. Anal. 27, 2926-2937.

MARTES, 23 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

SESIÓN ESPECIAL 12  
Geometría Diferencial y Teoría  
de Subvariedades

NUEVOS EJEMPLOS DE VARIETADES  
CON ESTRUCTURAS COMPLEJAS  
SIMPLECTICAS

SUPERFICIES CMC-1 EN  $H^3$  Y CMC-1  
CARAS EN  $S^1$  CON ESTRUCTURA  
COMPLEJA ARBITRARIA

MITTAG-LEFFLER THEOREM FOR  
MEROMORPHIC A-IMMERSIONS

LEY DE SNELL GENERALIZADA  
A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DE  
FINSLER

GRAVEDAD SUPERFICIAL DE UNA  
HIPERSUPERFICIE LUZ

CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES DE  
TRASLACIÓN Y SEPARABLES CON  
CURVATURA CONSTANTE

EL PROBLEMA DE BONNET  
EN ESPACIOS HOMOGÉNEOS  
LORENTZIANOS

SUPERFICIES ATRAPADAS EN PLANE  
FRONTED WAVES

INMERSIONES ESPACIALES A TRAVÉS  
DE HIPERSUPERFICIES LUZ EN  
VARIETADES DE LORENTZ

DINÁMICA DE PARTÍCULAS  
RELATIVISTAS CON CURVATURA Y  
TORSIÓN EN ESPACIOTIEMPOS...

SUBVARIETADES COMPLETAS  
ATRAPADAS EN ESPACIO-TIEMPOS  
GLOBALMENTE HIPERBÓLICOS

SOBRE EL PRIMER AUTOVALOR  
DEL OPERADOR DE LAPLACE PARA  
SUBVARIETADES COMPACTAS...

## El problema de Bonnet en espacios homogéneos lorentzianos

JOSÉ S. SANTIAGO, ILDEFONSO CASTRO, JOSÉ M. MANZANO

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Jaén

[jssantia@ujaen.es](mailto:jssantia@ujaen.es)

**Resumen:** Es bien sabido que una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^3$  está totalmente determinada por su métrica y por su segunda forma fundamental, esto es, si una superficie riemanniana  $(\Sigma, ds^2)$  y un endomorfismo autoadjunto  $S : T\Sigma \rightarrow T\Sigma$  verifican las ecuaciones de Gauss y Codazzi, entonces existe una única inmersión de esta superficie en  $\mathbb{R}^3$  salvo isometrías del ambiente. En 1867, Bonnet propuso un problema más general: ¿qué puede decirse sobre las inmersiones de superficies riemannianas si tan sólo conocemos la traza de  $S$ ? Este problema ha sido ampliamente tratado por Bobenko, Kamberov, Pedit y Pinkall. De forma más reciente, Gálvez, Martínez y Mira han dado una respuesta a este problema para espacios homogéneos  $E(k,t)$  con grupo de isometrías de dimensión 4. En esta charla trataremos este problema en espacios homogéneos lorentzianos.

SESIÓN ESPECIAL 12  
Geometría Diferencial y Teoría  
de Subvariedades

NUEVOS EJEMPLOS DE VARIEDADES  
CON ESTRUCTURAS COMPLEJAS  
SIMPLECTICAS

SUPERFICIES CMC-1 EN  $H^3$  Y CMC-1  
CARAS EN  $S^1$  CON ESTRUCTURA  
COMPLEJA ARBITRARIA

MITTAG-LEFFLER THEOREM FOR  
MEROMORPHIC  $A$ -IMMERSIONS

LEY DE SNELL GENERALIZADA  
A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DE  
FINSLER

GRAVEDAD SUPERFICIAL DE UNA  
HIPERSUPERFICIE LUZ

CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES DE  
TRASLACION Y SEPARABLES CON  
CURVATURA CONSTANTE

EL PROBLEMA DE BONNET  
EN ESPACIOS HOMOGÉNEOS  
LORENTZIANOS

SUPERFICIES ATRAPADAS EN PLANE  
FRONTED WAVES

INMERSIONES ESPACIALES A TRAVÉS  
DE HIPERSUPERFICIES LUZ EN  
VARIEDADES DE LORENTZ

DINÁMICA DE PARTÍCULAS  
RELATIVISTAS CON CURVATURA Y  
TORSIÓN EN ESPACIOTIEMPOS...

SUBVARIEDADES COMPLETAS  
ATRAPADAS EN ESPACIO-TIEMPOS  
GLOBALMENTE HIPERBÓLICOS

SOBRE EL PRIMER AUTOVALOR  
DEL OPERADOR DE LAPLACE PARA  
SUBVARIEDADES COMPACTAS...

MARTES, 23 DE ENERO:  
12:30 – 13:00



## Superficies atrapadas en plane fronted waves

JOSÉ ANTONIO SÁNCHEZ PELEGRÍN

Departamento de Informática y Análisis Numérico, Universidad de Córdoba  
[jpelegrin@uco.es](mailto:jpelegrin@uco.es)

**Resumen:** En esta conferencia presentaremos nuevos resultados de existencia y unicidad para subvariedades espaciales de codimensión arbitraria en espaciotiempos de tipo pp-wave. En concreto, para la familia de plane fronted waves obtendremos resultados de rigidez para subvariedades espaciales débilmente atrapadas. Además, obtendremos condiciones suficientes para garantizar que una subvariedad espacial de codimensión dos y curvatura media cero es un frente de onda del plane fronted wave.

### Referencias

- [1] F. Palomo, J.A.S. Pelegrín, A. Romero (2022). Rigidity results for complete spacelike submanifolds in plane fronted waves. RACSAM Rev. R. Acad. A, 116, 179, 1–10.
- [2] J.A.S. Pelegrín, A. Romero, R.M. Rubio (2016). On maximal hypersurfaces in Lorentz manifolds admitting a parallel lightlike vector field, Classical Quant. Grav., 33, 055003, 1–8.

MARTES, 23 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

SESIÓN ESPECIAL 12  
Geometría Diferencial y Teoría  
de Subvariedades

NUEVOS EJEMPLOS DE VARIETADES  
CON ESTRUCTURAS COMPLEJAS  
SIMPLECTICAS

SUPERFICIES CMC-1 EN  $H^3$  Y CMC-1  
CARAS EN  $S^1$  CON ESTRUCTURA  
COMPLEJA ARBITRARIA

MITTAG-LEFFLER THEOREM FOR  
MEROMORPHIC  $A$ -IMMERSIONS

LEY DE SNELL GENERALIZADA  
A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DE  
FINSLER

GRAVEDAD SUPERFICIAL DE UNA  
HIPERSUPERFICIE LUZ

CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES DE  
TRASLACION Y SEPARABLES CON  
CURVATURA CONSTANTE

EL PROBLEMA DE BONNET  
EN ESPACIOS HOMOGÉNEOS  
LORENTZIANOS

SUPERFICIES ATRAPADAS EN PLANE  
FRONTED WAVES

INMERSIONES ESPACIALES A TRAVÉS  
DE HIPERSUPERFICIES LUZ EN  
VARIETADES DE LORENTZ

DINÁMICA DE PARTÍCULAS  
RELATIVISTAS CON CURVATURA Y  
TORSIÓN EN ESPACIOTIEMPOS...

SUBVARIETADES COMPLETAS  
ATRAPADAS EN ESPACIO-TIEMPOS  
GLOBALMENTE HIPERBÓLICOS

SOBRE EL PRIMER AUTOVALOR  
DEL OPERADOR DE LAPLACE PARA  
SUBVARIETADES COMPACTAS...

## Inmersiones espaciales a través de hipersuperficies luz en variedades de Lorentz

RODRIGO MORÓN, FRANCISCO J. PALOMO

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Málaga

[ruyman@uma.es](mailto:ruyman@uma.es)

**Resumen:** Los espaciotiempos de Schwarzschild generalizados se presentan como variedades alabeadas donde la base es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  equipado con una métrica de Lorentz y la fibra es una variedad de Riemann. Esta familia incluye espaciotiempos físicamente relevantes estrechamente relacionados con modelos de agujeros negros. Los espaciotiempos de Schwarzschild generalizados están dotados de distribuciones involutivas que proporcionan foliaciones por hipersuperficies luminosas. En esta charla, veremos resultados sobre subvariedades espaciales inmersas en los espaciotiempos de Schwarzschild generalizados, principalmente, bajo el supuesto de que dichas subvariedades se encuentran en una hoja de las foliaciones anteriores. En este escenario, proporcionaremos una fórmula explícita para el campo vectorial curvatura media y estableceremos relaciones entre la geometría extrínseca e intrínseca de las subvariedades. Presentaremos varias caracterizaciones de los cortes y profundizaremos en el caso concreto donde la función de alabeo es la coordenada radial. Esta subfamilia incluye los espaciotiempos de Schwarzschild y Reissner-Nordström. Los resultados están incluidos en [2].

### Referencias

- [1] L.J. Alfás, V.L. Canovas and M. Rigoli (2018), Codimension two spacelike submanifolds into the light cone of Lorentz-Minkowski space, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics, 149(6), 1523-1553.
- [2] R. Morón, F.J. Palomo, Spacelike immersions in certain Lorentzian manifolds with lightlike foliations, preprint, <https://arxiv.org/pdf/2309.12749.pdf>

**Agradecimientos:** Esta trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto Spanish MICINN PID2020-118452GB-I00.

MARTES, 23 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

SESIÓN ESPECIAL 12  
Geometría Diferencial y Teoría  
de Subvariedades

NUEVOS EJEMPLOS DE VARIEDADES  
CON ESTRUCTURAS COMPLEJAS  
SIMPLECTICAS

SUPERFICIES CMC-1 EN  $H^3$  Y CMC-1  
CARAS EN  $S^1$  CON ESTRUCTURA  
COMPLEJA ARBITRARIARIA

MITTAG-LEFFLER THEOREM FOR  
MEROMORPHIC A-IMMERSIONS

LEY DE SNELL GENERALIZADA  
A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DE  
FINSLER

GRAVEDAD SUPERFICIAL DE UNA  
HIPERSUPERFICIE LUZ

CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES DE  
TRASLACION Y SEPARABLES CON  
CURVATURA CONSTANTE

EL PROBLEMA DE BONNET  
EN ESPACIOS HOMOGÉNEOS  
LORENTZIANOS

SUPERFICIES ATRAPADAS EN PLANE  
FRONTED WAVES

INMERSIONES ESPACIALES A TRAVÉS  
DE HIPERSUPERFICIES LUZ EN  
VARIEDADES DE LORENTZ

DINÁMICA DE PARTÍCULAS  
RELATIVISTAS CON CURVATURA Y  
TORSIÓN EN ESPACIOTIEMPOS...

SUBVARIEDADES COMPLETAS  
ATRAPADAS EN ESPACIO-TIEMPOS  
GLOBALMENTE HIPERBÓLICOS

SOBRE EL PRIMER AUTOVALOR  
DEL OPERADOR DE LAPLACE PARA  
SUBVARIEDADES COMPACTAS...

## Dinámica de partículas relativistas con curvatura y torsión en espaciotiempos Robertson-Walker generalizados

MARTÍN DE LA ROSA, JÓNATAN HERRERA, RAFAEL M. RUBIO

Departamento de Matemáticas, Universidad de Córdoba

f42rodin@uco.es

**Resumen:** En este trabajo [1] se estudian modelos de partículas relativistas que generalizan la dinámica geodésica de un cuerpo en caída libre. Para ello, se añaden a la acción términos que dependen de las curvaturas de Frenet de la trayectoria, siguiendo la idea introducida por M. S. Plyushchay [2]. Concretamente, consideramos funcionales construidos a partir de una combinación lineal de las dos primeras curvaturas (también conocidas como curvatura y torsión) y un término constante. Además de establecer las ecuaciones de movimiento generales en un espaciotiempo de dimensión  $2 + 1$ , obtenemos resultados que caracterizan las soluciones en espaciotiempos Robertson-Walker generalizados. A diferencia de estudios previos en la misma familia de espaciotiempos [3], [4] la técnica desarrollada en este trabajo posibilita la determinación de trayectorias temporales, más realistas desde el punto de vista relativista. Además de exhibir relaciones interesantes entre la curvatura y torsión de las trayectorias críticas con la curvatura de la fibra de los modelos cosmológicos, se encuentran ciertas cantidades conservadas que sugieren una posible generalización para la noción de masa de partículas en espaciotiempos con curvatura no necesariamente constante.

### Referencias

- [1] J. Herrera, M. de la Rosa, R. M. Rubio (2024). On the geometry and dynamics of relativistic particles in generalized Robertson–Walker spacetimes. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2450048.
- [2] M. S. Plyushchay (1989). Massive relativistic point particle with rigidity. *International Journal of Modern Physics A* 4, 15, 3851-3865.
- [3] M. Barros, M. Caballero, M. Ortega (2006). Massless particles in warped three spaces. *International Journal of Modern Physics A*, 21(3), 461-473.
- [4] J. Herrera, M. de la Rosa, R. M. Rubio (2021). Relativistic particles with torsion in three-dimensional non-vacuum spacetimes. *Journal of Mathematical Physics* 62, 062502.

MARTES, 23 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 12  
Geometría Diferencial y Teoría  
de Subvariedades

NUEVOS EJEMPLOS DE VARIETADES  
CON ESTRUCTURAS COMPLEJAS  
SIMPLECTICAS

SUPERFICIES CMC-1 EN  $H^3$  Y CMC-1  
CARAS EN  $S^1$  CON ESTRUCTURA  
COMPLEJA ARBITRARIA

MITTAG-LEFFLER THEOREM FOR  
MEROMORPHIC A-IMMERSIONS

LEY DE SNELL GENERALIZADA  
A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DE  
FINSLER

GRAVEDAD SUPERFICIAL DE UNA  
HIPERSUPERFICIE LUZ

CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES DE  
TRASLACIÓN Y SEPARABLES CON  
CURVATURA CONSTANTE

EL PROBLEMA DE BONNET  
EN ESPACIOS HOMOGÉNEOS  
LORENTZIANOS

SUPERFICIES ATRAPADAS EN PLANE  
FRONTED WAVES

INMERSIONES ESPACIALES A TRAVÉS  
DE HIPERSUPERFICIES LUZ EN  
VARIETADES DE LORENTZ

DINÁMICA DE PARTÍCULAS  
RELATIVISTAS CON CURVATURA Y  
TORSIÓN EN ESPACIOTIEMPOS...

SUBVARIETADES COMPLETAS  
ATRAPADAS EN ESPACIO-TIEMPOS  
GLOBALMENTE HIPERBÓLICOS

SOBRE EL PRIMER AUTOVALOR  
DEL OPERADOR DE LAPLACE PARA  
SUBVARIETADES COMPACTAS...

## Subvariedades completas atrapadas en espacio-tiempos globalmente hiperbólicos

ALMA L. ALBUJER, JÓNATAN HERRERA, RAFAEL M. RUBIO

Departamento de Matemáticas, Universidad de Córdoba

[alma.albuje@uco.es](mailto:alma.albuje@uco.es)

**Resumen:** En esta charla mostramos resultados de rigidez y de no existencia de subvariedades espaciales parabólicas con vector curvatura media causal en espacio-tiempos que admiten una descomposición ortogonal. Estos espacio-tiempos contemplan, en particular, a la familia de espacio-tiempos globalmente hiperbólicos. Por otro lado, también damos un resultado sobre la geometría de una familia más general de subvariedades en dichos espacio-tiempos, asumiendo la no existencia de mínimos o máximos locales de una determinada función. Como una aplicación de nuestros resultados en el ámbito de la relatividad general, obtenemos algunos resultados sobre superficies atrapadas (no necesariamente cerradas) en una familia muy amplia de espacio-tiempos. Los resultados presentados en esta charla están parcialmente incluidos en [1].

### Referencias

- [1] A.L. Albuje, J. Herrera, R.M. Rubio (2023). On complete trapped submanifolds in Globally Hyperbolic spacetimes. *J. Phys. A*, 56, Paper No. 345202, 20 pp.

MARTES, 23 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 12  
Geometría Diferencial y Teoría  
de Subvariedades

NUEVOS EJEMPLOS DE VARIEDADES  
CON ESTRUCTURAS COMPLEJAS  
SIMPLECTICAS

SUPERFICIES CMC-1 EN  $H^3$  Y CMC-1  
CARAS EN  $S^1$  CON ESTRUCTURA  
COMPLEJA ARBITRARIA

MITTAG-LEFFLER THEOREM FOR  
MEROMORPHIC  $A$ -IMMERSIONS

LEY DE SNELL GENERALIZADA  
A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DE  
FINSLER

GRAVEDAD SUPERFICIAL DE UNA  
HIPERSUPERFICIE LUZ

CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES DE  
TRASLACION Y SEPARABLES CON  
CURVATURA CONSTANTE

EL PROBLEMA DE BONNET  
EN ESPACIOS HOMOGÉNEOS  
LORENTZIANOS

SUPERFICIES ATRAPADAS EN PLANE  
FRONTED WAVES

INMERSIONES ESPACIALES A TRAVÉS  
DE HIPERSUPERFICIES LUZ EN  
VARIEDADES DE LORENTZ

DINÁMICA DE PARTÍCULAS  
RELATIVISTAS CON CURVATURA Y  
TORSIÓN EN ESPACIOTIEMPOS...

SUBVARIEDADES COMPLETAS  
ATRAPADAS EN ESPACIO-TIEMPOS  
GLOBALMENTE HIPERBÓLICOS

SOBRE EL PRIMER AUTOVALOR  
DEL OPERADOR DE LAPLACE PARA  
SUBVARIEDADES COMPACTAS...

## Sobre el primer autovalor del operador de Laplace para subvariedades compactas en $\mathbb{L}^{m+2}$ y $\mathbb{E}^{m+1}$

FRANCISCO J. PALOMO

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Málaga

[fpalomo@uma.es](mailto:fpalomo@uma.es)

**Resumen:** Presentaremos una nueva familia de cotas superiores extrínsecas para el primer autovalor del operador de Laplace de una subvariedad espacial compacta del espacio de Minkowski  $\mathbb{L}^{m+2}$ . En particular, las cotas obtenidas para subvariedades en una copia totalmente geodésica del espacio euclídeo  $\mathbb{E}^{m+1}$  en  $\mathbb{L}^{m+2}$  son inferiores a la cota de Reilly en [3]. Además, cada una de las cotas obtenidas es óptima para una clase geoméricamente notable de subvariedades.

### Referencias

- [1] F.J. Palomo, A. Romero (2022), On the first eigenvalue of the Laplace operator for compact spacelike submanifolds in Lorentz-Minkowski spacetime  $L^m$ , *P. Roy. Soc. Edinb. A Mat.*, 152, 311-330.
- [2] F.J. Palomo, A. Romero, New extrinsic upper bounds on the first eigenvalue of the Laplace operator for compact submanifolds in Euclidean spaces, en preparación.
- [3] R.C. Reilly (1977), On the first eigenvalue of the Laplace operator for compact submanifolds of Euclidean space, *Comment. Mat. Helvetici*, 52, 525-533.

**Agradecimientos:** Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto Spanish MICINN PID2020-118452GB-I00.

MARTES, 23 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

SESIÓN ESPECIAL 12  
Geometría Diferencial y Teoría  
de Subvariedades

NUEVOS EJEMPLOS DE VARIETADES  
CON ESTRUCTURAS COMPLEJAS  
SIMPLECTICAS

SUPERFICIES CMC-1 EN  $H^3$  Y CMC-1  
CARAS EN  $S^1$  CON ESTRUCTURA  
COMPLEJA ARBITRARIA

MITTAG-LEFFLER THEOREM FOR  
MEROMORPHIC A-IMMERSIONS

LEY DE SNELL GENERALIZADA  
A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DE  
FINSLER

GRAVEDAD SUPERFICIAL DE UNA  
HIPERSUPERFICIE LUZ

CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES DE  
TRASLACION Y SEPARABLES CON  
CURVATURA CONSTANTE

EL PROBLEMA DE BONNET  
EN ESPACIOS HOMOGÉNEOS  
LORENTZIANOS

SUPERFICIES ATRAPADAS EN PLANE  
FRONTED WAVES

INMERSIONES ESPACIALES A TRAVÉS  
DE HIPERSUPERFICIES LUZ EN  
VARIETADES DE LORENTZ

DINÁMICA DE PARTÍCULAS  
RELATIVISTAS CON CURVATURA Y  
TORSIÓN EN ESPACIOTIEMPOS...

SUBVARIETADES COMPLETAS  
ATRAPADAS EN ESPACIO-TIEMPOS  
GLOBALMENTE HIPERBÓLICOS

SOBRE EL PRIMER AUTOVALOR  
DEL OPERADOR DE LAPLACE PARA  
SUBVARIETADES COMPACTAS...

## SESIÓN ESPECIAL 13 Advanced methods for differential problems and their applications

### Organizers:

**SEVERIANO GONZÁLEZ-PINTO**  
(University of La Laguna)

**INMACULADA HIGUERAS**  
(Public University of Navarre)

**JUAN IGNACIO MONTIJANO**  
(University of Zaragoza)

### Summary:

The aim of this Mini-Symposium is to promote, encourage, cooperate, and bring together researchers in the fields of the numerical solution of differential problems and their applications. In particular, special attention will be dedicated to the time-integration through the analysis, construction and development of efficient numerical methods which are able to accurately preserve the qualitative and quantitative behavior of the theoretical solution. Applications in different contexts will also be considered.

**SESIÓN ESPECIAL 13**  
Advanced methods for differential  
problems and their applications

**A NEW METHOD TO SOLVE THE 2D  
SCHRÖDINGER EQUATION**

**TAYLORED NUMERICAL MODELING  
OF REACTION-DIFFUSION PDES FROM  
APPLICATIONS**

**NUMERICAL PRESERVATION  
PRINCIPLES FOR STOCHASTIC  
DYNAMICAL SYSTEMS**

**AMF-TASE-W METHODS FOR THE  
TIME INTEGRATION OF PARABOLIC  
PDES**

**REDUCTION OF THE COMPUTATIONAL  
COST OF AEROELASTIC CODES FOR  
WIND...**

**W-METHODS WITH REDUCED  
EVALUATIONS OF THE VECTOR FIELD**

**THREE-STAGE PEER METHODS  
FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF  
SECOND ORDER IVPs**

**STRONG STABILITY FOR RUNGE-  
KUTTA SCHEMES ON A CLASS OF  
NONLINEAR PROBLEMS REVISITED**

## A new method to solve the 2D Schrödinger equation

MARNIX VAN DAELE, TOON BAEYENS

Department of Applied Mathematics, Computer Science and Statistics, Ghent University

[Marnix.VanDaele@ugent.be](mailto:Marnix.VanDaele@ugent.be)

**Abstract:** We consider the numerical solution of the two-dimensional linear time-independent Schrödinger equation

$$-\nabla^2\psi(x, y) + V(x, y)\psi(x, y) = E\psi(x, y),$$

on a bounded, sufficiently regular domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  subject to homogeneous Dirichlet boundary conditions. The solutions consist of real eigenvalues  $E$  and corresponding eigenfunctions  $\psi(x, y)$ .

The method we propose here is inspired by Ixaru, who presented in [1] an adaptation of a well-known technique developed by Titchmarsh: in the  $x$ -direction the eigenfunction is expressed in well-chosen, yet  $y$ -dependent sets of basis functions. Another inspiring idea was found in [2], where the authors propose a simple, easy to implement method based upon high order finite difference approximations. Numerical examples were reported with similar accuracies as the method in [1].

The combination of these two ideas, together with the improvements from [3] and the use of very efficient algorithms for solving the one-dimensional Schrödinger equations [4], leads to a new method.

### References

- [1] L. Gr. Ixaru (2010). New numerical method for the eigenvalue problem of the 2D Schrödinger equation. *Comput. Phys. Commun.*, 181, 1738–1742.
- [2] Z. Wang and H. Shao (2009). A new kind of discretization scheme for solving a two-dimensional time-independent Schrödinger equation. *Comput. Phys. Commun.*, 180, 842–849.
- [3] T. Baeyens and M. Van Daele (2022). Improvements to the computation of eigenvalues and eigenfunctions of two-dimensional Schrödinger equations by constant perturbation based algorithms. *J. Comput. Appl. Math.*, 412, 114292.
- [4] T. Baeyens and M. Van Daele (2021). The fast and accurate computation of eigenvalues and eigenfunctions of time-independent one-dimensional Schrödinger equations. *Comput. Phys. Commun.*, 258, 107568.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 13  
Advanced methods for differential  
problems and their applications

A NEW METHOD TO SOLVE THE 2D  
SCHRÖDINGER EQUATION

TAYLORED NUMERICAL MODELING  
OF REACTION-DIFFUSION PDES FROM  
APPLICATIONS

NUMERICAL PRESERVATION  
PRINCIPLES FOR STOCHASTIC  
DYNAMICAL SYSTEMS

AMF-TASE-W METHODS FOR THE  
TIME INTEGRATION OF PARABOLIC  
PDES

REDUCTION OF THE COMPUTATIONAL  
COST OF AEROELASTIC CODES FOR  
WIND...

W-METHODS WITH REDUCED  
EVALUATIONS OF THE VECTOR FIELD

THREE-STAGE PEER METHODS  
FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF  
SECOND ORDER IVPs

STRONG STABILITY FOR RUNGE-  
KUTTA SCHEMES ON A CLASS OF  
NONLINEAR PROBLEMS REVISITED

## Taylorred numerical modeling of reaction-diffusion PDEs from applications

D. CONTE<sup>1</sup>, G. FRASCA-CACCIA<sup>1</sup>, G. PAGANO<sup>1</sup>, B. PATERNOSTER<sup>1</sup>, C. VALENTINO<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematics, University of Salerno

<sup>2</sup>Department of Industrial Engineering, University of Salerno

dajconte@unisa.it

**Abstract:** We consider the numerical solution of reaction-diffusion models from applications, among which we mention: corrosion of metallic materials [2] (Mai et al. 2016, Waschinsky et al. 2021); deterioration of architectural works [1]; vegetation phenomena [4] (Eigentler et al. 2019). These models are often characterized by high stiffness and a-priori known properties, such as conservation laws, positivity, oscillating and long-term behavior of the solution, which would be appropriate to preserve in the discrete setting for choices of large step-sizes [2, 3, 4].

To this end, we propose new problem-taylorred numerical methods, based on the improvement and/or generalization of known techniques, such as exponential fitting, non-standard finite differences, TASE preconditioners [5] (Calvo et al. 2021). Numerical results testify that the shown methods are competitive in solving reaction-diffusion models from applications.

### References

- [1] F. Colace, D. Conte, G. Frasca-Caccia, A. Lorusso, D. Santaniello, C. Valentino (2023). An IoT-based framework for the enjoyment and protection of Cultural Heritage Artifacts. TwinNets.
- [2] D. Conte, G. Frasca-Caccia (2022). A MATLAB code for the computational solution of a phase field model for pitting corrosion. Dolomites Res. Notes Approx., 15(2), 47–65.
- [3] D. Conte, G. Frasca-Caccia (2023). Exponentially fitted methods with a local energy conservation law. Adv. Comput. Math., 49(4), 49.
- [4] D. Conte, G. Pagano, B. Paternoster (2023). Nonstandard finite differences numerical methods for a vegetation reaction-diffusion model. J. Comput. Appl. Math., 419, 114790.
- [5] D. Conte, G. Pagano, B. Paternoster (2023). Time-accurate and highly-stable explicit peer methods for stiff differential problems. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 119, 107136.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

SESIÓN ESPECIAL 13  
Advanced methods for differential  
problems and their applications

A NEW METHOD TO SOLVE THE 2D  
SCHRÖDINGER EQUATION

TAYLORED NUMERICAL MODELING  
OF REACTION-DIFFUSION PDES FROM  
APPLICATIONS

NUMERICAL PRESERVATION  
PRINCIPLES FOR STOCHASTIC  
DYNAMICAL SYSTEMS

AMF-TASE-W METHODS FOR THE  
TIME INTEGRATION OF PARABOLIC  
PDES

REDUCTION OF THE COMPUTATIONAL  
COST OF AEROELASTIC CODES FOR  
WIND...

W-METHODS WITH REDUCED  
EVALUATIONS OF THE VECTOR FIELD

THREE-STAGE PEER METHODS  
FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF  
SECOND ORDER IVPs

STRONG STABILITY FOR RUNGE-  
KUTTA SCHEMES ON A CLASS OF  
NONLINEAR PROBLEMS REVISITED



## Numerical preservation principles for stochastic dynamical systems

RAFFAELE D'AMBROSIO

Dipartimento di Ingegneria e Scienze dell' Informazione e Matematica,  
Universita degli studi dell' Aquila, Itali  
[raffaele.dambrosio@univaq.it](mailto:raffaele.dambrosio@univaq.it)

**Abstract:** The talk is aimed to highlight some principles of stochastic geometric numerical integration, i.e., on the ability of numerical methods to preserve characteristic features of stochastic dynamics. In particular, the attention is focused on stochastic differential equations satisfying some characteristic invariance laws. The behaviour of stochastic one-step methods in the preservation of mean-square contractivity will be analyzed. The analysis will also be conveyed to the discretization of stochastic Hamiltonian problems and the numerical long-term preservation of the behavior of the expected Hamiltonian. The theoretical analysis will also be supported by selected numerical tests.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

SESIÓN ESPECIAL 13  
Advanced methods for differential  
problems and their applications

A NEW METHOD TO SOLVE THE 2D  
SCHRÖDINGER EQUATION

TAYLORED NUMERICAL MODELING  
OF REACTION-DIFFUSION PDES FROM  
APPLICATIONS

NUMERICAL PRESERVATION  
PRINCIPLES FOR STOCHASTIC  
DYNAMICAL SYSTEMS

AMF-TASE-W METHODS FOR THE  
TIME INTEGRATION OF PARABOLIC  
PDES

REDUCTION OF THE COMPUTATIONAL  
COST OF AEROELASTIC CODES FOR  
WIND...

W-METHODS WITH REDUCED  
EVALUATIONS OF THE VECTOR FIELD

THREE-STAGE PEER METHODS  
FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF  
SECOND ORDER IVPs

STRONG STABILITY FOR RUNGE-  
KUTTA SCHEMES ON A CLASS OF  
NONLINEAR PROBLEMS REVISITED

## AMF-TASE-W methods for the time integration of parabolic PDEs

D. HERNÁNDEZ-ABREU, SEVERIANO GONZÁLEZ-PINTO, DAJANA CONTE,  
GIOVANNI PAGANO

Department Análisis Matemático, University La Laguna  
[dhabreu@ull.edu.es](mailto:dhabreu@ull.edu.es)

**Abstract:** We consider the application of the Approximate Matrix Factorization in combination with TASE W-methods [1, 2, 4] for the numerical solution of semi-discrete parabolic Partial Differential Equations. Although for AMF W-methods the temporal order of consistency is immediately obtained from that of the underlying W-method, such property needs further discussion for the newly introduced AMF-TASE W-methods. It is shown [3] that the parallel structure of the latter methods allows to retain the order of consistency of the underlying TASE W-method. Numerical experiments will be presented to assess the consistency result and to show that the proposed schemes are competitive to existing AMF W-methods.

Joint work with Severiano González-Pinto (University of La Laguna) and Dajana Conte and Giovanni Pagano (University of Salerno).

### References

- [1] M. Bassenne, L. Fu and A. Mani (2021). Time-Accurate and highly-Stable Explicit operators for stiff differential equations. *J. Comp. Phys.*, 424, 109847.
- [2] M. Calvo, J.I. Montijano and L. Rández (2021). A note on the stability of time-accurate and highly-stable explicit operators for stiff differential equations. *J. Comp. Phys.*, 436, 110316.
- [3] D. Conte, S. González-Pinto, D. Hernández-Abreu and G. Pagano (2023). On Approximate Matrix Factorization and TASE W-methods for the time integration of parabolic Partial Differential Equations. Submitted for publication.
- [4] S. González-Pinto, D. Hernández-Abreu, G. Pagano and S. Pérez-Rodríguez (2023). Generalized TASE-RK methods for stiff problems. *Appl. Numer. Math.*, 188, 129-145.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

SESIÓN ESPECIAL 13  
Advanced methods for differential  
problems and their applications

A NEW METHOD TO SOLVE THE 2D  
SCHRÖDINGER EQUATION

TAYLORED NUMERICAL MODELING  
OF REACTION-DIFFUSION PDES FROM  
APPLICATIONS

NUMERICAL PRESERVATION  
PRINCIPLES FOR STOCHASTIC  
DYNAMICAL SYSTEMS

AMF-TASE-W METHODS FOR THE  
TIME INTEGRATION OF PARABOLIC  
PDES

REDUCTION OF THE COMPUTATIONAL  
COST OF AEROELASTIC CODES FOR  
WIND...

W-METHODS WITH REDUCED  
EVALUATIONS OF THE VECTOR FIELD

THREE-STAGE PEER METHODS  
FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF  
SECOND ORDER IVPs

STRONG STABILITY FOR RUNGE-  
KUTTA SCHEMES ON A CLASS OF  
NONLINEAR PROBLEMS REVISITED

## Reduction of the computational cost of aeroelastic codes for wind turbines

TEO ROLDÁN, INMACULADA HIGUERAS, RAQUEL MARTÍN SAN ROMÁN  
Department of Statistics, Computer Science, and Mathematics, Public University of Navarre  
[teo@unavarra.es](mailto:teo@unavarra.es)

**Abstract:** In recent wind turbine designs, larger and more powerful machines are increasingly used with the aim of reducing installation and maintenance costs. This increase in rotor size and blade flexibility requires, for a more realistic representation of the physics of the new designs, the development of higher-level models. Consequently, the computational cost required to perform the calculations increases.

The main objective of this study is to reduce the computational cost of some advanced modelling codes. This will enable improved machine design, evaluation and certification processes in industry.

Much of the computational cost in numerical simulation codes is due to spatial discretization and temporal integration of the differential problem associated with the model. A small number of numerical methods (RK4, PCC, PC2B,...) are currently used in the wind turbine literature. However, in the field of numerical simulation there are a variety of schemes, some of which could work very well in this context, such as IMEX methods, RK methods specific to stiff problems, variable step implementation, error estimation, other spatial discretizations.

Joint work with Inmaculada Higuera (Public University of Navarre), and Raquel Martín San Román (National Renewable Energy Centre (CENER)).

### References

- [1] K. M. KecsKemety, J. J. McNamara (2011). Influence of wake effects and inflow turbulence on wind turbine loads. *AIAA Journal*, 49(11), 2564–2576.
- [2] J. G. Leishman, M. J. B., and A. Bagai (2002). Free-vortex filament methods for the analysis of helicopter rotor wakes. *Journal of Aircraft*, 39(5), 759–775.
- [3] R. Martín-San-Román, P. Benito-Cia, J. Azcona-Armendáriz, A. Cuerva-Tejero (2021). Validation of a free vortex filament wake module for the integrated simulation of multi-rotor wind turbines. *Renewable Energy* 179, 1706–1718.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

SESIÓN ESPECIAL 13  
Advanced methods for differential problems and their applications

A NEW METHOD TO SOLVE THE 2D SCHRÖDINGER EQUATION

TAYLORED NUMERICAL MODELING OF REACTION-DIFFUSION PDES FROM APPLICATIONS

NUMERICAL PRESERVATION PRINCIPLES FOR STOCHASTIC DYNAMICAL SYSTEMS

AMF-TASE-W METHODS FOR THE TIME INTEGRATION OF PARABOLIC PDES

REDUCTION OF THE COMPUTATIONAL COST OF AEROELASTIC CODES FOR WIND...

W-METHODS WITH REDUCED EVALUATIONS OF THE VECTOR FIELD

THREE-STAGE PEER METHODS FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF SECOND ORDER IVPs

STRONG STABILITY FOR RUNGE-KUTTA SCHEMES ON A CLASS OF NONLINEAR PROBLEMS REVISITED

## W-methods with reduced evaluations of the vector field

J. I. MONTIJANO, S. GONZÁLEZ-PINTO, D. HERNÁNDEZ-ABREU, L. RÁNDEZ

IUMA-Department of Applied Mathematics, University of Zaragoza

[monti@unizar.es](mailto:monti@unizar.es)

**Abstract:** In this talk, we present a new family of W-methods for the numerical solution of stiff initial value problems. These methods have a special structure in which some of the evaluations of the vector field are re-used in one or several stages, reducing in this way its computational cost. This can be very convenient when the evaluation of the derivative function is expensive. The properties of accuracy and stability are studied. Some numerical experiments show the performance of the new methods.

Joint work with Severiano González-Pinto and Domingo Hernández-Abreu (University of La Laguna), and Luis Rández (Universidad de Zaragoza).

### References

- [1] S. González-Pinto, D. Hernández-Abreu, G. Pagano, S. Pérez-Rodríguez. Generalized TASE-RK methods for stiff problems. To appear in Appl. Numer. Math.
- [2] T. Steihaug and A. Wolfbrandt (1979). An attempt to avoid exact Jacobian and nonlinear equations in the numerical solution of stiff differential equations. Math. Comp. 33, No. 146, 521–534.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 13  
Advanced methods for differential  
problems and their applications

A NEW METHOD TO SOLVE THE 2D  
SCHRÖDINGER EQUATION

TAYLORED NUMERICAL MODELING  
OF REACTION-DIFFUSION PDES FROM  
APPLICATIONS

NUMERICAL PRESERVATION  
PRINCIPLES FOR STOCHASTIC  
DYNAMICAL SYSTEMS

AMF-TASE-W METHODS FOR THE  
TIME INTEGRATION OF PARABOLIC  
PDES

REDUCTION OF THE COMPUTATIONAL  
COST OF AEROELASTIC CODES FOR  
WIND...

W-METHODS WITH REDUCED  
EVALUATIONS OF THE VECTOR FIELD

THREE-STAGE PEER METHODS  
FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF  
SECOND ORDER IVPs

STRONG STABILITY FOR RUNGE-  
KUTTA SCHEMES ON A CLASS OF  
NONLINEAR PROBLEMS REVISITED

## Three-stage Peer methods for the numerical solution of second order IVPs

LUIS RÁNDEZ, MANUEL CALVO, JUAN I. MONTIJANO  
IUMA-Department of Applied Mathematics, University of Zaragoza  
[randez@unizar.es](mailto:randez@unizar.es)

**Abstract:** In this work, we solve numerically second order initial value problems  $y'' = f(t, y)$  by means of 3-stage explicit two-step Peer methods, given by

$$\begin{aligned} Y_{m+1} &= BY_m + hAZ_m + h^2QF_{m-1} + h^2RF_m, \\ Z_{m+1} &= \widehat{B}Z_m + h\widehat{Q}F_{m-1} + h\widehat{R}F_m, \end{aligned} \quad (1)$$

where the stage vectors evaluated at  $t_{mi} = t_m + c_i h$  are

$$\begin{aligned} Y_m &= (Y_{mi}), \text{ where } Y_{mi} \simeq y(t_{mi}), \\ Z_m &= (Z_{mi}), \text{ where } Z_{mi} \simeq y'(t_{mi}), \\ F_m &= (f(t_{mi}, Y_{mi})). \end{aligned} \quad (2)$$

We propose a 3-stage method with one reused stage, so that only two effective function evaluations of the derivative are needed per step. We analyze the 0-stability, consistency and convergence of a particular scheme of order five.

### References

- [1] S. Jebens, R. Weiner, H. Podhaisky, B.A. Schmitt (2008). Explicit multi-step peer methods for special second-order differential equations. Applied Mathematics and Computation, 202, 803–813.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 13  
Advanced methods for differential  
problems and their applications

A NEW METHOD TO SOLVE THE 2D  
SCHRÖDINGER EQUATION

TAYLORED NUMERICAL MODELING  
OF REACTION-DIFFUSION PDES FROM  
APPLICATIONS

NUMERICAL PRESERVATION  
PRINCIPLES FOR STOCHASTIC  
DYNAMICAL SYSTEMS

AMF-TASE-W METHODS FOR THE  
TIME INTEGRATION OF PARABOLIC  
PDES

REDUCTION OF THE COMPUTATIONAL  
COST OF AEROELASTIC CODES FOR  
WIND...

W-METHODS WITH REDUCED  
EVALUATIONS OF THE VECTOR FIELD

THREE-STAGE PEER METHODS  
FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF  
SECOND ORDER IVPs

STRONG STABILITY FOR RUNGE-  
KUTTA SCHEMES ON A CLASS OF  
NONLINEAR PROBLEMS REVISITED

## Strong stability for Runge–Kutta schemes on a class of nonlinear problems revisited

INMACULADA HIGUERAS

INAMAT<sup>2</sup> and Department of Statistics, Computer Science, and Mathematics,  
Public University of Navarre  
[higueras@unavarra.es](mailto:higueras@unavarra.es)

**Abstract:** We consider the numerical preservation of qualitative properties (monotonicity, contractivity, positivity, etc.) when explicit Runge–Kutta (RK) methods are used to solve a class of nonlinear differential problems. This issue was studied in [1] in the framework of Strong Stability Preserving (SSP) methods, and new modified threshold factors were defined. For many methods, the stepsize restrictions obtained with this approach were better than the ones given in terms of the Kraaijevanger’s coefficient in the SSP theory. However, some open questions were posed in [1]. In this talk we go deeper in this topic. Some numerical experiments are given to illustrate the results obtained.

### References

- [1] I. Higueras (2013). Strong stability for Runge–Kutta schemes on a class of nonlinear problems. *J. Sci. Comput.*, 57, 518-535.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

SESIÓN ESPECIAL 13  
Advanced methods for differential  
problems and their applications

A NEW METHOD TO SOLVE THE 2D  
SCHRÖDINGER EQUATION

TAYLORED NUMERICAL MODELING  
OF REACTION-DIFFUSION PDES FROM  
APPLICATIONS

NUMERICAL PRESERVATION  
PRINCIPLES FOR STOCHASTIC  
DYNAMICAL SYSTEMS

AMF-TASE-W METHODS FOR THE  
TIME INTEGRATION OF PARABOLIC  
PDES

REDUCTION OF THE COMPUTATIONAL  
COST OF AEROELASTIC CODES FOR  
WIND...

W-METHODS WITH REDUCED  
EVALUATIONS OF THE VECTOR FIELD

THREE-STAGE PEER METHODS  
FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF  
SECOND ORDER IVPs

STRONG STABILITY FOR RUNGE–  
KUTTA SCHEMES ON A CLASS OF  
NONLINEAR PROBLEMS REVISITED

## SESIÓN ESPECIAL 14

### Métodos numéricos para la resolución de problemas no lineales

#### Organizadores:

JOSÉ ANTONIO EZQUERRO FERNÁNDEZ

(Universidad de La Rioja)

JOSÉ MANUEL GUTIÉRREZ JIMÉNEZ

(Universidad de La Rioja)

MIGUEL ÁNGEL HERNÁNDEZ VERÓN

(Universidad de La Rioja)

#### Descripción:

La resolución de ecuaciones no lineales es uno de los problemas matemáticos que aparecen con mayor frecuencia en las diferentes disciplinas científicas y los métodos iterativos son una pieza clave en la resolución de este tipo de ecuaciones. Esta sesión especial se sitúa en el marco general de la aplicación de métodos iterativos para la resolución de problemas no lineales, centrando nuestro interés en el tratamiento numérico de la resolución de diversos tipos de problemas en los que aparecen ecuaciones no lineales de diversa índole: ecuaciones escalares, sistemas de ecuaciones, ecuaciones matriciales, ecuaciones integrales, problemas de valores en la frontera, ecuaciones en derivadas parciales, problemas de optimización, etc. Y los objetivos de esta sesión se centran en mostrar los últimos avances llevados a cabo en este campo.

**SESIÓN ESPECIAL 14**  
Métodos numéricos para la  
resolución de problemas no lineales

ESTIMACIÓN DE INVERSAS  
MATRICIALES MEDIANTE MÉTODOS  
ITERATIVOS CON FUNCIONES PESO...

FAMILIA PARAMÉTRICA VECTORIAL  
DE MÉTODOS ITERATIVOS DE ORDEN 4  
LIBRES DE JACOBIANAS

ITERATIVE METHODS FOR SOLVING  
NOISY NONLINEAR EQUATIONS

ALGUNAS SORPRESAS EN EL  
ESTUDIO DINÁMICO DE LA FAMILIA  
CHEBYSHEV-HALLEY

ANÁLISIS DINÁMICO Y NUMÉRICO  
DE MÉTODOS CLÁSICOS PARA  
ENCONTRAR RAÍCES...

UNA RECONSTRUCCIÓN NO LINEAL,  
LOCAL Y SIMÉTRICA DE CLASE CASI  
C3 QUE CONSERVA...

UNA CLASIFICACIÓN TOPOLÓGICA  
DE LAS FUNCIONES RACIONALES  
COMPLEJAS...

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS  
DE ECUACIONES INTEGRALES  
INTERVALARES

SOLUCIÓN APROXIMADA DE UN  
PROBLEMA INVERSO ASOCIADO A UN  
SISTEMA DE ECUACIONES...

APROXIMACIÓN DE NÚMEROS  
DIFUSOS Y DE FUNCIONES DIFUSO  
VALUADAS

UN ENFOQUE GEOMÉTRICO PARA LA  
ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN  
ALGUNOS PROBLEMAS CONVEXOS

UN MÉTODO DE ORDEN REDUCIDO  
LOCAL PARA UN PROBLEMA DE  
RAYLEIGH-BÉNARD

## Estimación de inversas matriciales mediante métodos iterativos con funciones peso y su análisis de estabilidad

ALICIA CORDERO, ELAINE A. SEGURA, JUAN R. TORREGROSA,  
MARÍA P. VASSILEVA

Inst. Matemáticas Multidisciplinar, Universitat Politècnica de València  
acordero@mat.upv.es

**Resumen:** En este trabajo mostramos una familia biparamétrica de métodos iterativos sin memoria para calcular la inversa de una matriz no singular, sin usar operadores inversos en su fórmula iterativa. Dicha familia se diseña utilizando la técnica de funciones peso y tiene al método clásico de Homeier [1] como caso particular,

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{2}f(x_k) \left( \frac{1}{f'(x_k)} + \frac{1}{f'(y_k)} \right).$$

Todos los elementos de la familia tienen orden de convergencia cúbico, tanto en el caso escalar como en el matricial.

Por otra parte, presentamos un análisis dinámico específico para el cálculo de inversas matriciales que, no sólo refleja los resultados teóricos en cuanto a condiciones de convergencia, sino que hace visibles regiones de comportamiento estable fuera de la región donde se ha demostrado su convergencia. Estos resultados se corroboran en las pruebas numéricas con matrices aleatorias de gran tamaño.

### Referencias

- [1] H. H. H. Homeier (2005). On Newton-type methods with cubic convergence. J. Comput. Appl. Math. 176, 425-432.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 14  
Métodos numéricos para la  
resolución de problemas no lineales

ESTIMACIÓN DE INVERSAS  
MATRICIALES MEDIANTE MÉTODOS  
ITERATIVOS CON FUNCIONES PESO...

FAMILIA PARAMÉTRICA VECTORIAL  
DE MÉTODOS ITERATIVOS DE ORDEN 4  
LIBRES DE JACOBIANAS

ITERATIVE METHODS FOR SOLVING  
NOISY NONLINEAR EQUATIONS

ALGUNAS SORPRESAS EN EL  
ESTUDIO DINÁMICO DE LA FAMILIA  
CHEBYSHEV-HALLEY

ANÁLISIS DINÁMICO Y NUMÉRICO  
DE MÉTODOS CLÁSICOS PARA  
ENCONTRAR RAÍCES...

UNA RECONSTRUCCIÓN NO LINEAL,  
LOCAL Y SIMÉTRICA DE CLASE CASI  
C3 QUE CONSERVA...

UNA CLASIFICACIÓN TOPOLÓGICA  
DE LAS FUNCIONES RACIONALES  
COMPLEJAS...

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS  
DE ECUACIONES INTEGRALES  
INTERVALARES

SOLUCIÓN APROXIMADA DE UN  
PROBLEMA INVERSO ASOCIADO A UN  
SISTEMA DE ECUACIONES...

APROXIMACIÓN DE NÚMEROS  
DIFUSOS Y DE FUNCIONES DIFUSO  
VALUADAS

UN ENFOQUE GEOMÉTRICO PARA LA  
ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN  
ALGUNOS PROBLEMAS CONVEXOS

UN MÉTODO DE ORDEN REDUCIDO  
LOCAL PARA UN PROBLEMA DE  
RAYLEIGH-BÉNARD



## Familia paramétrica vectorial de métodos iterativos de orden 4 libres de Jacobianas

JUAN R. TORREGROSA, ALICIA CORDERO, RENSO ROJAS,  
PAULA TRIGUERO-NAVARRO  
Inst. Matemáticas Multidisciplinar, Universitat Politècnica de València  
jrtorre@mat.upv.es

**Resumen:** En este trabajo, presentamos una familia paramétrica de métodos iterativos, libres de matrices Jacobianas, para aproximar la solución de sistemas no lineales  $F(x) = 0$ .

Los autores diseñaron en [1] una clase de esquemas para la resolución de sistemas no lineales, óptimos según la conjetura publicada en [2]. A partir de este trabajo, se intenta eliminar las matrices Jacobianas utilizadas en el proceso iterativo, manteniendo el orden de convergencia. El resultado es la siguiente familia biparamétrica, cuya expresión iterativa es

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= x^{(k)} - [x^{(k)} + rF(x^{(k)}), x^{(k)} - rF(x^{(k)}); F]^{-1} F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} &= y^{(k)} - [x^{(k)} + rF(x^{(k)}), x^{(k)} - rF(x^{(k)}); F]^{-1} (p_k F(y^{(k)}) + q_k F(x^{(k)})), \end{aligned}$$

donde

$$\nu_k = \frac{F(y^{(k)})^T F(y^{(k)})}{F(x^{(k)})^T F(x^{(k)})}, \quad K_k = \frac{1}{1 + \lambda \nu_k}, \quad p_k = K_k(1 + \psi \nu_k), \quad y \quad q_k = 2K_k \nu_k.$$

Demostremos que todos los métodos de la familia tienen orden 4, con independencia del valor de los parámetros  $r$ ,  $\lambda$  y  $\psi$ . Analizamos el índice de eficiencia de estos esquemas, comparándolos con otros existentes, así como su comportamiento sobre ejemplos académicos y aplicados.

### Referencias

- [1] A. Cordero, R. Rojas-Hiciano, J. R. Torregrosa, M. Penkova (2023). A highly efficient class of optimal fourth-order methods for solving nonlinear systems. *Numerical Algorithms*, 116 <https://doi.org/10.1007/s11075-023-01631-9>
- [2] V. Arroyo, A. Cordero, J. R. Torregrosa (2011). Approximation of artificial satellites' preliminary orbits: The efficiency challenge. *Mathematical and Computer Modelling*, 54 (7), 1802-1807.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

SESIÓN ESPECIAL 14  
Métodos numéricos para la  
resolución de problemas no lineales

ESTIMACIÓN DE INVERSAS  
MATRICIALES MEDIANTE MÉTODOS  
ITERATIVOS CON FUNCIONES PESO...

FAMILIA PARAMÉTRICA VECTORIAL  
DE MÉTODOS ITERATIVOS DE ORDEN 4  
LIBRES DE JACOBIANAS

ITERATIVE METHODS FOR SOLVING  
NOISY NONLINEAR EQUATIONS

ALGUNAS SORPRESAS EN EL  
ESTUDIO DINÁMICO DE LA FAMILIA  
CHEBYSHEV-HALLEY

ANÁLISIS DINÁMICO Y NUMÉRICO  
DE MÉTODOS CLÁSICOS PARA  
ENCONTRAR RAÍCES...

UNA RECONSTRUCCIÓN NO LINEAL,  
LOCAL Y SIMÉTRICA DE CLASE CASI  
C3 QUE CONSERVA...

UNA CLASIFICACIÓN TOPOLÓGICA  
DE LAS FUNCIONES RACIONALES  
COMPLEJAS...

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS  
DE ECUACIONES INTEGRALES  
INTERVALES

SOLUCIÓN APROXIMADA DE UN  
PROBLEMA INVERSO ASOCIADO A UN  
SISTEMA DE ECUACIONES...

APROXIMACIÓN DE NÚMEROS  
DIFUSOS Y DE FUNCIONES DIFUSO  
VALUADAS

UN ENFOQUE GEOMÉTRICO PARA LA  
ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN  
ALGUNOS PROBLEMAS CONVEXOS

UN MÉTODO DE ORDEN REDUCIDO  
LOCAL PARA UN PROBLEMA DE  
RAYLEIGH-BÉNARD

## Iterative methods for solving noisy nonlinear equations

VICENTE F. CANDELA

Departament Matemàtiques, Universitat de València

[candela@uv.es](mailto:candela@uv.es)

**Abstract:** Iterative methods for solving nonlinear equations allow a certain amount of error due to contractivity. However, convergence theorems (local, semilocal or global) require deterministic regularity conditions.

Is it possible to consider Newton type methods when the function is corrupted by stochastic noise? How can a method deal with Gaussian noise? How can we modify convergence theorems like Kantorovich's in order to obtain good bounds of convergence?

In this talk, we provide some hints to answer these questions, and we propose some strategies which help to solve these problems.

SESIÓN ESPECIAL 14  
Métodos numéricos para la  
resolución de problemas no lineales

ESTIMACIÓN DE INVERSAS  
MATRICIALES MEDIANTE MÉTODOS  
ITERATIVOS CON FUNCIONES PESO...

FAMILIA PARAMÉTRICA VECTORIAL  
DE MÉTODOS ITERATIVOS DE ORDEN 4  
LIBRES DE JACOBIANAS

ITERATIVE METHODS FOR SOLVING  
NOISY NONLINEAR EQUATIONS

ALGUNAS SORPRESAS EN EL  
ESTUDIO DINÁMICO DE LA FAMILIA  
CHEBYSHEV-HALLEY

ANÁLISIS DINÁMICO Y NUMÉRICO  
DE MÉTODOS CLÁSICOS PARA  
ENCONTRAR RAÍCES...

UNA RECONSTRUCCIÓN NO LINEAL,  
LOCAL Y SIMÉTRICA DE CLASE CASI  
C3 QUE CONSERVA...

UNA CLASIFICACIÓN TOPOLÓGICA  
DE LAS FUNCIONES RACIONALES  
COMPLEJAS...

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS  
DE ECUACIONES INTEGRALES  
INTERVALARES

SOLUCIÓN APROXIMADA DE UN  
PROBLEMA INVERSO ASOCIADO A UN  
SISTEMA DE ECUACIONES...

APROXIMACIÓN DE NÚMEROS  
DIFUSOS Y DE FUNCIONES DIFUSO  
VALUADAS

UN ENFOQUE GEOMÉTRICO PARA LA  
ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN  
ALGUNOS PROBLEMAS CONVEXOS

UN MÉTODO DE ORDEN REDUCIDO  
LOCAL PARA UN PROBLEMA DE  
RAYLEIGH-BÉNARD

JUEVES, 25 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

## Algunas sorpresas en el estudio dinámico de la familia Chebyshev-Halley

JOSÉ M. GUTIÉRREZ

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

[jmguti@unirioja.es](mailto:jmguti@unirioja.es)

**Resumen:** En este trabajo presentamos algunos resultados novedosos y, en cierta medida sorprendentes, sobre el estudio de la famosa familia de procesos iterativos de Chebyshev-Halley ([1], [3]) para resolver ecuaciones polinómicas  $p(z) = 0$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Estos métodos están definidos por una relación recurrente  $z_{n+1} = G_\alpha(z_n)$ ,  $n \geq 0$ , donde

$$G_\alpha(z) = z - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{L_p(z)}{1 - \alpha L_p(z)}\right) \frac{p(z)}{p'(z)}, \quad L_p(z) = \frac{p(z)p''(z)}{p'(z)^2}.$$

Entre estas sorpresas dinámicas podemos destacar el comportamiento del infinito cuando el dominio se extiende al plano complejo ampliado  $\widehat{\mathbb{C}}$  o la existencia de parejas método iterativo y polinomio para los cuales la función racional  $G_\alpha(z)$  asociada tiene un doble mal comportamiento como método para encontrar raíces. Este doble mal comportamiento viene propiciado por la presencia tanto de puntos fijos extraños como de ciclos (distintos de las raíces de  $p(z)$ ) con un carácter atractor. Veremos que este doble mal comportamiento se pone de manifiesto, por ejemplo, en el método de Chebyshev [2].

### Referencias

- [1] A. Cordero, J. R. Torregrosa, P. Vindel (2013). Dynamics of a family of Chebyshev-Halley type methods. *Appl. Math. Comput.*, 2019:16, 8568-8583.
- [2] J. M. Gutiérrez, J. L. Varona (2020). Superattracting extraneous fixed points and  $n$ -cycles for Chebyshev's method on cubic polynomials. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 19:54, 1-23.
- [3] W. Werner (1981). Some improvements of classical iterative methods for the solution of nonlinear equations. *Numerical Solution of Nonlinear equations. Lecture Notes in Math.*, 878, 427-440.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

SESIÓN ESPECIAL 14  
Métodos numéricos para la  
resolución de problemas no lineales

ESTIMACIÓN DE INVERSAS  
MATRICIALES MEDIANTE MÉTODOS  
ITERATIVOS CON FUNCIONES PESO...

FAMILIA PARAMÉTRICA VECTORIAL  
DE MÉTODOS ITERATIVOS DE ORDEN 4  
LIBRES DE JACOBIANAS

ITERATIVE METHODS FOR SOLVING  
NOISY NONLINEAR EQUATIONS

ALGUNAS SORPRESAS EN EL  
ESTUDIO DINÁMICO DE LA FAMILIA  
CHEBYSHEV-HALLEY

ANÁLISIS DINÁMICO Y NUMÉRICO  
DE MÉTODOS CLÁSICOS PARA  
ENCONTRAR RAÍCES...

UNA RECONSTRUCCIÓN NO LINEAL,  
LOCAL Y SIMÉTRICA DE CLASE CASI  
C3 QUE CONSERVA...

UNA CLASIFICACIÓN TOPOLOGICA  
DE LAS FUNCIONES RACIONALES  
COMPLEJAS...

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS  
DE ECUACIONES INTEGRALES  
INTERVALARES

SOLUCIÓN APROXIMADA DE UN  
PROBLEMA INVERSO ASOCIADO A UN  
SISTEMA DE ECUACIONES...

APROXIMACIÓN DE NÚMEROS  
DIFUSOS Y DE FUNCIONES DIFUSO  
VALUADAS

UN ENFOQUE GEOMÉTRICO PARA LA  
ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN  
ALGUNOS PROBLEMAS CONVEXOS

UN MÉTODO DE ORDEN REDUCIDO  
LOCAL PARA UN PROBLEMA DE  
RAYLEIGH-BÉNARD

## Análisis dinámico y numérico de métodos clásicos para encontrar raíces múltiples aplicados a diferentes multiplicidades

EVA G. VILLALBA, BEATRIZ CAMPOS, PURA VINDEL

Universidad Internacional de La Rioja

[eva.garciavillalba@umir.net](mailto:eva.garciavillalba@umir.net)

**Resumen:** En este trabajo estudiamos los métodos clásicos para raíces múltiples de Newton, Chebyshev y Halley definidos en [1, 2, 3], respectivamente. El esquema iterativo que los define depende del parámetro  $m$ , que representa la multiplicidad de la raíz que queremos aproximar. Uno de los inconvenientes de usarlos radica en que tenemos que ajustar la expresión de los esquemas si queremos aproximar soluciones con distintas multiplicidades. Por este motivo, también trabajamos con el método de Schröder (ver [1]), que aproxima las raíces múltiples de una función sin emplear la multiplicidad  $m$  en su esquema iterativo.

Así, nuestro objetivo principal en este trabajo es comprobar la robustez de los métodos mencionados cuando los aplicamos a funciones cuyas raíces poseen diferentes multiplicidades. Para ello, realizamos un estudio exhaustivo de la dinámica compleja de los métodos al aplicarlos sobre el polinomio:

$$p(z) = z^m(z-1)^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Posteriormente, hacemos un estudio numérico de los métodos cuando aproximamos raíces con distintas multiplicidades en los casos de funciones no polinómicas.

### Referencias

- [1] E. Schröder (1870). Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. *Mathematische Annalen* volume, 2, 317-365.
- [2] B. Neta (2008). New third order nonlinear solvers for multiple roots. *Applied Mathematics and Computation*, 202, 162-170.
- [3] E. Hansen, M. Patrick (1976). A family of root finding methods. *Numerische Mathematik*, 27, 257-269.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

SESIÓN ESPECIAL 14  
Métodos numéricos para la  
resolución de problemas no lineales

ESTIMACIÓN DE INVERSAS  
MATRICIALES MEDIANTE MÉTODOS  
ITERATIVOS CON FUNCIONES PESO...

FAMILIA PARAMÉTRICA VECTORIAL  
DE MÉTODOS ITERATIVOS DE ORDEN 4  
LIBRES DE JACOBIANAS

ITERATIVE METHODS FOR SOLVING  
NOISY NONLINEAR EQUATIONS

ALGUNAS SORPRESAS EN EL  
ESTUDIO DINÁMICO DE LA FAMILIA  
CHEBYSHEV-HALLEY

ANÁLISIS DINÁMICO Y NUMÉRICO  
DE MÉTODOS CLÁSICOS PARA  
ENCONTRAR RAÍCES...

UNA RECONSTRUCCIÓN NO LINEAL,  
LOCAL Y SIMÉTRICA DE CLASE CASI  
C3 QUE CONSERVA...

UNA CLASIFICACIÓN TOPOLÓGICA  
DE LAS FUNCIONES RACIONALES  
COMPLEJAS...

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS  
DE ECUACIONES INTEGRALES  
INTERVALARES

SOLUCIÓN APROXIMADA DE UN  
PROBLEMA INVERSO ASOCIADO A UN  
SISTEMA DE ECUACIONES...

APROXIMACIÓN DE NÚMEROS  
DIFUSOS Y DE FUNCIONES DIFUSO  
VALUADAS

UN ENFOQUE GEOMÉTRICO PARA LA  
ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN  
ALGUNOS PROBLEMAS CONVEXOS

UN MÉTODO DE ORDEN REDUCIDO  
LOCAL PARA UN PROBLEMA DE  
RAYLEIGH-BÉNARD

## Una reconstrucción no lineal, local y simétrica de clase casi $C^3$ que conserva la convexidad

JUAN CARLOS TRILLO, ISABEL JIMÉNEZ INIESTA

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística, Universidad Politécnica de Cartagena

[jc.trillo@upct.es](mailto:jc.trillo@upct.es)

**Resumen:** El propósito de este trabajo es introducir un operador de reconstrucción no lineal que se construye localmente guardando simetría y preservando la convexidad de los datos iniciales. Se analizan importantes propiedades como la reproducción de polinomios hasta de segundo grado, el orden de aproximación, la suavidad de la reconstrucción, la propiedad de Lipschitz y la preservación de la convexidad. Más concretamente, obtenemos un operador de clase casi  $C^3$  simétrico y local por construcción que mantiene importantes propiedades sobre convexidad siempre que estén presentes en los datos iniciales. Se presentan algunos test testando el orden de aproximación numérico y la preservación de la convexidad.

Este trabajo sigue la línea de un trabajo anterior [2], y busca extender las ideas a mayor orden como en [1], pero manteniendo la convexidad de los datos iniciales.

### Referencias

- [1] S. Amat, K. Dadourian, J. Liandrat, J. C. Trillo (2013). High order nonlinear interpolatory reconstruction operators and associated multiresolution schemes. *J. Comput. Appl. Math.* 253, 163-180.
- [2] P. Ortiz, J. C. Trillo (2021). On the convexity preservation of a quasi  $C^3$  nonlinear interpolatory reconstruction operator on  $\sigma$  quasi-uniform grids. *Mathematics*, 9(4), 310. <https://doi.org/10.3390/math9040310>

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 14  
Métodos numéricos para la  
resolución de problemas no lineales

ESTIMACIÓN DE INVERSAS  
MATRICIALES MEDIANTE MÉTODOS  
ITERATIVOS CON FUNCIONES PESO...

FAMILIA PARAMÉTRICA VECTORIAL  
DE MÉTODOS ITERATIVOS DE ORDEN 4  
LIBRES DE JACOBIANAS

ITERATIVE METHODS FOR SOLVING  
NOISY NONLINEAR EQUATIONS

ALGUNAS SORPRESAS EN EL  
ESTUDIO DINÁMICO DE LA FAMILIA  
CHEBYSHEV-HALLEY

ANÁLISIS DINÁMICO Y NUMÉRICO  
DE MÉTODOS CLÁSICOS PARA  
ENCONTRAR RAÍCES...

UNA RECONSTRUCCIÓN NO LINEAL,  
LOCAL Y SIMÉTRICA DE CLASE CASI  
 $C^3$  QUE CONSERVA...

UNA CLASIFICACIÓN TOPOLÓGICA  
DE LAS FUNCIONES RACIONALES  
COMPLEJAS...

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS  
DE ECUACIONES INTEGRALES  
INTERVALARES

SOLUCIÓN APROXIMADA DE UN  
PROBLEMA INVERSO ASOCIADO A UN  
SISTEMA DE ECUACIONES...

APROXIMACIÓN DE NÚMEROS  
DIFUSOS Y DE FUNCIONES DIFUSO  
VALUADAS

UN ENFOQUE GEOMÉTRICO PARA LA  
ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN  
ALGUNOS PROBLEMAS CONVEXOS

UN MÉTODO DE ORDEN REDUCIDO  
LOCAL PARA UN PROBLEMA DE  
RAYLEIGH-BÉNARD

## Una clasificación topológica de las funciones racionales complejas para la resolución de ecuaciones racionales

V. ÁLVAREZ-APARICIO, L.J. HERNÁNDEZ-PARICIO, M.T. RIVAS-RODRÍGUEZ

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

[valvarezapario@gmail.com](mailto:valvarezapario@gmail.com)

**Resumen:** La familia de funciones racionales complejas es de gran interés tanto a nivel numérico como dinámico. Algunos de los métodos de aproximación a las raíces más estudiados y empleados para resolver problemas no lineales involucran la construcción de este tipo de funciones (como el famoso método de Newton o el método de Chebyshev, aplicados sobre polinomios). El comportamiento dinámico de la composición iterada de este tipo de funciones es objeto de numerosos estudios de carácter numérico, analítico, topológico, e incluso algebraico, por su relevancia en diversos contextos y por sus complejas y sorprendentes propiedades fractales.

En esta comunicación se propondrá una clasificación de las funciones racionales complejas como cubiertas ramificadas de la esfera de Riemann, que nos permitirá aprovechar técnicas topológicas de levantamiento de caminos para aproximar todas las soluciones (junto con sus respectivas multiplicidades) de una ecuación racional. Los resultados teóricos obtenidos darán lugar a una serie de algoritmos, que han sido implementados en el lenguaje Julia, que ilustraremos a través de ejemplos.

### Referencias

- [1] V. Álvarez-Aparicio (2023). PathLifting.jl. [Online].
- [2] J. Bezanson, A. Edelman, S. Karpinski, V. B. Shah (2017). Julia: A Fresh Approach to Numerical Computing. ArXiv, abs/1411.1607.
- [3] R. H. Fox (1957). Covering spaces with singularities. Princeton University Press, 243–257.
- [4] A. Hatcher (2002). Algebraic Topology. Cambridge University Press.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 14  
Métodos numéricos para la  
resolución de problemas no lineales

ESTIMACIÓN DE INVERSAS  
MATRICIALES MEDIANTE MÉTODOS  
ITERATIVOS CON FUNCIONES PESO...

FAMILIA PARAMÉTRICA VECTORIAL  
DE MÉTODOS ITERATIVOS DE ORDEN 4  
LIBRES DE JACOBIANAS

ITERATIVE METHODS FOR SOLVING  
NOISY NONLINEAR EQUATIONS

ALGUNAS SORPRESAS EN EL  
ESTUDIO DINÁMICO DE LA FAMILIA  
CHEBYSHEV-HALLEY

ANÁLISIS DINÁMICO Y NUMÉRICO  
DE MÉTODOS CLÁSICOS PARA  
ENCONTRAR RAÍCES...

UNA RECONSTRUCCIÓN NO LINEAL,  
LOCAL Y SIMÉTRICA DE CLASE CASI  
C3 QUE CONSERVA...

UNA CLASIFICACIÓN TOPOLOGICA  
DE LAS FUNCIONES RACIONALES  
COMPLEJAS...

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS  
DE ECUACIONES INTEGRALES  
INTERVALARES

SOLUCIÓN APROXIMADA DE UN  
PROBLEMA INVERSO ASOCIADO A UN  
SISTEMA DE ECUACIONES...

APROXIMACIÓN DE NÚMEROS  
DIFUSOS Y DE FUNCIONES DIFUSO  
VALUADAS

UN ENFOQUE GEOMÉTRICO PARA LA  
ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN  
ALGUNOS PROBLEMAS CONVEXOS

UN MÉTODO DE ORDEN REDUCIDO  
LOCAL PARA UN PROBLEMA DE  
RAYLEIGH-BÉNARD

## Solución numérica de sistemas de ecuaciones integrales intervalares

D. GÁMEZ, M. I. BERENGUER, A. I. GARRALDA GUILLEM, M. RUIZ-GALÁN

Departamento Matemática Aplicada, Universidad de Granada

[domingo@ugr.es](mailto:domingo@ugr.es)

**Resumen:** En este trabajo extendemos los resultados obtenidos en [1] para abordar el estudio de sistemas de ecuaciones integrales de Volterra en ambiente de incertidumbre. Los métodos numéricos obtenidos en trabajos anteriores para sistemas de ecuaciones integrales de Volterra para funciones reales [2], los ampliamos a funciones intervalares. Tratamos también el estudio de problemas inversos, donde la determinación de ciertos parámetros asociados a un modelo dado, se basan en una versión perturbada del Teorema del Collage, el cual nos permite transformar el problema de estimación de parámetros en otro de minimización de una determinada familia de distancias collage asociadas. Finalizamos con algunos ejemplos numéricos que confirman la validez y precisión de los métodos teóricos empleados.

### Referencias

- [1] M. Arana-Jiménez, M. I. Berenguer, D. Gámez, A. I. Garralda-Guillem, M. Ruiz Galán (2020). A perturbed collage theorem and its application to inverse interval integral problems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 90, 105365, 10 pages.
- [2] M. I. Berenguer, D. Gámez, A. I. Garralda-Guillem, M. Ruiz Galán, M. C. Serrano Pérez (2011). Biorthogonal systems for solving Volterra integral equation system of the second kind. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235, 1875-1883.

**Agradecimientos:** Investigación parcialmente financiada por la Junta de Andalucía, Proyecto FQM359.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

SESIÓN ESPECIAL 14  
Métodos numéricos para la  
resolución de problemas no lineales

ESTIMACIÓN DE INVERSAS  
MATRICIALES MEDIANTE MÉTODOS  
ITERATIVOS CON FUNCIONES PESO...

FAMILIA PARAMÉTRICA VECTORIAL  
DE MÉTODOS ITERATIVOS DE ORDEN 4  
LIBRES DE JACOBIANAS

ITERATIVE METHODS FOR SOLVING  
NOISY NONLINEAR EQUATIONS

ALGUNAS SORPRESAS EN EL  
ESTUDIO DINÁMICO DE LA FAMILIA  
CHEBYSHEV-HALLEY

ANÁLISIS DINÁMICO Y NUMÉRICO  
DE MÉTODOS CLÁSICOS PARA  
ENCONTRAR RAÍCES...

UNA RECONSTRUCCIÓN NO LINEAL,  
LOCAL Y SIMÉTRICA DE CLASE CASI  
C3 QUE CONSERVA...

UNA CLASIFICACIÓN TOPOLOGICA  
DE LAS FUNCIONES RACIONALES  
COMPLEJAS...

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS  
DE ECUACIONES INTEGRALES  
INTERVALARES

SOLUCIÓN APROXIMADA DE UN  
PROBLEMA INVERSO ASOCIADO A UN  
SISTEMA DE ECUACIONES...

APROXIMACIÓN DE NÚMEROS  
DIFUSOS Y DE FUNCIONES DIFUSO  
VALUADAS

UN ENFOQUE GEOMÉTRICO PARA LA  
ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN  
ALGUNOS PROBLEMAS CONVEXOS

UN MÉTODO DE ORDEN REDUCIDO  
LOCAL PARA UN PROBLEMA DE  
RAYLEIGH-BÉNARD

## Solución aproximada de un problema inverso asociado a un sistema de ecuaciones variacionales mixtas en dominios perforados

A. I. GARRALDA-GUILLEM, M.I. BERENGUER, D. GÁMEZ, H. KUNZE,  
D. LA TORRE, M. RUIZ GALÁN  
Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Granada  
[agarral@ugr.es](mailto:agarral@ugr.es)

**Resumen:** En este trabajo analizamos en primer lugar condiciones que aseguran la existencia de solución de un problema inverso, en el sentido del Teorema del collage (ver [2]), asociado a una variante de un sistema de ecuaciones variacionales mixtas. Partiendo de los resultados de [3], introducimos una perturbación en una de las ecuaciones y consideramos un dominio con agujeros, que llamaremos dominio perforado. Estas modificaciones vienen motivadas por las aplicaciones de estos modelos. Posteriormente estudiamos la influencia en el resultado del tamaño de los agujeros y establecemos ciertos resultados de convergencia (ver [1]). Finalmente ilustramos los resultados con ejemplos numéricos.

### Referencias

- [1] M. I. Berenguer, D. Gámez, A. I. Garralda-Guillem, H. Kunze, D. La Torre, M. Ruiz Galán (2023). Solving inverse problems for mixed-variational equations on perforated domains. *Computational and Applied Mathematics*, 42:297, 1-12.
- [2] M. I. Berenguer, H. Kunze, D. La Torre, M. Ruiz Galán (2016). Galerkin method for constrained variational equations and a collage-based approach to related inverse problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 292, 67–75.
- [3] A. I. Garralda-Guillem, M. Ruiz Galán (2019). A minimax approach for the study of systems of variational equations and related Galerkin schemes. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 354, 103–111.

**Agradecimientos:** Investigación parcialmente financiada por la Junta de Andalucía, Proyecto FQM359.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 14  
Métodos numéricos para la  
resolución de problemas no lineales

ESTIMACIÓN DE INVERSAS  
MATRICIALES MEDIANTE MÉTODOS  
ITERATIVOS CON FUNCIONES PESO...

FAMILIA PARAMÉTRICA VECTORIAL  
DE MÉTODOS ITERATIVOS DE ORDEN 4  
LIBRES DE JACOBIANAS

ITERATIVE METHODS FOR SOLVING  
NOISY NONLINEAR EQUATIONS

ALGUNAS SORPRESAS EN EL  
ESTUDIO DINÁMICO DE LA FAMILIA  
CHEBYSHEV-HALLEY

ANÁLISIS DINÁMICO Y NUMÉRICO  
DE MÉTODOS CLÁSICOS PARA  
ENCONTRAR RAÍCES...

UNA RECONSTRUCCIÓN NO LINEAL,  
LOCAL Y SIMÉTRICA DE CLASE CASI  
C3 QUE CONSERVA...

UNA CLASIFICACIÓN TOPOLÓGICA  
DE LAS FUNCIONES RACIONALES  
COMPLEJAS...

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS  
DE ECUACIONES INTEGRALES  
INTERVALARES

SOLUCIÓN APROXIMADA DE UN  
PROBLEMA INVERSO ASOCIADO A UN  
SISTEMA DE ECUACIONES...

APROXIMACIÓN DE NÚMEROS  
DIFUSOS Y DE FUNCIONES DIFUSO  
VALUADAS

UN ENFOQUE GEOMÉTRICO PARA LA  
ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN  
ALGUNOS PROBLEMAS CONVEXOS

UN MÉTODO DE ORDEN REDUCIDO  
LOCAL PARA UN PROBLEMA DE  
RAYLEIGH-BÉNARD



## Aproximación de números difusos y de funciones difuso valuadas

M. I. BERENGUER, D. GÁMEZ, A. I. GARRALDA-GUILLÉM, M. RUIZ GALÁN

Departamento de Matemática Aplicada e Instituto de Matemáticas (IMAG),

E.T.S. de Ingeniería de Edificación, Universidad de Granada

[maribel@ugr.es](mailto:maribel@ugr.es)

**Resumen:** La aproximación de números difusos y de funciones difuso valuadas de variable real se ha abordado a lo largo de los años desde varias perspectivas, dependiendo del uso previsto de la aproximación (véase [3, 4]). En este trabajo se exponen los resultados recientemente obtenidos en ambos contextos (véase [1, 2]). Concretamente, proponemos métodos constructivos que se basan en el uso de apropiadas bases de Schauder en ciertos espacios de Banach. Dichos métodos amplían algunas de las aproximaciones previamente conocidas. Ilustramos los métodos en algunos casos particularmente interesantes proporcionando algoritmos de gran simplicidad

### Referencias

- [1] M. Arana-Jiménez, M. I. Berenguer, D. Gámez, A. I. Garralda-Guillem, M. Ruiz Galán (2020). A perturbed collage theorem and its application to inverse interval integral problems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 90, 105365.
- [2] M. I. Berenguer, D. Gámez, A. I. Garralda-Guillem, M. Ruiz Galán (2023). A generalized and unified approach to the approximation of fuzzy numbers and its arithmetic and characteristics. *Fuzzy Sets and Systems*, 473, 108727.
- [3] L. Coroianu, M. Gagolewski, P. Grzegorzewski (2019). Piecewise linear approximation of fuzzy numbers: Algorithms, arithmetic operations and stability of characteristics. *Soft Computing* 23, 9491-9505.
- [4] V. L. G. Nayagam, J. Murugan (2021). Hexagonal fuzzy approximation of fuzzy numbers and its applications in MCDM. *Complex & Intelligent Systems* 7, 1459-1487.

**Agradecimientos:** Investigación parcialmente financiada por Junta de Andalucía, Proyecto FQM359.

**VIERNES, 26 DE ENERO:**  
12:00 – 12:30

SESIÓN ESPECIAL 14  
Métodos numéricos para la  
resolución de problemas no lineales

ESTIMACIÓN DE INVERSAS  
MATRICIALES MEDIANTE MÉTODOS  
ITERATIVOS CON FUNCIONES PESO...

FAMILIA PARAMÉTRICA VECTORIAL  
DE MÉTODOS ITERATIVOS DE ORDEN 4  
LIBRES DE JACOBIANAS

ITERATIVE METHODS FOR SOLVING  
NOISY NONLINEAR EQUATIONS

ALGUNAS SORPRESAS EN EL  
ESTUDIO DINÁMICO DE LA FAMILIA  
CHEBYSHEV-HALLEY

ANÁLISIS DINÁMICO Y NUMÉRICO  
DE MÉTODOS CLÁSICOS PARA  
ENCONTRAR RAÍCES...

UNA RECONSTRUCCIÓN NO LINEAL,  
LOCAL Y SIMÉTRICA DE CLASE CASI  
C3 QUE CONSERVA...

UNA CLASIFICACIÓN TOPOLOGICA  
DE LAS FUNCIONES RACIONALES  
COMPLEJAS...

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS  
DE ECUACIONES INTEGRALES  
INTERVALES

SOLUCIÓN APROXIMADA DE UN  
PROBLEMA INVERSO ASOCIADO A UN  
SISTEMA DE ECUACIONES...

APROXIMACIÓN DE NÚMEROS  
DIFUSOS Y DE FUNCIONES DIFUSO  
VALUADAS

UN ENFOQUE GEOMÉTRICO PARA LA  
ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN  
ALGUNOS PROBLEMAS CONVEXOS

UN MÉTODO DE ORDEN REDUCIDO  
LOCAL PARA UN PROBLEMA DE  
RAYLEIGH-BÉNARD

## Un enfoque geométrico para la estimación de parámetros en algunos problemas convexos

M. RUIZ GALÁN, A. I. GARRALDA-GUILLEM

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Granada

[mruizg@ugr.es](mailto:mruizg@ugr.es)

**Resumen:** La estimación de parámetros en ciertos problemas no lineales, y más concretamente, en los asociados a la subdiferencial de una función fuertemente convexa, constituye el objetivo fundamental de este trabajo. Para diseñar un algoritmo numérico que lleve a cabo tal identificación, establecemos una serie de propiedades, como la estabilidad, que no solo admiten un enfoque analítico, también geométrico, adoptando esencialmente este último a lo largo de la comunicación. Aplicamos nuestros resultados al caso concreto del operador  $p$ -laplaciano.

### Referencias

- [1] A. I. Garralda-Guillem, H. Kunze, D. La Torre, M. Ruiz Galán (2020). Using the generalized collage theorem for estimating unknown parameters in perturbed mixed variational equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 91, Art. ID 105433.
- [2] A. I. Garralda-Guillem, P. Montiel López (2021). Numerical solution for an inverse variational problem. *Optimization and Engineering*, 22, 2537-2552.
- [3] A. I. Garralda-Guillem, M. Ruiz Galán (2023). Parameter estimation for the subdifferential of a strongly convex function and its application to the  $p$ -Laplacian. Preprint.
- [4] M. Ruiz Galán (2010). Convex numerical radius. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 361, 481-491.

### Agradecimientos:

Proyecto FQM359, Junta de Andalucía, y Unidad de Excelencia "María de Maeztu" IMAG, referencia CEX2020-001105-M, financiada por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

SESIÓN ESPECIAL 14  
Métodos numéricos para la  
resolución de problemas no lineales

ESTIMACIÓN DE INVERSAS  
MATRICIALES MEDIANTE MÉTODOS  
ITERATIVOS CON FUNCIONES PESO...

FAMILIA PARAMÉTRICA VECTORIAL  
DE MÉTODOS ITERATIVOS DE ORDEN 4  
LIBRES DE JACOBIANAS

ITERATIVE METHODS FOR SOLVING  
NOISY NONLINEAR EQUATIONS

ALGUNAS SORPRESAS EN EL  
ESTUDIO DINÁMICO DE LA FAMILIA  
CHEBYSHEV-HALLEY

ANÁLISIS DINÁMICO Y NUMÉRICO  
DE MÉTODOS CLÁSICOS PARA  
ENCONTRAR RAÍCES...

UNA RECONSTRUCCIÓN NO LINEAL,  
LOCAL Y SIMÉTRICA DE CLASE CASI  
C3 QUE CONSERVA...

UNA CLASIFICACIÓN TOPOLÓGICA  
DE LAS FUNCIONES RACIONALES  
COMPLEJAS...

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS  
DE ECUACIONES INTEGRALES  
INTERVALARES

SOLUCIÓN APROXIMADA DE UN  
PROBLEMA INVERSO ASOCIADO A UN  
SISTEMA DE ECUACIONES...

APROXIMACIÓN DE NÚMEROS  
DIFUSOS Y DE FUNCIONES DIFUSO  
VALUADAS

UN ENFOQUE GEOMÉTRICO PARA LA  
ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN  
ALGUNOS PROBLEMAS CONVEXOS

UN MÉTODO DE ORDEN REDUCIDO  
LOCAL PARA UN PROBLEMA DE  
RAYLEIGH-BÉNARD

## Un método de orden reducido local para un problema de Rayleigh-Bénard

J. CORTÉS, H. HERRERO, F. PLA

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias y Tecnologías Químicas de Ciudad Real,  
Universidad de Castilla-La Mancha  
[jesus.cortes@uclm.es](mailto:jesus.cortes@uclm.es)

**Resumen:** En este trabajo se presenta un método de orden reducido local para calcular diagramas de bifurcación en un problema de convección de Rayleigh-Bénard bidimensional. El método tiene cierta similitud con el método propuesto en [1], en el sentido de que se calculan múltiples bases locales diseñadas para representar las soluciones del problema en distintas regiones del diagrama de bifurcación. La principal diferencia es que nuestro método es capaz de procesar distintas ramas del diagrama de bifurcación simultáneamente. Para ello, el criterio de selección de base local en la fase online, se hace respecto al espacio de soluciones. Los snapshots del método se agrupan mediante un algoritmo de  $k$ -medias y las bases locales se calculan a través de Proper Orthogonal Decomposition (POD). Todos los hiperparámetros del método, como el número de bases locales o el número de modos POD se calculan mediante criterios deterministas controlados por tolerancias. Finalmente, un enriquecimiento del espacio de velocidades nos permite calcular la presión en un contexto de ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles. Los resultados muestran que el método local puede generar diagramas de bifurcación con errores pequeños y un coste computacional reducido respecto a Colocación Legendre, el método de alta fidelidad.

### Referencias

- [1] M. Hess, A. Alla, A. Quaini, G. Rozza, M. Gunzburger (2019). A localized reduced-order modeling approach for PDEs with bifurcating solutions. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 351, 379-403.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

SESIÓN ESPECIAL 14  
Métodos numéricos para la  
resolución de problemas no lineales

ESTIMACIÓN DE INVERSAS  
MATRICIALES MEDIANTE MÉTODOS  
ITERATIVOS CON FUNCIONES PESO...

FAMILIA PARAMÉTRICA VECTORIAL  
DE MÉTODOS ITERATIVOS DE ORDEN 4  
LIBRES DE JACOBIANAS

ITERATIVE METHODS FOR SOLVING  
NOISY NONLINEAR EQUATIONS

ALGUNAS SORPRESAS EN EL  
ESTUDIO DINÁMICO DE LA FAMILIA  
CHEBYSHEV-HALLEY

ANÁLISIS DINÁMICO Y NUMÉRICO  
DE MÉTODOS CLÁSICOS PARA  
ENCONTRAR RAÍCES...

UNA RECONSTRUCCIÓN NO LINEAL,  
LOCAL Y SIMÉTRICA DE CLASE CASI  
C3 QUE CONSERVA...

UNA CLASIFICACIÓN TOPOLÓGICA  
DE LAS FUNCIONES RACIONALES  
COMPLEJAS...

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS  
DE ECUACIONES INTEGRALES  
INTERVALARES

SOLUCIÓN APROXIMADA DE UN  
PROBLEMA INVERSO ASOCIADO A UN  
SISTEMA DE ECUACIONES...

APROXIMACIÓN DE NÚMEROS  
DIFUSOS Y DE FUNCIONES DIFUSO  
VALUADAS

UN ENFOQUE GEOMÉTRICO PARA LA  
ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS EN  
ALGUNOS PROBLEMAS CONVEXOS

UN MÉTODO DE ORDEN REDUCIDO  
LOCAL PARA UN PROBLEMA DE  
RAYLEIGH-BÉNARD

## SESIÓN ESPECIAL 15 Numerical Methods and Computational Mathematics

### Organizers:

**PABLO M. BERNÁ**  
 (CUNEF Universidad)

**ANTONIO FALCÓ**  
 (Universidad CEU Cardenal Herrera)

### Summary:

The scientific computing community has shown increasing interest in Tensor Numerical Methods and Deep Neural Networks. Concerning the use of these methods in engineering and industrial applications, among the family of tensor-based methods, the Proper Generalized Decomposition has been used in surgery simulations, design optimization, etc. The special session aims at gathering experts to present their recent work in this field, including rank tensor format approximation, greedy algorithms, etc.

SESIÓN ESPECIAL 15  
 Numerical Methods and  
 Computational Mathematics

THE VARIATIONAL PRINCIPLE OF  
 DIRAC-FRENKEL

THERMODYNAMICS OF LEARNING  
 PHYSICAL PHENOMENA

A SECOND-ORDER FAST-  
 CONVOLUTION METHOD FOR THE  
 FRACTIONAL LAPLACIAN

ON PSEUDORANDOMNESS OF THE  
 SCHRÖDINGER MAP

ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS WITH  
 CHEBYSHEV POLYNOMIALS IN OPTION  
 PRICING

APPROACH TO OPTIMIZATION  
 PROBLEMS IN NETWORK  
 ENGINEERING

INTRINSIC PROPER GENERALIZED  
 DECOMPOSITION MODES ON  
 GRASSMANN...

STRUCTURE AND APPROXIMATION  
 PROPERTIES OF LAPLACIAN-LIKE  
 WITH APPLICATIONS

SUCCESSFUL LOVE STORIES AS  
 DIFFERENTIAL GAMES

MODEL & METHODS FOR CHEMICAL  
 KINETICS: STUDY OF LATEX  
 PARTICLES FORMATION

VISIBILITY-BASED PURSUIT-EVASION  
 GAMES IN DOMAINS WITH OBSTACLES

## The variational principle of Dirac-Frenkel

ANTONIO FALCÓ

Departamento de Matemáticas, Física y Ciencias Tecnológicas, Universidad CEU Cardenal Herrera  
[afalco@uchceu.es](mailto:afalco@uchceu.es)

**Abstract:** The main goal of this talk is to review the so-called Dirac-Frenkel Variational Principle in the framework of tensor Banach spaces. To this end we introduce the Banach manifold structure for the different tensor formats based in subspaces for which we provide a local chart system. The description of the local charts of these manifolds appears crucial for an algorithmic treatment of high-dimensional partial differential equations and minimization problems. In order to describe the relationship between these manifolds and the natural ambient space we prove under natural conditions that each can be immersed in a particular ambient Banach space. This fact allows us to finally extend the Dirac-Frenkel variational principle in the framework of topological tensor spaces.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 15  
Numerical Methods and  
Computational Mathematics

THE VARIATIONAL PRINCIPLE OF  
DIRAC-FRENKEL

THERMODYNAMICS OF LEARNING  
PHYSICAL PHENOMENA

A SECOND-ORDER FAST-  
CONVOLUTION METHOD FOR THE  
FRACTIONAL LAPLACIAN

ON PSEUDORANDOMNESS OF THE  
SCHRÖDINGER MAP

ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS WITH  
CHEBYSHEV POLYNOMIALS IN OPTION  
PRICING

APPROACH TO OPTIMIZATION  
PROBLEMS IN NETWORK  
ENGINEERING

INTRINSIC PROPER GENERALIZED  
DECOMPOSITION MODES ON  
GRASSMANN...

STRUCTURE AND APPROXIMATION  
PROPERTIES OF LAPLACIAN-LIKE  
WITH APPLICATIONS

SUCCESSFUL LOVE STORIES AS  
DIFFERENTIAL GAMES

MODEL & METHODS FOR CHEMICAL  
KINETICS: STUDY OF LATEX  
PARTICLES FORMATION

VISIBILITY-BASED PURSUIT-EVASION  
GAMES IN DOMAINS WITH OBSTACLES

## Thermodynamics of learning physical phenomena

ELÍAS CUETO

Institute of Engineering Research, Universidad de Zaragoza  
[ecueto@unizar.es](mailto:ecueto@unizar.es)

**Abstract:** Thermodynamics could be seen as an expression of physics at a high epistemic level. As such, its potential as an inductive bias to help machine learning procedures attain accurate and credible predictions has been recently realized in many fields. We review how thermodynamics provides helpful insights in the learning process. At the same time, we study the influence of aspects such as the scale at which a given phenomenon is to be described, the choice of relevant variables for this description or the different techniques available for the learning process.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

SESIÓN ESPECIAL 15  
Numerical Methods and  
Computational Mathematics

THE VARIATIONAL PRINCIPLE OF  
DIRAC-FRENKEL

THERMODYNAMICS OF LEARNING  
PHYSICAL PHENOMENA

A SECOND-ORDER FAST-  
CONVOLUTION METHOD FOR THE  
FRACTIONAL LAPLACIAN

ON PSEUDORANDOMNESS OF THE  
SCHRÖDINGER MAP

ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS WITH  
CHEBYSHEV POLYNOMIALS IN OPTION  
PRICING

APPROACH TO OPTIMIZATION  
PROBLEMS IN NETWORK  
ENGINEERING

INTRINSIC PROPER GENERALIZED  
DECOMPOSITION MODES ON  
GRASSMANN...

STRUCTURE AND APPROXIMATION  
PROPERTIES OF LAPLACIAN-LIKE  
WITH APPLICATIONS

SUCCESSFUL LOVE STORIES AS  
DIFFERENTIAL GAMES

MODEL & METHODS FOR CHEMICAL  
KINETICS: STUDY OF LATEX  
PARTICLES FORMATION

VISIBILITY-BASED PURSUIT-EVASION  
GAMES IN DOMAINS WITH OBSTACLES

## A second-order fast-convolution method for the fractional Laplacian

FRANCISCO DE LA HOZ

Universidad del País Vasco

[francisco.delahoz@ehu.eus](mailto:francisco.delahoz@ehu.eus)

**Abstract:** In this talk, we explain a new method for approximating numerically the fractional Laplacian of functions defined on  $\mathbb{R}$ . After mapping  $\mathbb{R}$  into a finite interval, we use two main ideas to obtain an approximation of the resulting convolution-like operator: a second-order modified midpoint rule, and the so-called fast convolution. We first prove rigorously that the method gives a second-order approximation of the fractional Laplacian; then, we detail the implementation of the method using the fast convolution; and finally, we give some numerical examples that support its applicability.

SESIÓN ESPECIAL 15  
Numerical Methods and  
Computational Mathematics

THE VARIATIONAL PRINCIPLE OF  
DIRAC-FRENKEL

THERMODYNAMICS OF LEARNING  
PHYSICAL PHENOMENA

A SECOND-ORDER FAST-  
CONVOLUTION METHOD FOR THE  
FRACTIONAL LAPLACIAN

ON PSEUDORANDOMNESS OF THE  
SCHRÖDINGER MAP

ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS WITH  
CHEBYSHEV POLYNOMIALS IN OPTION  
PRICING

APPROACH TO OPTIMIZATION  
PROBLEMS IN NETWORK  
ENGINEERING

INTRINSIC PROPER GENERALIZED  
DECOMPOSITION MODES ON  
GRASSMANN...

STRUCTURE AND APPROXIMATION  
PROPERTIES OF LAPLACIAN-LIKE  
WITH APPLICATIONS

SUCCESSFUL LOVE STORIES AS  
DIFFERENTIAL GAMES

MODEL & METHODS FOR CHEMICAL  
KINETICS: STUDY OF LATEX  
PARTICLES FORMATION

VISIBILITY-BASED PURSUIT-EVASION  
GAMES IN DOMAINS WITH OBSTACLES

JUEVES, 25 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

## On Pseudorandomness of the Schrödinger map

SANDEEP KUMAR

Departamento de Métodos Cuantitativos, CUNEF Universidad  
[sandeep.kumar@cunef.edu](mailto:sandeep.kumar@cunef.edu)

**Abstract:** In this talk, we will discuss the random behaviour of the Schrödinger map, a geometric partial differential equation by considering its evolution in different geometrical settings. Its equivalent form in the Euclidean space describes the evolution of a vortex filament in a real fluid, as a result, it is also known as the vortex filament equation. The dynamics of these equations for polygonal initial data when solved numerically exhibit several interesting characteristics of real fluids, e.g., the axis switching phenomenon. On the other hand, the algebraic construction of these solutions not only supports the numerical evolution but also indicates randomness. I will present some recent results, in particular, the case of helical-shaped vortices and curves in the hyperbolic space, and show that this unusual behaviour (randomness) resulting from a differential equation is indeed a generic phenomenon for these equations. A part of the talk is a work in collaboration with Francisco de la Hoz (UPV/EHU) and Luis Vega (BCAM, UPV/EHU).

### References

- [1] F. de la Hoz, S. Kumar, L. Vega (2022). Vortex Filament Equation for a regular  $l$ -polygon in the hyperbolic plane. *Journal of Nonlinear Science*, 32(9).
- [2] S. Kumar. Pseudorandomness of the Schrödinger map. In preparation.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

SESIÓN ESPECIAL 15  
Numerical Methods and  
Computational Mathematics

THE VARIATIONAL PRINCIPLE OF  
DIRAC-FRENKEL

THERMODYNAMICS OF LEARNING  
PHYSICAL PHENOMENA

A SECOND-ORDER FAST-  
CONVOLUTION METHOD FOR THE  
FRACTIONAL LAPLACIAN

ON PSEUDORANDOMNESS OF THE  
SCHRÖDINGER MAP

ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS WITH  
CHEBYSHEV POLYNOMIALS IN OPTION  
PRICING

APPROACH TO OPTIMIZATION  
PROBLEMS IN NETWORK  
ENGINEERING

INTRINSIC PROPER GENERALIZED  
DECOMPOSITION MODES ON  
GRASSMANN...

STRUCTURE AND APPROXIMATION  
PROPERTIES OF LAPLACIAN-LIKE  
WITH APPLICATIONS

SUCCESSFUL LOVE STORIES AS  
DIFFERENTIAL GAMES

MODEL & METHODS FOR CHEMICAL  
KINETICS: STUDY OF LATEX  
PARTICLES FORMATION

VISIBILITY-BASED PURSUIT-EVASION  
GAMES IN DOMAINS WITH OBSTACLES



## Artificial Neural Networks with Chebyshev Polynomials in Option pricing

BEATRIZ GÓMEZ, VÍCTOR GATÓN

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Valladolid

[beatriz.gomez.martin@uva.es](mailto:beatriz.gomez.martin@uva.es)

**Abstract:** Pricing different types of options is a subject of interest in finance. Classical numerical methods such as finite difference, finite elements or spectral methods, have been successfully applied to solve pricing problems in low-dimensional cases. However, the mentioned numerical methods suffer from the curse of dimensionality. When working in high-dimensional spaces, or with several underlying stocks, they become inefficient, as the computational cost grows exponentially. Artificial Neural Networks are a good solution to overcome the limitations of the previous methods. In particular, the purpose of this work is to combine the benefits of Artificial Neural Networks with Chebyshev polynomial approximation properties. We will see that applying a Chebyshev polynomial expansion can improve convergence rates of Artificial Neural Networks, providing an interesting framework for option pricing.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

SESIÓN ESPECIAL 15  
Numerical Methods and  
Computational Mathematics

THE VARIATIONAL PRINCIPLE OF  
DIRAC-FRENKEL

THERMODYNAMICS OF LEARNING  
PHYSICAL PHENOMENA

A SECOND-ORDER FAST-  
CONVOLUTION METHOD FOR THE  
FRACTIONAL LAPLACIAN

ON PSEUDORANDOMNESS OF THE  
SCHRÖDINGER MAP

ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS WITH  
CHEBYSHEV POLYNOMIALS IN OPTION  
PRICING

APPROACH TO OPTIMIZATION  
PROBLEMS IN NETWORK  
ENGINEERING

INTRINSIC PROPER GENERALIZED  
DECOMPOSITION MODES ON  
GRASSMANN...

STRUCTURE AND APPROXIMATION  
PROPERTIES OF LAPLACIAN-LIKE  
WITH APPLICATIONS

SUCCESSFUL LOVE STORIES AS  
DIFFERENTIAL GAMES

MODEL & METHODS FOR CHEMICAL  
KINETICS: STUDY OF LATEX  
PARTICLES FORMATION

VISIBILITY-BASED PURSUIT-EVASION  
GAMES IN DOMAINS WITH OBSTACLES

## Approach to optimization problems in network engineering: The case of mmWave backhuls

EDGAR ARRIBAS

Departamento de Matemáticas, Física y Ciencias Tecnológicas, Universidad Cardenal Herrera-CEU  
edgar.arribasgimeno@uchceu.es

**Abstract:** In recent decades we have observed a very quick technological development in the field of network engineering that has taken us to the fifth generation of mobile telephony (5G). This rapid development entails a large number of technological problems that require rigorous mathematical analysis. Each bit of information that travels through the network is subject to addressing decisions that must guarantee a completely secure and very fast service to the user. Every time a decision has several alternatives, wanting to choose the best one gives rise to a mathematical optimization problem. Thus, there are countless optimization problems that networks must solve in very short time scales in order to have fast and secure access to the network. In this talk, we will describe the path to follow to analyze an optimization problem in the telematic engineering field, what considerations must be taken into account, and what alternatives we can present when we demonstrate that, as is often the case, it is not possible to obtain instantaneous solutions. In particular, we will present this path followed in the scheduling optimization problem of a wireless backhaul network enabled by millimeter waves.

### References

- [1] E. Arribas, et al. (2019). Optimizing mmWave wireless backhaul scheduling. IEEE Transactions on Mobile Computing 19.10: 2409-2428.
- [2] Michael R. Garey and David S. Johnson (2022). Computers and intractability. Vol. 29. New York: wh freeman.
- [3] E. Arribas, et al. (2019). Fair cellular throughput optimization with the aid of coordinated drones. IEEE INFOCOM 2019-IEEE Conference on Computer Communications Workshops.
- [4] E. Arribas, et al. (2023). Optimizing fairness in cellular networks with mobile drone relays. Computer Networks 224: 109623.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 15  
Numerical Methods and  
Computational Mathematics

THE VARIATIONAL PRINCIPLE OF  
DIRAC-FRENKEL

THERMODYNAMICS OF LEARNING  
PHYSICAL PHENOMENA

A SECOND-ORDER FAST-  
CONVOLUTION METHOD FOR THE  
FRACTIONAL LAPLACIAN

ON PSEUDORANDOMNESS OF THE  
SCHRÖDINGER MAP

ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS WITH  
CHEBYSHEV POLYNOMIALS IN OPTION  
PRICING

APPROACH TO OPTIMIZATION  
PROBLEMS IN NETWORK  
ENGINEERING

INTRINSIC PROPER GENERALIZED  
DECOMPOSITION MODES ON  
GRASSMANN...

STRUCTURE AND APPROXIMATION  
PROPERTIES OF LAPLACIAN-LIKE  
WITH APPLICATIONS

SUCCESSFUL LOVE STORIES AS  
DIFFERENTIAL GAMES

MODEL & METHODS FOR CHEMICAL  
KINETICS: STUDY OF LATEX  
PARTICLES FORMATION

VISIBILITY-BASED PURSUIT-EVASION  
GAMES IN DOMAINS WITH OBSTACLES

# Intrinsic Proper Generalized Decomposition modes on Grassmann manifolds. Computation via Gradient Descent Algorithm

ALEJANDRO BANDERA, S. FERNÁNDEZ-GARCÍA, M. GÓMEZ-MÁRMOL  
Departamento Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, IMUS, Universidad de Sevilla  
[abandera@us.es](mailto:abandera@us.es)

**Abstract:** In this work, we introduce an iterative optimization algorithm to obtain the intrinsic Proper Generalized Decomposition modes [1] of elliptic partial differential equations. The main idea behind this procedure is to adapt the general Gradient Descent algorithm to the algebraic version of the intrinsic Proper Generalized Decomposition framework, and then to couple a one-dimensional case of the algorithm with a deflation algorithm in order to keep enriching the solution by computing further intrinsic Proper Generalized Decomposition modes. For this novel iterative optimization procedure, we present some numerical tests based on physical parametric problems, in which we obtain very promising results in comparison with the ones already presented in the literature [2]. This support the use of this procedure in order to obtain the intrinsic PGD modes of parametric symmetric problems.

## References

- [1] M. Azañez, F. B. Belgacem, J. Casado-Díaz, T. C. Rebollo, F. Murat (2018). A new algorithm of proper generalized decomposition for parametric symmetric elliptic problems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 50, pp. 5426-5445.
- [2] M. Azañez, T. C. Rebollo, M. G. Mármol (2020). On the computation of proper generalized decomposition modes of parametric elliptic problems. *SeMA Journal*, 77, pp. 59-72.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 15  
Numerical Methods and  
Computational Mathematics

THE VARIATIONAL PRINCIPLE OF  
DIRAC-FRENKEL

THERMODYNAMICS OF LEARNING  
PHYSICAL PHENOMENA

A SECOND-ORDER FAST-  
CONVOLUTION METHOD FOR THE  
FRACTIONAL LAPLACIAN

ON PSEUDORANDOMNESS OF THE  
SCHRÖDINGER MAP

ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS WITH  
CHEBYSHEV POLYNOMIALS IN OPTION  
PRICING

APPROACH TO OPTIMIZATION  
PROBLEMS IN NETWORK  
ENGINEERING

INTRINSIC PROPER GENERALIZED  
DECOMPOSITION MODES ON  
GRASSMANN...

STRUCTURE AND APPROXIMATION  
PROPERTIES OF LAPLACIAN-LIKE  
WITH APPLICATIONS

SUCCESSFUL LOVE STORIES AS  
DIFFERENTIAL GAMES

MODEL & METHODS FOR CHEMICAL  
KINETICS: STUDY OF LATEX  
PARTICLES FORMATION

VISIBILITY-BASED PURSUIT-EVASION  
GAMES IN DOMAINS WITH OBSTACLES

## Structure and approximation properties of Laplacian-like with applications

ALBERTO CONEJERO

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia  
aconejero@mat.upv.es

**Abstract:** An accurate prediction of the formation of latex particles is vital for Many of today's problems require techniques that involve the solution of arbitrarily large systems  $Ax = b$ . A popular numerical approach is the so-called Greedy Rank-One Update Algorithm, based on a particular tensor decomposition. The numerical experiments support the fact that this algorithm converges especially fast when the matrix of the linear system is Laplacian-Like. These matrices that follow the tensor structure of the Laplacian operator are formed by sums of Kronecker product of matrices following a particular pattern. Moreover, this set of matrices is not only a linear subspace it is a a Lie sub-algebra of a matrix Lie Algebra. In this talk, we characterize and give the main properties of this particular class of matrices. Moreover, the above results allow us to propose an algorithm to explicitly compute the orthogonal projection onto this subspace of a given square matrix  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ . Some applications will be given.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 15  
Numerical Methods and  
Computational Mathematics

THE VARIATIONAL PRINCIPLE OF  
DIRAC-FRENKEL

THERMODYNAMICS OF LEARNING  
PHYSICAL PHENOMENA

A SECOND-ORDER FAST-  
CONVOLUTION METHOD FOR THE  
FRACTIONAL LAPLACIAN

ON PSEUDORANDOMNESS OF THE  
SCHRÖDINGER MAP

ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS WITH  
CHEBYSHEV POLYNOMIALS IN OPTION  
PRICING

APPROACH TO OPTIMIZATION  
PROBLEMS IN NETWORK  
ENGINEERING

INTRINSIC PROPER GENERALIZED  
DECOMPOSITION MODES ON  
GRASSMANN...

STRUCTURE AND APPROXIMATION  
PROPERTIES OF LAPLACIAN-LIKE  
WITH APPLICATIONS

SUCCESSFUL LOVE STORIES AS  
DIFFERENTIAL GAMES

MODEL & METHODS FOR CHEMICAL  
KINETICS: STUDY OF LATEX  
PARTICLES FORMATION

VISIBILITY-BASED PURSUIT-EVASION  
GAMES IN DOMAINS WITH OBSTACLES

## Successful love stories as differential games

JORGE HERRERA, JOSE MANUEL REY

Departamento de Ciencia de Datos y Matemáticas, Universidad San Pablo CEU

[jorge.herrera1@ceu.es](mailto:jorge.herrera1@ceu.es)

**Abstract:** Understanding the dynamics of long-term romantic relationships is essential for individual and social well-being. This study presents a model for romantic relationships as stochastic differential games.

The state of the relationship is represented by the "feeling" variable,  $x(t)$ , which evolves over time and serves as a measure of marital satisfaction. The evolution of this feeling variable is described by the stochastic differential equation:

$$dx(t) = [-rx(t) + a_1c_1(t) + a_2c_2(t)] dt + \sigma(x(t))dw, \quad (1)$$

This equation includes parameters such as  $r$ ,  $a_1$ , and  $a_2$ , control variables  $c_i(t)$  representing partner efforts, and a Wiener process  $w(t)$ .

Effort controls, defined by  $c_i = S_i(x)$ , known as feedback controls, are crucial. Both partners aim to maximize their total happiness by balancing the benefits derived from their feelings, measured by functions  $U_i(x)$ , and the costs of exerting effort, as given by functions  $D_i(c_i)$ . The expected happiness of partner  $i$  is expressed as:

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^{\infty} e^{-\rho_i t} (U_i(x(t)) - D_i(c_{i1}(t); c_i^*)) dt | x(0) = x_0 \right],$$

where  $\rho_i$  represents discount parameters and  $c_i^*$  indicates the minimum level of effort each partner is ready to exert.

An equilibrium is achieved when optimal feedback controls,  $(S_1^{\heartsuit}(x), S_2^{\heartsuit}(x))$ , are found to ensure that both partners maximize their expected happiness. The optimal effort paths are determined by  $c_i^{\heartsuit}(t) = S_i^{\heartsuit}(x(t))$ , and the relationship's feeling trajectory is calculated by solving the stochastic differential equation. In our case, we seek for the Feedback Nash equilibria of the game.

This research aims to address the challenge of calibrating the model with real-world data, offering insights into the parameters that replicate observed marital satisfaction curves. It also investigates the model's sensitivity to small parameter perturbations and how they affect equilibrium satisfaction and effort levels.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

SESIÓN ESPECIAL 15  
Numerical Methods and  
Computational Mathematics

THE VARIATIONAL PRINCIPLE OF  
DIRAC-FRENKEL

THERMODYNAMICS OF LEARNING  
PHYSICAL PHENOMENA

A SECOND-ORDER FAST-  
CONVOLUTION METHOD FOR THE  
FRACTIONAL LAPLACIAN

ON PSEUDORANDOMNESS OF THE  
SCHRÖDINGER MAP

ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS WITH  
CHEBYSHEV POLYNOMIALS IN OPTION  
PRICING

APPROACH TO OPTIMIZATION  
PROBLEMS IN NETWORK  
ENGINEERING

INTRINSIC PROPER GENERALIZED  
DECOMPOSITION MODES ON  
GRASSMANN...

STRUCTURE AND APPROXIMATION  
PROPERTIES OF LAPLACIAN-LIKE  
WITH APPLICATIONS

SUCCESSFUL LOVE STORIES AS  
DIFFERENTIAL GAMES

MODEL & METHODS FOR CHEMICAL  
KINETICS: STUDY OF LATEX  
PARTICLES FORMATION

VISIBILITY-BASED PURSUIT-EVASION  
GAMES IN DOMAINS WITH OBSTACLES

## Model & Methods for Chemical Kinetics: Study of Latex Particles Formation

SIMONE RUSCONI, CHRISTINA SCHENK, ARGHIR ZARNESCU,  
ELENA AKHMATSKAYA  
Departamento de Métodos Cuantitativos, CUNEF Universidad  
[simone.rusconi@cunef.edu](mailto:simone.rusconi@cunef.edu)

**Abstract:** An accurate prediction of the formation of latex particles is vital for synthesis of high quality materials, but still not feasible due to its complexity. We present a set of Population Balance Equations (PBE) to model the kinetics of interest and attempt the prediction of particles synthesis. When experimentally grounded values of physical parameters are employed, a first difficulty is given by the great difference in magnitude of the involved variables. Thus, we propose a novel approach able to scale the PBE model to dimensionless variables, assuming a computationally tractable order of magnitude, even though experimental values of parameters are used. Then, with the aim of enhancing performance of the prospective PBE model, we investigate a possibility of reducing its complexity by neglecting the aggregation terms. In particular, we derive a quantitative criterion for locating regions of “slow” and “fast” aggregation and introduce a dimensionless PBE model of reduced complexity. When compared with the original PBE model, the resulting model demonstrates several orders of magnitude improved computational efficiency.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

SESIÓN ESPECIAL 15  
Numerical Methods and  
Computational Mathematics

THE VARIATIONAL PRINCIPLE OF  
DIRAC-FRENKEL

THERMODYNAMICS OF LEARNING  
PHYSICAL PHENOMENA

A SECOND-ORDER FAST-  
CONVOLUTION METHOD FOR THE  
FRACTIONAL LAPLACIAN

ON PSEUDORANDOMNESS OF THE  
SCHRÖDINGER MAP

ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS WITH  
CHEBYSHEV POLYNOMIALS IN OPTION  
PRICING

APPROACH TO OPTIMIZATION  
PROBLEMS IN NETWORK  
ENGINEERING

INTRINSIC PROPER GENERALIZED  
DECOMPOSITION MODES ON  
GRASSMANN...

STRUCTURE AND APPROXIMATION  
PROPERTIES OF LAPLACIAN-LIKE  
WITH APPLICATIONS

SUCCESSFUL LOVE STORIES AS  
DIFFERENTIAL GAMES

MODEL & METHODS FOR CHEMICAL  
KINETICS: STUDY OF LATEX  
PARTICLES FORMATION

VISIBILITY-BASED PURSUIT-EVASION  
GAMES IN DOMAINS WITH OBSTACLES

## Visibility-based pursuit-evasion games in domains with obstacles

CARLOS ESTEVE  
University of Cambridge  
[ce423@cam.ac.uk](mailto:ce423@cam.ac.uk)

**Abstract:** In this talk I consider a two-player zero-sum game in which the payoff involves the visibility between the players. First, I formulate the problem using the framework of differential game theory. After discussing the difficulties arising in the associated Hamilton-Jacobi-Isaacs (HJI) equation, I will present a new formulation of the problem which relies on a convenient quantification of the visibility. This formulation allows the construction of sub-optimal feedback controls which are computationally efficient, even in high-dimensional scenarios. I will discuss the performance of these controls in comparison with the optimal ones provided by the HJI equation. Finally, I will conclude the talk with some possible directions about how these computationally efficient controls could be improved to approximate optimality.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

SESIÓN ESPECIAL 15  
Numerical Methods and  
Computational Mathematics

THE VARIATIONAL PRINCIPLE OF  
DIRAC-FRENKEL

THERMODYNAMICS OF LEARNING  
PHYSICAL PHENOMENA

A SECOND-ORDER FAST-  
CONVOLUTION METHOD FOR THE  
FRACTIONAL LAPLACIAN

ON PSEUDORANDOMNESS OF THE  
SCHRÖDINGER MAP

ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS WITH  
CHEBYSHEV POLYNOMIALS IN OPTION  
PRICING

APPROACH TO OPTIMIZATION  
PROBLEMS IN NETWORK  
ENGINEERING

INTRINSIC PROPER GENERALIZED  
DECOMPOSITION MODES ON  
GRASSMANN...

STRUCTURE AND APPROXIMATION  
PROPERTIES OF LAPLACIAN-LIKE  
WITH APPLICATIONS

SUCCESSFUL LOVE STORIES AS  
DIFFERENTIAL GAMES

MODEL & METHODS FOR CHEMICAL  
KINETICS: STUDY OF LATEX  
PARTICLES FORMATION

VISIBILITY-BASED PURSUIT-EVASION  
GAMES IN DOMAINS WITH OBSTACLES

## SESIÓN ESPECIAL 16

### Geometría Algebraica entre Aplicaciones y Computación

#### Organizadores:

MARINA GARROTE-LÓPEZ  
(Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences)

BEATRIZ PASCUAL ESCUDERO  
(Universidad Politécnica de Madrid)

JOSUÉ TONELLI-CUETO  
(Johns Hopkins University)

#### Descripción:

La geometría algebraica estudia objetos descritos por polinomios. A medida que estos objetos geométricos incrementan su presencia en aplicaciones (ciencias de la vida, ingeniería, etc.) y las posibilidades de tratarlos computacionalmente se incrementan, la necesidad por comprender, desarrollar e implementar métodos computacionales en geometría algebraica se vuelve más imperiosa. En esta sesión, se presentarán algunos de los últimos desarrollos en geometría algebraica aplicada y computacional.

SESIÓN ESPECIAL 16  
Geometría Algebraica entre  
Aplicaciones y Computación

SIMPLE EQUATIONS FOR  
PHYLOGENETIC ALGEBRAIC VARIETIES

A NOVEL ALGEBRAIC APPROACH TO  
TIME-REVERSIBLE EVOLUTIONARY  
MODELS

THE GEOMETRY OF COLORED  
GAUSSIAN DAG MODELS

THE VORONOI DIAGRAM OF  
CODIMENSION ONE VARIETIES UNDER  
POLYHEDRAL NORMS

THE WONDERFUL GEOMETRY OF  
THE VANDERMONDE MAP

ON PROPERTIES OF THE SIGNED  
REDUCED  $A$ -DISCRIMINANT

GLUING AND SPLITTING OF  
HOMOGENEOUS TORIC IDEALS

COMBINATORIAL STUDY OF  
MORPHISMS OF REAL  
UNIVARIATE SINGULARITIES

ON THE THE EIGENVALUES OF  
 $Q$ -MATRICES AND  $P$ -MATRICES

DUALITY IN MASS-ACTION  
NETWORKS

CONDITIONAL EUCLIDEAN DISTANCE  
OPTIMIZATION VIA RELATIVE  
TANGENCY

IMPORTANCE MEASURES OF MULTI-  
STATE SYSTEMS VIA MONOMIAL  
IDEALS



## Simple equations for phylogenetic algebraic varieties

MARTA CASANELLAS RIUS, JESÚS FERNÁNDEZ-SÁNCHEZ

Universitat Politècnica de Catalunya

[marta.casanellas@upc.edu](mailto:marta.casanellas@upc.edu)

**Abstract:** Phylogenetics studies the evolutionary relationships among species using their molecular sequences, which are represented on a phylogenetic tree or network. A Markov process on a phylogenetic tree or network parametrizes an algebraic variety, the so-called phylogenetic variety. One can use a general Markov model or one of its submodels:  $G$ -equivariant models with symmetries defined by a group  $G$ . Algebraic geometry has been used for phylogenetic reconstruction. Since  $G$ -equivariant models have fewer parameters than a general Markov model, their phylogenetic varieties are defined by more equations and these are usually hard to find. We will see that we can easily derive equations for  $G$ -equivariant models from the equations of a phylogenetic variety evolving under a general Markov model.

SESIÓN ESPECIAL 16  
Geometría Algebraica entre  
Aplicaciones y Computación

SIMPLE EQUATIONS FOR  
PHYLOGENETIC ALGEBRAIC VARIETIES

A NOVEL ALGEBRAIC APPROACH TO  
TIME-REVERSIBLE EVOLUTIONARY  
MODELS

THE GEOMETRY OF COLORED  
GAUSSIAN DAG MODELS

THE VORONOI DIAGRAM OF  
CODIMENSION ONE VARIETIES UNDER  
POLYHEDRAL NORMS

THE WONDERFUL GEOMETRY OF  
THE VANDERMONDE MAP

ON PROPERTIES OF THE SIGNED  
REDUCED  $A$ -DISCRIMINANT

GLUING AND SPLITTING OF  
HOMOGENEOUS TORIC IDEALS

COMBINATORIAL STUDY OF  
MORPHISMS OF REAL  
UNIVARIATE SINGULARITIES

ON THE THE EIGENVALUES OF  
 $Q$ -MATRICES AND  $P$ -MATRICES

DUALITY IN MASS-ACTION  
NETWORKS

CONDITIONAL EUCLIDEAN DISTANCE  
OPTIMIZATION VIA RELATIVE  
TANGENCY

IMPORTANCE MEASURES OF MULTI-  
STATE SYSTEMS VIA MONOMIAL  
IDEALS

JUEVES, 25 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

## A novel algebraic approach to time-reversible evolutionary models

ROSER HOMS PONS, MARTA CASANELLAS, ANGÉLICA TORRES

Centre de Recerca Matemàtica

[rhoms@crm.cat](mailto:rhoms@crm.cat)

**Abstract:** Algebraic tools have been proven to be useful in phylogenetic reconstruction and model selection by means of the study of phylogenetic invariants. However, up to now, the models studied from an algebraic viewpoint are either too general or too restrictive to be used in practice. In this talk we consider algebraic time-reversible models on phylogenetic trees and introduce a new inner product to make all transition matrices of the process diagonalizable through the same orthogonal eigenbasis. This framework generalizes the Fourier transform widely used to work with group-based models. As illustration, we provide relevant phylogenetic invariants for trees evolving under the Tamura-Nei model of nucleotide substitution.

SESIÓN ESPECIAL 16  
Geometría Algebraica entre  
Aplicaciones y Computación

SIMPLE EQUATIONS FOR  
PHYLOGENETIC ALGEBRAIC VARIETIES

A NOVEL ALGEBRAIC APPROACH TO  
TIME-REVERSIBLE EVOLUTIONARY  
MODELS

THE GEOMETRY OF COLORED  
GAUSSIAN DAG MODELS

THE VORONOI DIAGRAM OF  
CODIMENSION ONE VARIETIES UNDER  
POLYHEDRAL NORMS

THE WONDERFUL GEOMETRY OF  
THE VANDERMONDE MAP

ON PROPERTIES OF THE SIGNED  
REDUCED A-DISCRIMINANT

GLUING AND SPLITTING OF  
HOMOGENEOUS TORIC IDEALS

COMBINATORIAL STUDY OF  
MORPHISMS OF REAL  
UNIVARIATE SINGULARITIES

ON THE THE EIGENVALUES OF  
Q-MATRICES AND P-MATRICES

DUALITY IN MASS-ACTION  
NETWORKS

CONDITIONAL EUCLIDEAN DISTANCE  
OPTIMIZATION VIA RELATIVE  
TANGENCY

IMPORTANCE MEASURES OF MULTI-  
STATE SYSTEMS VIA MONOMIAL  
IDEALS

JUEVES, 25 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

## The Geometry of Colored Gaussian DAG Models

LIAM SOLUS, TOBIAS BOEGE, KAIE KUBJAS, PRATIK MISRA  
KTH Royal Institute of Technology  
[solus@kth.se](mailto:solus@kth.se)

**Abstract:** A colored directed acyclic graph can be used to represent the gaussian DAG models that fulfill a collection of partial homoscedasticity and partial homogeneity constraints placed on the model error variances and regression coefficients according to a coloring of the vertices and edges of the graph. We observe that the ideal generated by the conditional independence constraints imposed by the graph together with a set of polynomial constraints corresponding to the coloring is equal to the vanishing ideal of the model following saturation by the leading principal minors of the covariance matrix. This observation leads to a global Markov property with applications in causal discovery. We also observe that these models are smooth, making the models amenable to likelihood ratio tests.

SESIÓN ESPECIAL 16  
Geometría Algebraica entre  
Aplicaciones y Computación

SIMPLE EQUATIONS FOR  
PHYLOGENETIC ALGEBRAIC VARIETIES

A NOVEL ALGEBRAIC APPROACH TO  
TIME-REVERSIBLE EVOLUTIONARY  
MODELS

THE GEOMETRY OF COLORED  
GAUSSIAN DAG MODELS

THE VORONOI DIAGRAM OF  
CODIMENSION ONE VARIETIES UNDER  
POLYHEDRAL NORMS

THE WONDERFUL GEOMETRY OF  
THE VANDERMONDE MAP

ON PROPERTIES OF THE SIGNED  
REDUCED  $A$ -DISCRIMINANT

GLUING AND SPLITTING OF  
HOMOGENEOUS TORIC IDEALS

COMBINATORIAL STUDY OF  
MORPHISMS OF REAL  
UNIVARIATE SINGULARITIES

ON THE THE EIGENVALUES OF  
 $Q$ -MATRICES AND  $P$ -MATRICES

DUALITY IN MASS-ACTION  
NETWORKS

CONDITIONAL EUCLIDEAN DISTANCE  
OPTIMIZATION VIA RELATIVE  
TANGENCY

IMPORTANCE MEASURES OF MULTI-  
STATE SYSTEMS VIA MONOMIAL  
IDEALS

JUEVES, 25 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

## The Voronoi diagram of codimension one varieties under polyhedral norms

ANGÉLICA TORRES, NIDHI KAIHNSA, ELIANA DUARTE, JULIA LINDBERG,  
MADDIE WEINSTEIN

Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences  
[angelica.torres@mis.mpg.de](mailto:angelica.torres@mis.mpg.de)

**Abstract:** Given a point  $x$  in a real algebraic variety  $X$ , which points in space are closer to  $x$  than to any other point in  $X$ ? The answer to this question is precisely the so called *Voronoi cell* of  $x$ , and the set of all Voronoi cells of points in the variety is called the *Voronoi diagram* of  $X$ . Describing the Voronoi diagram of a variety is a fundamental problem in Metric Algebraic Geometry, and it has been extensively studied for the Euclidean distance. In this talk we explore the description of the Voronoi diagram of algebraic varieties of codimension one when the distance arises from a polyhedral norm. We will exemplify these diagrams with varieties arising from Algebraic Statistics and optimal transport.

SESIÓN ESPECIAL 16  
Geometría Algebraica entre  
Aplicaciones y Computación

SIMPLE EQUATIONS FOR  
PHYLOGENETIC ALGEBRAIC VARIETIES

A NOVEL ALGEBRAIC APPROACH TO  
TIME-REVERSIBLE EVOLUTIONARY  
MODELS

THE GEOMETRY OF COLORED  
GAUSSIAN DAG MODELS

THE VORONOI DIAGRAM OF  
CODIMENSION ONE VARIETIES UNDER  
POLYHEDRAL NORMS

THE WONDERFUL GEOMETRY OF  
THE VANDERMONDE MAP

ON PROPERTIES OF THE SIGNED  
REDUCED  $A$ -DISCRIMINANT

GLUING AND SPLITTING OF  
HOMOGENEOUS TORIC IDEALS

COMBINATORIAL STUDY OF  
MORPHISMS OF REAL  
UNIVARIATE SINGULARITIES

ON THE THE EIGENVALUES OF  
 $Q$ -MATRICES AND  $P$ -MATRICES

DUALITY IN MASS-ACTION  
NETWORKS

CONDITIONAL EUCLIDEAN DISTANCE  
OPTIMIZATION VIA RELATIVE  
TANGENCY

IMPORTANCE MEASURES OF MULTI-  
STATE SYSTEMS VIA MONOMIAL  
IDEALS

JUEVES, 25 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

## The Wonderful Geometry of the Vandermonde Map

CORDIAN RIENER, JOSE ACEVEDO, GRIGORIY BLEKHERMAN, SEBASTIAN DEBUS

University of Tromsø  
[cordian.riener@uit.no](mailto:cordian.riener@uit.no)

**Abstract:** The Vandermonde map is the polynomial map given by the power-sum polynomials. We study the geometry of the image of the nonnegative orthant under this map and focus on the limit as the number of variables approaches infinity. We will show, the geometry of this limit is the key to new undecidability results in nonnegativity of symmetric polynomials and deciding validity of trace inequalities in linear algebra.

SESIÓN ESPECIAL 16  
Geometría Algebraica entre  
Aplicaciones y Computación

SIMPLE EQUATIONS FOR  
PHYLOGENETIC ALGEBRAIC VARIETIES

A NOVEL ALGEBRAIC APPROACH TO  
TIME-REVERSIBLE EVOLUTIONARY  
MODELS

THE GEOMETRY OF COLORED  
GAUSSIAN DAG MODELS

THE VORONOI DIAGRAM OF  
CODIMENSION ONE VARIETIES UNDER  
POLYHEDRAL NORMS

THE WONDERFUL GEOMETRY OF  
THE VANDERMONDE MAP

ON PROPERTIES OF THE SIGNED  
REDUCED  $A$ -DISCRIMINANT

GLUING AND SPLITTING OF  
HOMOGENEOUS TORIC IDEALS

COMBINATORIAL STUDY OF  
MORPHISMS OF REAL  
UNIVARIATE SINGULARITIES

ON THE THE EIGENVALUES OF  
 $Q$ -MATRICES AND  $P$ -MATRICES

DUALITY IN MASS-ACTION  
NETWORKS

CONDITIONAL EUCLIDEAN DISTANCE  
OPTIMIZATION VIA RELATIVE  
TANGENCY

IMPORTANCE MEASURES OF MULTI-  
STATE SYSTEMS VIA MONOMIAL  
IDEALS

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

## On properties of the signed reduced $A$ -discriminant

MÁTÉ L. TELEK, J. MAURICE ROJAS, WEIXUN DENG

University of Copenhagen

[mlt@math.ku.dk](mailto:mlt@math.ku.dk)

**Abstract:** Computing the isotopy type of a hypersurface, defined as the positive real zero set of a polynomial, is a challenging problem in real algebraic geometry. For a fixed signed support, that is, for fixed exponent vectors and signs of the coefficients of the polynomial, the signed reduced  $A$ -discriminant divides the coefficient space into chambers such that in each chamber the isotopy type of the hypersurfaces is constant. Within unbounded chambers the isotopy type of the hypersurface can be described by a polyhedral object. However, hypersurfaces associated with bounded chambers might have isotopy types, which are more difficult to describe. In this talk, I will discuss properties of the signed support that preclude the existence of such bounded chambers of the signed reduced  $A$ -discriminant.

SESIÓN ESPECIAL 16  
Geometría Algebraica entre  
Aplicaciones y Computación

SIMPLE EQUATIONS FOR  
PHYLOGENETIC ALGEBRAIC VARIETIES

A NOVEL ALGEBRAIC APPROACH TO  
TIME-REVERSIBLE EVOLUTIONARY  
MODELS

THE GEOMETRY OF COLORED  
GAUSSIAN DAG MODELS

THE VORONOI DIAGRAM OF  
CODIMENSION ONE VARIETIES UNDER  
POLYHEDRAL NORMS

THE WONDERFUL GEOMETRY OF  
THE VANDERMONDE MAP

ON PROPERTIES OF THE SIGNED  
REDUCED  $A$ -DISCRIMINANT

GLUING AND SPLITTING OF  
HOMOGENEOUS TORIC IDEALS

COMBINATORIAL STUDY OF  
MORPHISMS OF REAL  
UNIVARIATE SINGULARITIES

ON THE THE EIGENVALUES OF  
 $Q$ -MATRICES AND  $P$ -MATRICES

DUALITY IN MASS-ACTION  
NETWORKS

CONDITIONAL EUCLIDEAN DISTANCE  
OPTIMIZATION VIA RELATIVE  
TANGENCY

IMPORTANCE MEASURES OF MULTI-  
STATE SYSTEMS VIA MONOMIAL  
IDEALS

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

## Gluing and splitting of homogeneous toric ideals

PHILIPPE GIMENEZ, HEMA SRINIVASAN  
 IMUVa, Universidad de Valladolid  
[pgimenez@uva.es](mailto:pgimenez@uva.es)

**Abstract:** We show that two homogeneous affine semigroups can always be glued by embedding them suitably in a higher dimensional space. As a consequence, we will see that the sum of their toric homogeneous ideals is again a homogeneous toric ideal. We will apply our results to answer some questions on the splitting of toric ideals. In particular, we will see that two toric ideals associated to graphs always occur as the splitting of a toric ideal associated to a graph or an hypergraph whose minimal graded free resolution is the tensor product of the resolutions of the two original ideals. This is a sequel of a series of papers by the same authors. Some results recently obtained in [G. Favacchio, J. Hofscheier, G. Keiper, A. Van Tuyl: *J. Algebra* 574 (2021), 409–433] are recovered and improved.

**Acknowledgments:** This work is partially supported the grants PID2019-104844GB-I00, PID2022-137283NB-C22 and TED2021-130358B-I00 funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and by the European Union NextGenerationEU/PRTR.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
 17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 16  
 Geometría Algebraica entre  
 Aplicaciones y Computación

SIMPLE EQUATIONS FOR  
 PHYLOGENETIC ALGEBRAIC VARIETIES

A NOVEL ALGEBRAIC APPROACH TO  
 TIME-REVERSIBLE EVOLUTIONARY  
 MODELS

THE GEOMETRY OF COLORED  
 GAUSSIAN DAG MODELS

THE VORONOI DIAGRAM OF  
 CODIMENSION ONE VARIETIES UNDER  
 POLYHEDRAL NORMS

THE WONDERFUL GEOMETRY OF  
 THE VANDERMONDE MAP

ON PROPERTIES OF THE SIGNED  
 REDUCED A-DISCRIMINANT

GLUING AND SPLITTING OF  
 HOMOGENEOUS TORIC IDEALS

COMBINATORIAL STUDY OF  
 MORPHISMS OF REAL  
 UNIVARIATE SINGULARITIES

ON THE THE EIGENVALUES OF  
 Q-MATRICES AND P-MATRICES

DUALITY IN MASS-ACTION  
 NETWORKS

CONDITIONAL EUCLIDEAN DISTANCE  
 OPTIMIZATION VIA RELATIVE  
 TANGENCY

IMPORTANCE MEASURES OF MULTI-  
 STATE SYSTEMS VIA MONOMIAL  
 IDEALS

## Combinatorial study of morsifications of real univariate singularities

MIRUNA-STEFANA SOREA, ARNAUD BODIN, EVELIA ROSA GARCÍA BARROSO,  
PATRICK POPESCU-PAMPU  
Lucian Blaga University of Sibiu, Romania  
[mirunastefana.sorea@ulbsibiu.ro](mailto:mirunastefana.sorea@ulbsibiu.ro)

**Abstract:** We study a broad class of morsifications of germs of univariate real analytic functions. We characterize the combinatorial types of the resulting Morse functions, via planar contact trees constructed from Newton-Puiseux roots of the polar curves of the morsifications.

SESIÓN ESPECIAL 16  
Geometría Algebraica entre  
Aplicaciones y Computación

SIMPLE EQUATIONS FOR  
PHYLOGENETIC ALGEBRAIC VARIETIES

A NOVEL ALGEBRAIC APPROACH TO  
TIME-REVERSIBLE EVOLUTIONARY  
MODELS

THE GEOMETRY OF COLORED  
GAUSSIAN DAG MODELS

THE VORONOI DIAGRAM OF  
CODIMENSION ONE VARIETIES UNDER  
POLYHEDRAL NORMS

THE WONDERFUL GEOMETRY OF  
THE VANDERMONDE MAP

ON PROPERTIES OF THE SIGNED  
REDUCED  $A$ -DISCRIMINANT

GLUING AND SPLITTING OF  
HOMOGENEOUS TORIC IDEALS

COMBINATORIAL STUDY OF  
MORSIFICATIONS OF REAL  
UNIVARIATE SINGULARITIES

ON THE THE EIGENVALUES OF  
 $Q$ -MATRICES AND  $P$ -MATRICES

DUALITY IN MASS-ACTION  
NETWORKS

CONDITIONAL EUCLIDEAN DISTANCE  
OPTIMIZATION VIA RELATIVE  
TANGENCY

IMPORTANCE MEASURES OF MULTI-  
STATE SYSTEMS VIA MONOMIAL  
IDEALS

JUEVES, 25 DE ENERO:  
17:30 – 18:00



## On the the eigenvalues of $Q$ -matrices and $P$ -matrices

LAUREANO GONZALEZ-VEGA

CUNEF Universidad

laureano.gonzalez@cunef.edu

**Abstract:**  $P$ -matrices are matrices all of whose principal minors are positive.  $Q$ -matrices are matrices whose sums of principal minors of the same order are positive. A matrix is a  $QM$ -matrix if all its powers are  $Q$ -matrices. The study of the eigenvalues of these matrices (and its powers) brings many open questions: for example, it is not know if the eigenvalues of a matrix  $A$  such that  $A$  and  $A^2$  are  $P$ -matrices necessarily have positive real parts. In order to get a complete answer to these open questions we will characterise the real  $QM$ -matrices up-to size 5 and we characterise those real matrices  $A$ ,  $4 \times 4$ , such that  $A$  and  $A^2$  are  $Q$ -matrices but not all eigenvalues of  $A$  have positive real part.

**Acknowledgments:** Partially supported by the grant PID2020-113192GB-I00/AEI/10.13039/501100011033 (Mathematical Visualization: Foundations, Algorithms and Applications) from the Spanish State Research Agency (Ministerio de Ciencia e Innovación)

VIERNES, 26 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 16  
Geometría Algebraica entre  
Aplicaciones y Computación

SIMPLE EQUATIONS FOR  
PHYLOGENETIC ALGEBRAIC VARIETIES

A NOVEL ALGEBRAIC APPROACH TO  
TIME-REVERSIBLE EVOLUTIONARY  
MODELS

THE GEOMETRY OF COLORED  
GAUSSIAN DAG MODELS

THE VORONOI DIAGRAM OF  
CODIMENSION ONE VARIETIES UNDER  
POLYHEDRAL NORMS

THE WONDERFUL GEOMETRY OF  
THE VANDERMONDE MAP

ON PROPERTIES OF THE SIGNED  
REDUCED  $A$ -DISCRIMINANT

GLUING AND SPLITTING OF  
HOMOGENEOUS TORIC IDEALS

COMBINATORIAL STUDY OF  
MORPHISMS OF REAL  
UNIVARIATE SINGULARITIES

ON THE THE EIGENVALUES OF  
 $Q$ -MATRICES AND  $P$ -MATRICES

DUALITY IN MASS-ACTION  
NETWORKS

CONDITIONAL EUCLIDEAN DISTANCE  
OPTIMIZATION VIA RELATIVE  
TANGENCY

IMPORTANCE MEASURES OF MULTI-  
STATE SYSTEMS VIA MONOMIAL  
IDEALS

## Duality in mass-action networks: A step closer to a new case of the Global Attractor Conjecture?

ALEXANDRU IOSIF

Universidad Rey Juan Carlos de Madrid

[alexandru.iosif@urjc.es](mailto:alexandru.iosif@urjc.es)

**Abstract:** Mass-action networks can be regarded as polynomial ODEs, making their steady states semi-algebraic varieties. Within this framework, we introduce maximal invariant polyhedral supports and we prove that the set of preclusters is dual to the set of maximal invariant polyhedral supports. Precusters are special cases of the clusters introduced in 2012 by Conradi and Flockerzi. Given the close relation between maximal invariant polyhedral supports and siphons, we conjecture that there is a duality relation between siphons and clusters, which, we believe, based on the recent work of Craciun et al., might lead to the absence of boundary steady states in toric dynamical systems with small codimensional invariant polyhedra.

SESIÓN ESPECIAL 16  
Geometría Algebraica entre  
Aplicaciones y Computación

SIMPLE EQUATIONS FOR  
PHYLOGENETIC ALGEBRAIC VARIETIES

A NOVEL ALGEBRAIC APPROACH TO  
TIME-REVERSIBLE EVOLUTIONARY  
MODELS

THE GEOMETRY OF COLORED  
GAUSSIAN DAG MODELS

THE VORONOI DIAGRAM OF  
CODIMENSION ONE VARIETIES UNDER  
POLYHEDRAL NORMS

THE WONDERFUL GEOMETRY OF  
THE VANDERMONDE MAP

ON PROPERTIES OF THE SIGNED  
REDUCED  $A$ -DISCRIMINANT

GLUING AND SPLITTING OF  
HOMOGENEOUS TORIC IDEALS

COMBINATORIAL STUDY OF  
MORPHISMS OF REAL  
UNIVARIATE SINGULARITIES

ON THE THE EIGENVALUES OF  
 $Q$ -MATRICES AND  $P$ -MATRICES

DUALITY IN MASS-ACTION  
NETWORKS

CONDITIONAL EUCLIDEAN DISTANCE  
OPTIMIZATION VIA RELATIVE  
TANGENCY

IMPORTANCE MEASURES OF MULTI-  
STATE SYSTEMS VIA MONOMIAL  
IDEALS

VIERNES, 26 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

## Conditional Euclidean distance optimization via relative tangency

LUCA SODOMACO, SANDRA DI ROCCO, LUKAS GUSTAFSSON

KTH Stockholm  
sodomaco@kth.se

**Abstract:** We introduce a theory of relative tangency for algebraic varieties. The dual variety  $X_Z^\vee$  of a variety  $X$  relative to a subvariety  $Z$  is the set of hyperplanes tangent to  $X$  at a point of  $Z$ . We also introduce polar classes of  $X$  relative to  $Z$ . We apply these notions to studying the critical points of the Euclidean Distance from a data point to  $X$ , lying on  $Z$ . The locus where the number of such conditional critical points is positive is the ED data locus of  $X$  given  $Z$ . The generic number of such critical points defines the conditional ED degree of  $X$  given  $Z$ . We show the irreducibility of ED data loci and compute their dimensions and degrees in terms of relative characteristic classes. The talk is based on a joint work with Sandra Di Rocco and Lukas Gustafsson.

SESIÓN ESPECIAL 16  
Geometría Algebraica entre  
Aplicaciones y Computación

SIMPLE EQUATIONS FOR  
PHYLOGENETIC ALGEBRAIC VARIETIES

A NOVEL ALGEBRAIC APPROACH TO  
TIME-REVERSIBLE EVOLUTIONARY  
MODELS

THE GEOMETRY OF COLORED  
GAUSSIAN DAG MODELS

THE VORONOI DIAGRAM OF  
CODIMENSION ONE VARIETIES UNDER  
POLYHEDRAL NORMS

THE WONDERFUL GEOMETRY OF  
THE VANDERMONDE MAP

ON PROPERTIES OF THE SIGNED  
REDUCED A-DISCRIMINANT

GLUING AND SPLITTING OF  
HOMOGENEOUS TORIC IDEALS

COMBINATORIAL STUDY OF  
MORPHISMS OF REAL  
UNIVARIATE SINGULARITIES

ON THE THE EIGENVALUES OF  
Q-MATRICES AND P-MATRICES

DUALITY IN MASS-ACTION  
NETWORKS

CONDITIONAL EUCLIDEAN DISTANCE  
OPTIMIZATION VIA RELATIVE  
TANGENCY

IMPORTANCE MEASURES OF MULTI-  
STATE SYSTEMS VIA MONOMIAL  
IDEALS

VIERNES, 26 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

## Importance measures of multi-state systems via monomial ideals

PATRICIA PASCUAL-ORTIGOSA, EDUARDO SAÉNZ-DE-CABEZÓN,  
RODRIGO IGLESIAS  
Universidad de La Rioja  
[patricia.pascualo@unirioja.es](mailto:patricia.pascualo@unirioja.es)

**Abstract:** In this talk we will introduce multi-state systems and how they are related to monomial ideals. Then, we will explain what importance measures are and how we can use algebra, in particular, a tool called support posets, to identify the most important structural components of a multi-state system.// En esta charla introduciremos los sistemas multi-estado y la relación existente entre ellos y los ideales lonomiales. Después, explicaremos qué son las medidas de importancia y cómo podemos utilizar el álgebra, en particular una herramienta llamada support poset, para identificar las componentes más importantes estructuralmente de un sistema multi-estado.

SESIÓN ESPECIAL 16  
Geometría Algebraica entre  
Aplicaciones y Computación

SIMPLE EQUATIONS FOR  
PHYLOGENETIC ALGEBRAIC VARIETIES

A NOVEL ALGEBRAIC APPROACH TO  
TIME-REVERSIBLE EVOLUTIONARY  
MODELS

THE GEOMETRY OF COLORED  
GAUSSIAN DAG MODELS

THE VORONOI DIAGRAM OF  
CODIMENSION ONE VARIETIES UNDER  
POLYHEDRAL NORMS

THE WONDERFUL GEOMETRY OF  
THE VANDERMONDE MAP

ON PROPERTIES OF THE SIGNED  
REDUCED A-DISCRIMINANT

GLUING AND SPLITTING OF  
HOMOGENEOUS TORIC IDEALS

COMBINATORIAL STUDY OF  
MORPHISMS OF REAL  
UNIVARIATE SINGULARITIES

ON THE THE EIGENVALUES OF  
Q-MATRICES AND P-MATRICES

DUALITY IN MASS-ACTION  
NETWORKS

CONDITIONAL EUCLIDEAN DISTANCE  
OPTIMIZATION VIA RELATIVE  
TANGENCY

IMPORTANCE MEASURES OF MULTI-  
STATE SYSTEMS VIA MONOMIAL  
IDEALS

VIERNES, 26 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

## SESIÓN ESPECIAL 17

### Desarrollo Matemático en Inteligencia Artificial y Machine Learning

#### Organizadores:

**ROBERTO GARCÍA ARAGÓN**  
(Universidad de Cádiz)

**LAURA DE MIGUEL**  
(Universidad Pública de Navarra)

**MANUEL OJEDA HERNÁNDEZ**  
(Universidad de Málaga)

**CARLOS LÓPEZ MOLINA**  
(Universidad Pública de Navarra)

**DAVID LOBO**  
(Universidad de Cádiz)

#### Descripción:

En la base del desarrollo de la inteligencia artificial y el aprendizaje máquina (o más conocido, *Machine Learning*) se encuentran diferentes modelos y operaciones matemáticas, que van desde las técnicas de análisis y fusión de datos hasta procesos de optimización o el uso del álgebra lineal (que es la base del aprendizaje profundo o *Deep Learning*) o la probabilidad. Esta sesión especial pretende continuar la estela de las sesiones organizadas en las ediciones del congreso RSME de Madrid (2000), Tenerife (2002), Valencia (2005), Oviedo (2009), Ávila (2011), Santiago (2013) y Zaragoza (2017) sobre interacciones entre Informática y Matemática, así como en el II Encuentro RSME-UMA de Ronda (2022). El objetivo principal de la propuesta es la divulgación de los últimos avances en diferentes disciplinas matemáticas cuya aplicación está destinada a la Inteligencia Artificial y el *Machine Learning*.

SESIÓN ESPECIAL 17  
Desarrollo Matemático en Inteligencia Artificial y Machine Learning

FUSIÓN DE INFORMACIÓN  
MULTIVALUADA MEDIANTE  
GRADO DE TOTALNESS

MODELIZACIÓN DE LOS DATOS:  
FUERZAS GRAVITACIONALES

SOBRE EL ANÁLISIS EN CONCEPTOS  
FORMALES COMO MODELO DE  
SEMÁNTICA COGNITIVA...

COMBINACIÓN DE FUNCIONES DE  
FUSIÓN A TRAVÉS DE UNA EXTENSIÓN  
DE FUNCIONES...

ENLAZANDO RETÍCULOS DE  
CONCEPTOS MULTIADJUNTOS

COMPOSICIÓN DE  
CONTEXTOS L-FUZZY. UNA  
HERRAMIENTA PARA EL DISEÑO  
DE BIOMATERIALES

CARACTERIZACIÓN DE RETÍCULOS  
RESIDUADOS SOBRE  $\{0, 1\}$  A TRAVÉS  
DE LOS F-ÍNDICES...

ALGORITMOS CBO PARA EL CÁLCULO  
DEL RETÍCULO DE CONCEPTOS

HESITANT FUZZY SETS Y  
GRADUAL SETS: UN TEOREMA DE  
REPRESENTACIÓN GENERALIZADO

UN ANÁLISIS SOBRE LA AGREGACIÓN  
DE ESPACIOS VECTORIALES DIFUSOS

ASPECTOS CUANTIFICABLES DE LAS  
DISTRIBUCIONES DE VOTOS

DEFINIENDO LAS ÁLGEBRAS DE  
HEITTING DÉBILES

MEDIDAS DE INCONSISTENCIA  
DE ECUACIONES DE RELACIONES  
DIFUSAS

DESCUBRIMIENTO DE SUBGRUPOS  
CON IMPLICACIONES BORROSAS  
APLICADO AL ANÁLISIS...

HACIA LAS FUNCIONES PROMEDIO  
PARA DATOS INTERVALARES

SISTEMA DE INFERENCIA DIFUSO  
BASADO EN LA COMPARACIÓN DE  
REGLAS

FORKS

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES  
BIPOLARES DE RELACIONES DIFUSAS  
EN RETÍCULOS

## Fusión de información multivaluada mediante grado de totalness

M. FERRERO-JAURRIETA, C. LÓPEZ-MOLINA, J. FERNANDEZ, H. BUSTINCE

Dpto. de Estadística, Informática y Matemáticas, Universidad Pública de Navarra

mikel.ferrero@unavarra.es

**Resumen:** La fusión de información es una fase fundamental en cualquier proceso de inteligencia artificial, como por ejemplo la agregación de características de redes neuronales. Algunas funciones de agregación, como la integral de Choquet o Sugeno, requieren la ordenación de los elementos a agregar. Sin embargo, cuando la estructura es multivaluada esta tarea no es trivial. Con el objetivo de obtener un orden lineal para información multivaluada se introdujeron los órdenes admisibles [1]. Para construir éstos órdenes necesitamos tantas funciones de agregación como dimensiones tengan los elementos, lo cual no siempre es manejable. Las permutaciones admisibles [2] nos permiten obtener cuántas ordenaciones posibles hay a partir de los órdenes admisibles. En este trabajo introducimos el grado de totalness. Entendiendo que un orden parcial es una relación crisp, el grado de totalness nos permite obtener un grado en el que esta relación se mantiene. A partir de esta definición, obtenemos un conjunto de las mejores permutaciones admisibles y obtenemos la función de fusión teniendo en cuenta las permutaciones máximas admisibles. Por último, mostramos el uso de este tipo de funciones en el cálculo de los valores de las puertas de un modelo de red neuronal recurrente basado en Peephole LSTM, mejorando los resultados frente a otras funciones.

### Referencias

- [1] L. De Miguel, M. Sesma-Sara, M. Elkan, M. Asiain, H. Bustince (2017). An Algorithm for group decision making using  $n$ -dimensional fuzzy sets, admissible orders and OWA operators. *Information Fusion*, 37, 126-131.
- [2] D. Paternain, L. De Miguel, G. Ochoa, I. Lizasoain, R. Mesiar, H. Bustince (2019). The Interval-Valued Choquet Integral Based on Admissible Permutations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 27, 8, 1638-1647

**Agradecimientos:** Este trabajo ha sido financiado mediante proyecto de investigación PID2022-136627NB-I00 de la Agencia Estatal de Investigación y por Tracasa Instrumental.

MARTES, 23 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

SESIÓN ESPECIAL 17  
Desarrollo Matemático en Inteligencia Artificial y Machine Learning

FUSIÓN DE INFORMACIÓN  
MULTIVALUADA MEDIANTE  
GRADO DE TOTALNESS

MODELIZACIÓN DE LOS DATOS:  
FUERZAS GRAVITACIONALES

SOBRE EL ANÁLISIS EN CONCEPTOS  
FORMALES COMO MODELO DE  
SEMÁNTICA COGNITIVA...

COMBINACIÓN DE FUNCIONES DE  
FUSIÓN A TRAVÉS DE UNA EXTENSIÓN  
DE FUNCIONES...

ENLAZADO RETÍCULOS DE  
CONCEPTOS MULTIJUNTOS

COMPOSICIÓN DE  
CONTEXTOS L-FUZZY. UNA  
HERRAMIENTA PARA EL DISEÑO  
DE BIOMATERIALES

CARACTERIZACIÓN DE RETÍCULOS  
RESIDUADOS SOBRE  $\{0, 1\}$  A TRAVÉS  
DE LOS F-ÍNDICES...

ALGORITMOS CBO PARA EL CÁLCULO  
DEL RETÍCULO DE CONCEPTOS

HESITANT FUZZY SETS Y  
GRADUAL SETS: UN TEOREMA DE  
REPRESENTACIÓN GENERALIZADO

UN ANÁLISIS SOBRE LA AGREGACIÓN  
DE ESPACIOS VECTORIALES DIFUSOS

ASPECTOS CUANTIFICABLES DE LAS  
DISTRIBUCIONES DE VOTOS

DEFINIENDO LAS ÁLGEBRAS DE  
HEYTING DÉBILES

MEDIDAS DE INCONSISTENCIA  
DE ECUACIONES DE RELACIONES  
DIFUSAS

DESCUBRIMIENTO DE SUBGRUPOS  
CON IMPLICACIONES BORROSAS  
APLICADO AL ANÁLISIS...

HACIA LAS FUNCIONES PROMEDIO  
PARA DATOS INTERVALARES

SISTEMA DE INFERENCIA DIFUSO  
BASADO EN LA COMPARACIÓN DE  
REGLAS

FORKS

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES  
BIPOLES DE RELACIONES DIFUSAS  
EN RETÍCULOS

## Modelización de los datos: fuerzas gravitacionales

C. MARCO-DETCART, J. A. RINCON, V. JULIAN, C. CARRASCOSA,  
C. LOPEZ-MOLINA

Dpto. de Sistemas Informáticos y Computación, Universitat Politècnica de València (UPV)  
[cedmarde@upv.es](mailto:cedmarde@upv.es)

**Resumen:** Numerosas técnicas de inteligencia artificial se inspiran en la naturaleza para modelar la percepción y comparación de objetos. Un ejemplo claro lo encontramos en la simulación de conexiones neuronales en el cerebro humano, lo que da lugar a las redes neuronales artificiales. Los algoritmos genéticos, basados en principios evolutivos para generar posibles poblaciones para encontrar soluciones, o el funcionamiento de los enjambres o las colonias de hormigas son otros ejemplos.

Relacionado con la inspiración natural encontramos aproximaciones basadas en la Ley de Gravitación Universal [1]. Aplicada a problemas matemáticos, como el clustering y la optimización, se recurre a ecuaciones y cálculos para modelar el comportamiento de partículas que representan nuestros datos.

El clustering basado en fuerzas [2], por ejemplo, se traduce en ecuaciones que describen el movimiento y la interacción de estas “partículas de datos”. Las matemáticas aquí son fundamentales para comprender cómo se comparan los datos, cómo se agrupan y cómo se configura el resultado final.

Además, encontramos aplicaciones en la regularización de imágenes, donde el modelo de fuerzas define cómo las “partículas de píxeles” se desplazan en el espacio de color para mejorar la calidad de las imágenes.

Incluso en el contexto de la teoría de agentes, donde se modelan sentimientos y emociones, el modelo matemático es la base para describir las relaciones y fuerzas que operan entre estos agentes virtuales.

### Referencias

- [1] I. Newton (1687). *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Pan, p. 510.
- [2] W. E. Wright (1977). Gravitational clustering, *Pattern Recognit.*, vol. 9, no. 3, pp. 151–166.

**Agradecimientos:** Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los proyectos PID2021-123673OB-C31, TED2021-131295B-C32 y PID2022-136627NB-I00 del MCIN/AEI/10.13039/501100011033, por “FEDER Una manera de hacer Europa”, CIPROM/2021/077 de la Generalitat Valenciana y por el Servicio de Investigación de la Universitat Politècnica de València.

MARTES, 23 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 17  
Desarrollo Matemático en Inteligencia Artificial y Machine Learning

FUSIÓN DE INFORMACIÓN  
MULTIVALUADA MEDIANTE  
GRADO DE TOTALNESS

MODELIZACIÓN DE LOS DATOS:  
FUERZAS GRAVITACIONALES

SOBRE EL ANÁLISIS EN CONCEPTOS  
FORMALES COMO MODELO DE  
SEMÁNTICA COGNITIVA...

COMBINACIÓN DE FUNCIONES DE  
FUSIÓN A TRAVÉS DE UNA EXTENSIÓN  
DE FUNCIONES...

ENLAZANDO RETÍCULOS DE  
CONCEPTOS MULTIJUNTOS

COMPOSICIÓN DE  
CONTEXTOS L-FUZZY. UNA  
HERRAMIENTA PARA EL DISEÑO  
DE BIOMATERIALES

CARACTERIZACIÓN DE RETÍCULOS  
RESIDUADOS SOBRE  $\{0, 1\}$  A TRAVÉS  
DE LOS F-ÍNDICES...

ALGORITMOS CBO PARA EL CÁLCULO  
DEL RETÍCULO DE CONCEPTOS

HESITANT FUZZY SETS Y  
GRADUAL SETS: UN TEOREMA DE  
REPRESENTACIÓN GENERALIZADO

UN ANÁLISIS SOBRE LA AGREGACIÓN  
DE ESPACIOS VECTORIALES DIFUSOS

ASPECTOS CUANTIFICABLES DE LAS  
DISTRIBUCIONES DE VOTOS

DEFINIENDO LAS ÁLGEBRAS DE  
HEYTING DÉBILES

MEDIDAS DE INCONSISTENCIA  
DE ECUACIONES DE RELACIONES  
DIFUSAS

DESCUBRIMIENTO DE SUBGRUPOS  
CON IMPLICACIONES BORROSAS  
APLICADO AL ANÁLISIS...

HACIA LAS FUNCIONES PROMEDIO  
PARA DATOS INTERVALARES

SISTEMA DE INFERENCIA DIFUSO  
BASADO EN LA COMPARACIÓN DE  
REGLAS

FORKS

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES  
BIPOLARES DE RELACIONES DIFUSAS  
EN RETÍCULOS

## Sobre el Análisis en Conceptos Formales como Modelo de Semántica Cognitiva en IA

FRANCISCO J. VALVERDE ALBACETE, CARMEN PELAEZ MORENO

Dpto. Teoría de la Señal Comunicaciones, Sistemas Informáticos y Computación,

Universidad Rey Juan Carlos

[francisco.valverde@urjc.es](mailto:francisco.valverde@urjc.es)

**Resumen:** Uno de los caminos para construir IA incorporada, embebida, extendida y enactivada (Ing. “Embodied, Embedded, Extended and Enacted”, 4E) es conseguir representaciones con un sustrato incorporado que soporten una interacción enactiva con el entorno.

Los requisitos para el modelado de los flujos *cuantitativos* de información entre un agente *situado* (es decir incorporado y embebido) y el entorno han sido ya propuestos anteriormente. En particular, es fácil medir la efectividad de una sola interacción con el entorno como una tarea de Aprendizaje Máquina (ML), aunque es más difícil observar un bucle de interacción.

Sin embargo, no podemos avanzar en la extensión de la cognición, ni su enacción porque no disponemos de una semántica asociada a las informaciones procesadas por las Inteligencias Artificiales (IA). Propiamente, la Semántica Léxica propone que el significado léxico surge de la oposición en presencia (sintagmática) y en ausencia (paradigmática) de unidades del significado, por ejemplo los lexemas y los marcos semánticos.

El Análisis en Conceptos Formales (Ing., Formal Concept Analysis, FCA) es un intento de vigorizar la teoría de retículos de orden encardinando los desarrollos abstractos en la percepción, cognición y acción. Afortunadamente, existen precedentes en el modelado de estructuras léxicas jerárquicas tanto para lexemas como para marcos semánticos utilizando las facilidades de modelado y exploración de datos del FCA.

En particular nos centramos en explorar extensiones del FCA que permiten, en primer lugar, contextos multi-valorados cuya incidencia toma valor en un semicuerpo idempotente, y en segundo lugar diferentes “modos” de crear conceptos formales para modelar diversos fenómenos de conceptualización.

**Agradecimientos:** Esta investigación se ha llevado a cabo bajo patrocinio del Ministerio de Ciencia e Innovación en el proyecto PID2021-125780NB-I00, EMERGE y la Línea de Actuación No 3. Programa de Excelencia para Francisco José Valverde Albacete. Convenio Plurianual entre Comunidad de Madrid y la Universidad Rey Juan Carlos.

MARTES, 23 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 17  
Desarrollo Matemático en Inteligencia Artificial y Machine Learning

FUSIÓN DE INFORMACIÓN  
MULTIVALUADA MEDIANTE  
GRADO DE TOTALNESS

MODELIZACIÓN DE LOS DATOS:  
FUERZAS GRAVITACIONALES

SOBRE EL ANÁLISIS EN CONCEPTOS  
FORMALES COMO MODELO DE  
SEMÁNTICA COGNITIVA...

COMBINACIÓN DE FUNCIONES DE  
FUSIÓN A TRAVÉS DE UNA EXTENSIÓN  
DE FUNCIONES...

ENLAZANDO RETÍCULOS DE  
CONCEPTOS MULTIAJUNTOS

COMPOSICIÓN DE  
CONTEXTOS L-FUZZY. UNA  
HERRAMIENTA PARA EL DISEÑO  
DE BIOMATERIALES

CARACTERIZACIÓN DE RETÍCULOS  
RESIDUADOS SOBRE  $\{0, 1\}$  A TRAVÉS  
DE LOS F-ÍNDICES...

ALGORITMOS CBO PARA EL CÁLCULO  
DEL RETÍCULO DE CONCEPTOS

HESITANT FUZZY SETS Y  
GRADUAL SETS: UN TEOREMA DE  
REPRESENTACIÓN GENERALIZADO

UN ANÁLISIS SOBRE LA AGREGACIÓN  
DE ESPACIOS VECTORIALES DIFUSOS

ASPECTOS CUANTIFICABLES DE LAS  
DISTRIBUCIONES DE VOTOS

DEFINIENDO LAS ÁLGEBRAS DE  
HEYTING DÉBILES

MEDIDAS DE INCONSISTENCIA  
DE ECUACIONES DE RELACIONES  
DIFUSAS

DESCUBRIMIENTO DE SUBGRUPOS  
CON IMPLICACIONES BORROSAS  
APLICADO AL ANÁLISIS...

HACIA LAS FUNCIONES PROMEDIO  
PARA DATOS INTERVALARES

SISTEMA DE INFERENCIA DIFUSO  
BASADO EN LA COMPARACIÓN DE  
REGLAS

FORKS

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES  
BIPOLARES DE RELACIONES DIFUSAS  
EN RETÍCULOS



## Combinación de funciones de fusión a través de una extensión de funciones basadas en penalty

IOSU RODRIGUEZ-MARTINEZ, ZDENKO TAKÁ,  
FRANCISCO HERRERA, HUMBERTO BUSTINCE

Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas, Universidad Pública de Navarra  
iosu.rodriguez@unavarra.es

**Resumen:** La fusión de información es una tarea prevalente en el campo del aprendizaje automático, y las funciones de fusión y agregación son algunas de las herramientas matemáticas más populares para abordarla. No obstante, la elección de la más adecuada puede variar en función del problema.

Las funciones basadas en penalty [1] permiten seleccionar la mejor de entre una lista de funciones con respecto a una distancia y se han utilizado con éxito en áreas como la toma de decisión [2] o la reducción de imagen [3] en el pasado.

Otra estrategia posible es la de usar una combinación convexa de varias funciones de fusión. En este caso se considera la información provista por cada función, y se trata de ponderar adecuadamente cada una de ellas según su importancia.

En este trabajo extendemos el concepto de función basada en penalty con la intención de combinar ambos enfoques: combinar  $n$  funciones de fusión mediante una combinación convexa, ponderando la contribución de cada una a partir de una función basada en penalty. Presentamos métodos de construcción de estas funciones y demostramos su utilidad a la hora de agregar las características extraídas por una red neuronal convolucional, mejorando los resultados obtenidos con soluciones previos.

### Referencias

- [1] T. Calvo, G. Beliakov (2010). Aggregation functions based on penalties. *Fuzzy Sets and Systems*, 161(10), 1420–1436.
- [2] M. Elkan et al. (2018). Consensus via penalty functions for decision making in ensembles in fuzzy rule-based classification systems. *Applied Soft Computing*, 67, 728–740.
- [3] D. Paternain, A. Jurio, G. Beliakov (2012) Color image reduction by minimizing penalty functions. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, IEEE, 1–7.

**Agradecimientos:** Los autores agradecen la financiación de los proyectos PID2022-136627NB-I00 y P18-FR4961, la beca VEGA Slovak Republic 1/0267/21 y Tracasa Instrumental.

MARTES, 23 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

SESIÓN ESPECIAL 17  
Desarrollo Matemático en Inteligencia Artificial y Machine Learning

FUSIÓN DE INFORMACIÓN  
MULTIVALUADA MEDIANTE  
GRADO DE TOTALNESS

MODELIZACIÓN DE LOS DATOS:  
FUERZAS GRAVITACIONALES

SOBRE EL ANÁLISIS EN CONCEPTOS  
FORMALES COMO MODELO DE  
SEMÁNTICA COGNITIVA...

COMBINACIÓN DE FUNCIONES DE  
FUSIÓN A TRAVÉS DE UNA EXTENSIÓN  
DE FUNCIONES...

ENLAZADO RETÍCULOS DE  
CONCEPTOS MULTIJUNTOS

COMPOSICIÓN DE  
CONTEXTOS L-FUZZY. UNA  
HERRAMIENTA PARA EL DISEÑO  
DE BIOMATERIALES

CARACTERIZACIÓN DE RETÍCULOS  
RESIDUADOS SOBRE  $\{0, 1\}$  A TRAVÉS  
DE LOS F-ÍNDICES...

ALGORITMOS CBO PARA EL CÁLCULO  
DEL RETÍCULO DE CONCEPTOS

HESITANT FUZZY SETS Y  
GRADUAL SETS: UN TEOREMA DE  
REPRESENTACIÓN GENERALIZADO

UN ANÁLISIS SOBRE LA AGREGACIÓN  
DE ESPACIOS VECTORIALES DIFUSOS

ASPECTOS CUANTIFICABLES DE LAS  
DISTRIBUCIONES DE VOTOS

DEFINIENDO LAS ÁLGEBRAS DE  
HEYTING DÉBILES

MEDIDAS DE INCONSISTENCIA  
DE ECUACIONES DE RELACIONES  
DIFUSAS

DESCUBRIMIENTO DE SUBGRUPOS  
CON IMPLICACIONES BORROSAS  
APLICADO AL ANÁLISIS...

HACIA LAS FUNCIONES PROMEDIO  
PARA DATOS INTERVALARES

SISTEMA DE INFERENCIA DIFUSO  
BASADO EN LA COMPARACIÓN DE  
REGLAS

FORKS

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES  
BIPOLARES DE RELACIONES DIFUSAS  
EN RETÍCULOS

## Enlazando retículos de conceptos multiadjuntos

ROBERTO G. ARAGÓN, JESÚS MEDINA, SAMUEL MOLINA

Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz

[roberto.aragon@uca.es](mailto:roberto.aragon@uca.es)

**Resumen:** El análisis de conceptos formales (FCA, de sus siglas en inglés) es una disciplina de las matemáticas que explota la teoría de retículos con el objetivo último de obtener información a partir de bases de datos relacionales, esto es, bases de datos en las que se pueda identificar un conjunto de objetos, un conjunto de atributos o propiedades, y relaciones entre los elementos de estos conjuntos. En el ambiente del FCA, a esta interpretación formal de la base de datos se llama contexto.

Uno de los principales retos en FCA es el anidamiento o enlace de diferentes contextos. La noción formal de *enlace* (bond, en inglés) está definida en el ambiente clásico de FCA y ha sido ampliamente estudiada en retículos residuados [1, 2]. Dados dos contextos formales, se denomina *enlace* a la relación definida sobre el conjunto de objetos del primer contexto y el conjunto de atributos del segundo contexto, consiguiendo así, vincular/enlazar ambos contextos formales.

En esta contribución se ha estudiado la noción de *enlace débil* y el problema de selección/generación de *enlaces* en el ambiente general de los retículos de conceptos multiadjuntos. Además, se presentará una primera relación entre los bonds y la factorización de contextos formales, que es otro reto relevante en FCA.

### Referencias

- [1] O. Krídlo, L. Antoni, S. Krajčiči (2022). Selection of appropriate bonds between  $L$ -fuzzy formal contexts for recommendation tasks. *Information Sciences*, 606:21–37.
- [2] O. Krídlo, D. López-Rodríguez, L. Antoni, P. Eliaš, S. Krajčiči, M. Ojeda-Aciego (2023). Connecting concept lattices with bonds induced by external information. *Information Sciences*, 648:119498.

**Agradecimientos:** Esta investigación ha sido parcialmente financiada por el Programa Operativo FEDER en colaboración con la Agencia Estatal de Investigación (AEI) con los proyectos PID2019-108991GB-I00 y PID2022-137620NB-I00, y por Proyectos de Transición Ecológica y Digital 2021 del Ministerio de Ciencias e Innovación con el proyecto TED2021-129748B-I00.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 17  
Desarrollo Matemático en Inteligencia Artificial y Machine Learning

FUSIÓN DE INFORMACIÓN  
MULTIVALUADA MEDIANTE  
GRADO DE TOTALNESS

MODELIZACIÓN DE LOS DATOS:  
FUERZAS GRAVITACIONALES

SOBRE EL ANÁLISIS EN CONCEPTOS  
FORMALES COMO MODELO DE  
SEMÁNTICA COGNITIVA...

COMBINACIÓN DE FUNCIONES DE  
FUSIÓN A TRAVÉS DE UNA EXTENSIÓN  
DE FUNCIONES...

ENLAZANDO RETÍCULOS DE  
CONCEPTOS MULTIADJUNTOS

COMPOSICIÓN DE  
CONTEXTOS L-FUZZY. UNA  
HERRAMIENTA PARA EL DISEÑO  
DE BIOMATERIALES

CARACTERIZACIÓN DE RETÍCULOS  
RESIDUADOS SOBRE  $\{0, 1\}$  A TRAVÉS  
DE LOS F-ÍNDICES...

ALGORITMOS CBO PARA EL CÁLCULO  
DEL RETÍCULO DE CONCEPTOS

HESITANT FUZZY SETS Y  
GRADUAL SETS: UN TEOREMA DE  
REPRESENTACIÓN GENERALIZADO

UN ANÁLISIS SOBRE LA AGREGACIÓN  
DE ESPACIOS VECTORIALES DIFUSOS

ASPECTOS CUANTIFICABLES DE LAS  
DISTRIBUCIONES DE VOTOS

DEFINIENDO LAS ÁLGEBRAS DE  
HEYTING DÉBILES

MEDIDAS DE INCONSISTENCIA  
DE ECUACIONES DE RELACIONES  
DIFUSAS

DESCUBRIMIENTO DE SUBGRUPOS  
CON IMPLICACIONES BORROSAS  
APLICADO AL ANÁLISIS...

HACIA LAS FUNCIONES PROMEDIO  
PARA DATOS INTERVALARES

SISTEMA DE INFERENCIA DIFUSO  
BASADO EN LA COMPARACIÓN DE  
REGLAS

FORKS

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES  
BIPOLARES DE RELACIONES DIFUSAS  
EN RETÍCULOS

## Composición de contextos $L$ -fuzzy. Una herramienta para el diseño de biomateriales

CRISTINA ALCALDE, ITSASO LECETA

Dpto. Matemática Aplicada. Universidad del País Vasco (UPV/EHU)

c.alcalde@ehu.eus

**Resumen:** La composición de contextos  $L$ -fuzzy [1] permite establecer relaciones entre conjuntos de elementos que comparten una serie de atributos, proporcionando así una interesante herramienta para extraer información con aplicación en multitud de campos. En este trabajo veremos cómo podemos utilizar dicha herramienta en el diseño de biomateriales. En particular, el material diseñado se basa en quitosano, un polisacárido obtenido a partir de residuos derivados de la industria alimentaria, consiguiendo así un producto con valor añadido. Los materiales son diseñados según su aplicación, por lo que las propiedades requeridas van cambiando. El deseo de obtener una modificación en alguna de las propiedades obtenidas o en alguna variable de la formulación conlleva un coste inmenso de recursos, lo que hace que la estimación de las propiedades del material para diversas modificaciones de las formulaciones en la etapa de diseño sea de vital importancia. La utilización de contextos  $L$ -fuzzy ya ha demostrado ser de ayuda en la fase de diseño del material agilizando el proceso y minimizando el coste ambiental y económico [2]. En el presente trabajo, mediante la composición de contextos difusos, se desea estimar el efecto de la variación del peso molecular del quitosano en las propiedades del material, con el ahorro de recursos de todo tipo que esto conlleva.

### Referencias

- [1] C. Alcalde, A. Burusco, R. Fuentes-González (2012). Some Results on the Composition of  $L$ -Fuzzy Contexts. *Advances in Computational Intelligence, Part II*, Springer Berlin Heidelberg, 305-14.
- [2] I. Leceta, C. Alcalde, M. Urdanpilleta, P. Guerrero, K. de la Caba, A. Burusco (2021). New algorithm for the elucidation of functional properties of gelatin-based materials. *Computers & Chemical Engineering*, 153, 107410.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

SESIÓN ESPECIAL 17  
Desarrollo Matemático en Inteligencia Artificial y Machine Learning

FUSIÓN DE INFORMACIÓN  
MULTIVALUADA MEDIANTE  
GRADO DE TOTALNESS

MODELIZACIÓN DE LOS DATOS:  
FUERZAS GRAVITACIONALES

SOBRE EL ANÁLISIS EN CONCEPTOS  
FORMALES COMO MODELO DE  
SEMÁNTICA COGNITIVA...

COMBINACIÓN DE FUNCIONES DE  
FUSIÓN A TRAVÉS DE UNA EXTENSIÓN  
DE FUNCIONES...

ENLAZADO RETÍCULOS DE  
CONCEPTOS MULTIJUNTOS

COMPOSICIÓN DE  
CONTEXTOS  $L$ -FUZZY. UNA  
HERRAMIENTA PARA EL DISEÑO  
DE BIOMATERIALES

CARACTERIZACIÓN DE RETÍCULOS  
RESIDUADOS SOBRE  $\{0, 1\}$  A TRAVÉS  
DE LOS  $F$ -ÍNDICES...

ALGORITMOS CBO PARA EL CÁLCULO  
DEL RETÍCULO DE CONCEPTOS

HESITANT FUZZY SETS Y  
GRADUAL SETS: UN TEOREMA DE  
REPRESENTACIÓN GENERALIZADO

UN ANÁLISIS SOBRE LA AGREGACIÓN  
DE ESPACIOS VECTORIALES DIFUSOS

ASPECTOS CUANTIFICABLES DE LAS  
DISTRIBUCIONES DE VOTOS

DEFINIENDO LAS ÁLGEBRAS DE  
HEYTING DÉBILES

MEDIDAS DE INCONSISTENCIA  
DE ECUACIONES DE RELACIONES  
DIFUSAS

DESCUBRIMIENTO DE SUBGRUPOS  
CON IMPLICACIONES BORROSAS  
APLICADO AL ANÁLISIS...

HACIA LAS FUNCIONES PROMEDIO  
PARA DATOS INTERVALARES

SISTEMA DE INFERENCIA DIFUSO  
BASADO EN LA COMPARACIÓN DE  
REGLAS

FORKS

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES  
BIPOLARES DE RELACIONES DIFUSAS  
EN RETÍCULOS

## Caracterización de retículos residuados sobre $[0, 1]$ a través de los $f$ -índices de inclusión y del operador composición

NICOLÁS MADRID

Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz

nicolas.madrid@uca.es

**Resumen:** Los  $f$ -índices de inclusión fueron introducidos originalmente en 2015 como una interesante forma de representar la inclusión entre dos conjuntos difusos [1]. La investigaciones posteriores mostraron que la elección del  $f$ -índice de inclusión satisfacía, bajo una reescritura conveniente, los principales sistemas axiomáticos para la definición de medidas de inclusión entre conjuntos difusos [2, 3]; representaba una elección óptima de un operador de modus ponens [4]; y se podía representar en un cuadrado de oposición junto al  $f$ -índice de contradicción [5]. En esta charla presentamos un nuevo resultado que caracteriza la clase de retículos residuados que pueden definirse sobre el intervalo unidad  $[0, 1]$ , a través de retículos residuados sobre subconjuntos de  $f$ -índices de inclusión junto con el operador composición de funciones.

### Referencias

- [1] N. Madrid, M. Ojeda-Aciego, and I. Perfilieva (2015).  $f$ -inclusion indexes between fuzzy sets. In Proc. of IFSA-EUSFLAT.
- [2] N. Madrid and M. Ojeda-Aciego (2017). A view of  $f$ -indexes of inclusion under different axiomatic definitions of fuzzy inclusion. Lecture Notes in Artificial Intelligence Science, 10564:307-318.
- [3] N. Madrid and M. Ojeda-Aciego (2020). Functional degrees of inclusion and similarity between  $L$ -fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems 390:1-22.
- [4] N. Madrid and M. Ojeda-Aciego (2024). The  $f$ -index of inclusion as optimal adjoint pair for fuzzy modus ponens. Fuzzy Sets and Systems (accepted).
- [5] N. Madrid and M. Ojeda-Aciego (2024). Approaching the square of opposition in terms of the  $f$ -indexes of inclusion and contradiction. Fuzzy Sets and Systems (accepted).

JUEVES, 25 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

SESIÓN ESPECIAL 17  
Desarrollo Matemático en Inteligencia Artificial y Machine Learning

FUSIÓN DE INFORMACIÓN  
MULTIVALUADA MEDIANTE  
GRADO DE TOTALNESS

MODELIZACIÓN DE LOS DATOS:  
FUERZAS GRAVITACIONALES

SOBRE EL ANÁLISIS EN CONCEPTOS  
FORMALES COMO MODELO DE  
SEMÁNTICA COGNITIVA...

COMBINACIÓN DE FUNCIONES DE  
FUSIÓN A TRAVÉS DE UNA EXTENSIÓN  
DE FUNCIONES...

ENLAZADO RETÍCULOS DE  
CONCEPTOS MULTADJUNTOS

COMPOSICIÓN DE  
CONTEXTOS L-FUZZY. UNA  
HERRAMIENTA PARA EL DISEÑO  
DE BIOMATERIALES

CARACTERIZACIÓN DE RETÍCULOS  
RESIDUADOS SOBRE  $[0, 1]$  A TRAVÉS  
DE LOS  $F$ -ÍNDICES...

ALGORITMOS CBO PARA EL CÁLCULO  
DEL RETÍCULO DE CONCEPTOS

HESITANT FUZZY SETS Y  
GRADUAL SETS: UN TEOREMA DE  
REPRESENTACIÓN GENERALIZADO

UN ANÁLISIS SOBRE LA AGREGACIÓN  
DE ESPACIOS VECTORIALES DIFUSOS

ASPECTOS CUANTIFICABLES DE LAS  
DISTRIBUCIONES DE VOTOS

DEFINIENDO LAS ÁLGEBRAS DE  
HEYTING DÉBILES

MEDIDAS DE INCONSISTENCIA  
DE ECUACIONES DE RELACIONES  
DIFUSAS

DESCUBRIMIENTO DE SUBGRUPOS  
CON IMPLICACIONES BORROSAS  
APLICADO AL ANÁLISIS...

HACIA LAS FUNCIONES PROMEDIO  
PARA DATOS INTERVALARES

SISTEMA DE INFERENCIA DIFUSO  
BASADO EN LA COMPARACIÓN DE  
REGLAS

FORKS

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES  
BIPOLARES DE RELACIONES DIFUSAS  
EN RETÍCULOS

## Algoritmos CbO para el cálculo del retículo de conceptos

MANUEL OJEDA HERNÁNDEZ, DOMINGO LÓPEZ RODRÍGUEZ, ÁNGEL MORA

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Málaga

[manuojeda@uma.es](mailto:manuojeda@uma.es)

**Resumen:** En el análisis de conceptos formales (FCA), hay dos estructuras principales de conocimiento, el retículo de conceptos y la base de implicaciones válidas. En este trabajo nos centramos en la primera de ellas. La estrategia Close-by-One (CbO) [2], basada fundamentalmente en que el conjunto de extensiones es un sistema de clausura, es una de las más conocidas para crear algoritmos de cálculo del retículo de conceptos. Recientemente, se han publicado varias mejoras de esta estrategia, entre ellas la conocida como FastCbO [3]; y la familia de algoritmos InClose [1]. Sin embargo, las aportaciones en el entorno difuso están basadas mayoritariamente en el escalado del contexto difuso en uno crisp.

En este trabajo presentamos la extensión de los algoritmos crisp a un entorno nativo difuso, combinando las ventajas de los distintos algoritmos para obtener resultados más rápidamente con menos carga de cálculo. La presentación de estos algoritmos se hace junto con la comparación con las estrategias existentes para mostrar la mejoría tanto en tiempo como en cálculo de intents y número de tests realizados.

### Referencias

- [1] Andrews, S. (2015). A ‘Best-of-Breed’ approach for designing a fast algorithm for computing fixpoints of Galois Connections. *Information Sciences*, 295, 633-649.
- [2] Kuznetsov, S. O. (1993). A fast algorithm for computing all intersections of objects from an arbitrary semilattice. *Nauchno-Tekhnicheskaya Informatsiya Seriya 2-Informatsionnye Protsessy i Sistemy* (1), 17-20.
- [3] Outrata J., Vychodil V. (2012). Fast Algorithm for Computing Fixpoints of Galois Connections Induced by Object-Attribute Relational Data. *Information Sciences* 185(1), 114-127.

**Agradecimientos:** Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el contrato predoctoral FPU19/01467 (MCIU), el proyecto VALID (PID2022-140630NB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033) y el proyecto de investigación con referencia PID2021-127870OB-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

JUEVES, 25 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

SESIÓN ESPECIAL 17  
Desarrollo Matemático en Inteligencia Artificial y Machine Learning

FUSIÓN DE INFORMACIÓN MULTIVALUADA MEDIANTE GRADO DE TOTALNESS

MODELIZACIÓN DE LOS DATOS: FUERZAS GRAVITACIONALES

SOBRE EL ANÁLISIS EN CONCEPTOS FORMALES COMO MODELO DE SEMÁNTICA COGNITIVA...

COMBINACIÓN DE FUNCIONES DE FUSIÓN A TRAVÉS DE UNA EXTENSIÓN DE FUNCIONES...

ENLAZANDO RETÍCULOS DE CONCEPTOS MULTIAJUNTOS

COMPOSICIÓN DE CONTEXTOS L-FUZZY. UNA HERRAMIENTA PARA EL DISEÑO DE BIOMATERIALES

CARACTERIZACIÓN DE RETÍCULOS RESIDUADOS SOBRE  $\{0, 1\}$  A TRAVÉS DE LOS F-ÍNDICES...

ALGORITMOS CBO PARA EL CÁLCULO DEL RETÍCULO DE CONCEPTOS

HESITANT FUZZY SETS Y GRADUAL SETS: UN TEOREMA DE REPRESENTACIÓN GENERALIZADO

UN ANÁLISIS SOBRE LA AGREGACIÓN DE ESPACIOS VECTORIALES DIFUSOS

ASPECTOS CUANTIFICABLES DE LAS DISTRIBUCIONES DE VOTOS

DEFINIENDO LAS ÁLGEBRAS DE HEYTING DÉBILES

MEDIDAS DE INCONSISTENCIA DE ECUACIONES DE RELACIONES DIFUSAS

DESCUBRIMIENTO DE SUBGRUPOS CON IMPLICACIONES BORROSAS APLICADO AL ANÁLISIS...

HACIA LAS FUNCIONES PROMEDIO PARA DATOS INTERVALARES

SISTEMA DE INFERENCIA DIFUSO BASADO EN LA COMPARACIÓN DE REGLAS

FORKS

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES BIPOLES DE RELACIONES DIFUSAS EN RETÍCULOS

## Hesitant fuzzy sets y gradual sets: un teorema de representación generalizado

EVANGELINA SANTOS, PASCUAL JARA, LUIS MERINO, GABRIEL NAVARRO

Departamento de Álgebra, Universidad de Granada

esantos@ugr.es

**Resumen:** En este trabajo se presenta una propuesta que examina con detalle, desde un punto de vista categórico, la conexión que existe entre las dos formas equivalentes de determinar un conjunto difuso sobre un conjunto  $X$ : como una aplicación de  $X$  en  $[0, 1]$  o como la familia de subconjuntos de  $X$  formada por los cortes de nivel [3]. Esta equivalencia proviene de la adjunción entre los funtores  $Map$  y producto cartesiano  $\times$ , y puede ser vista como parte de un esquema más amplio que involucra a las clases formadas por los hesitant fuzzy sets y los gradual sets. Concretamente se establece un isomorfismo entre  $Map(X, \mathcal{P}([0, 1]))$ , una generalización de los set-valued fuzzy sets (también conocidos como hesitant fuzzy sets [1],[4]), y  $Map([0, 1], \mathcal{P}(X))$  una extensión de los gradual sets en el sentido de [2].

Considerada como un Teorema de Representación esta adjunción es el marco para producir identificaciones entre las dos perspectivas cuando restringimos a otras clases de conjuntos difusos extendidos, como los interval-valued fuzzy sets, y generaliza el establecido en [3] para conjuntos difusos.

### Referencias

- [1] H. Bustince et al., A historical account of types of fuzzy sets, and their relationships, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 24(1) (2016), 179–194.
- [2] D. Dubois, H. Prade, Gradual elements in a fuzzy set, *Soft Computing* 12 (2008), 165–175.
- [3] C. V. Negoita, D. A. Ralescu, Representation theorems for fuzzy concepts, *Kybernetes* 4(3) (1976), 65–70.
- [4] V. Torra, Hesitant fuzzy sets, *International Journal Intelligence Systems* 25 (2019), 529–539.

**Agradecimientos:** IMAG, Proyecto CEX2020-001105-M financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:00 – 16:25

SESIÓN ESPECIAL 17  
Desarrollo Matemático en Inteligencia Artificial y Machine Learning

FUSIÓN DE INFORMACIÓN MULTIVALUADA MEDIANTE GRADO DE TOTALNESS

MODELIZACIÓN DE LOS DATOS: FUERZAS GRAVITACIONALES

SOBRE EL ANÁLISIS EN CONCEPTOS FORMALS COMO MODELO DE SEMÁNTICA COGNITIVA...

COMBINACIÓN DE FUNCIONES DE FUSIÓN A TRAVÉS DE UNA EXTENSIÓN DE FUNCIONES...

ENLAZADO RETÍCULOS DE CONCEPTOS MULTIAJUNTOS

COMPOSICIÓN DE CONTEXTOS L-FUZZY. UNA HERRAMIENTA PARA EL DISEÑO DE BIOMATERIALES

CARACTERIZACIÓN DE RETÍCULOS RESIDUADOS SOBRE  $\{0, 1\}$  A TRAVÉS DE LOS F-ÍNDICES...

ALGORITMOS CBO PARA EL CÁLCULO DEL RETÍCULO DE CONCEPTOS

HESITANT FUZZY SETS Y GRADUAL SETS: UN TEOREMA DE REPRESENTACIÓN GENERALIZADO

UN ANÁLISIS SOBRE LA AGREGACIÓN DE ESPACIOS VECTORIALES DIFUSOS

ASPECTOS CUANTIFICABLES DE LAS DISTRIBUCIONES DE VOTOS

DEFINIENDO LAS ÁLGEBRAS DE HEYTING DÉBILES

MEDIDAS DE INCONSISTENCIA DE ECUACIONES DE RELACIONES DIFUSAS

DESCUBRIMIENTO DE SUBGRUPOS CON IMPLICACIONES BORROSAS APLICADO AL ANÁLISIS...

HACIA LAS FUNCIONES PROMEDIO PARA DATOS INTERVALARES

SISTEMA DE INFERENCIA DIFUSO BASADO EN LA COMPARACIÓN DE REGLAS

FORKS

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES BIPOLES DE RELACIONES DIFUSAS EN RETÍCULOS

## Un análisis sobre la agregación de espacios vectoriales difusos

CARLOS BEJINES

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Málaga

cbejines@uma.es

**Resumen:** Este análisis contribuye a la investigación sobre la agregación de estructuras algebraicas, centrándose principalmente en la agregación de espacios vectoriales difusos, que fueron introducidos en [4]. Un extenso manual sobre funciones de agregación puede ser encontrado en [3]. El reciente artículo [1], que motiva este abstract, está estructurado en tres secciones distintas, y cada una de ellas aborda un aspecto específico del proceso de agregación.

La primera sección del artículo explora la autoagregación dentro de los subespacios vectoriales difusos. La segunda se centra en la agregación de subespacios vectoriales difusos similares, específicamente aquellos que pertenecen a la misma clase de equivalencia [2].

La última sección del artículo adopta un enfoque general y proporciona un análisis del problema de la agregación en el ámbito de los subespacios vectoriales difusos desde una perspectiva amplia. Examina los problemas fundamentales de la agregación de subespacios vectoriales difusos de manera precisa, proponiendo un resultado que caracteriza el hecho en sí. Además, se proporcionan corolarios significativos a partir del teorema principal.

### Referencias

- [1] C. Bejines (2023). Aggregation of fuzzy vector spaces. *Kybernetika*.
- [2] P. S. Das (1981). Fuzzy groups and level subgroups. *J. Math. Anal. And Applic.*, 84(1), 264-269.
- [3] M. Grabisch (2009). Aggregation functions, volume 127.
- [4] A. Katsaras and D. Liu (1977). Fuzzy vector spaces and fuzzy vector topological spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 58, 135-146.

**Agradecimientos:** Carlos Bejines agradece los apoyos financieros al Ministerio de Ciencia e Innovación cuyos códigos son PID2021-124063OB-I00 y PID2022-140630NB-I00.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:25 – 16:50

SESIÓN ESPECIAL 17  
Desarrollo Matemático en Inteligencia Artificial y Machine Learning

FUSIÓN DE INFORMACIÓN  
MULTIVALUADA MEDIANTE  
GRADO DE TOTALNESS

MODELIZACIÓN DE LOS DATOS:  
FUERZAS GRAVITACIONALES

SOBRE EL ANÁLISIS EN CONCEPTOS  
FORMALES COMO MODELO DE  
SEMÁNTICA COGNITIVA...

COMBINACIÓN DE FUNCIONES DE  
FUSIÓN A TRAVÉS DE UNA EXTENSIÓN  
DE FUNCIONES...

ENLAZANDO RETÍCULOS DE  
CONCEPTOS MULTIJUNTOS

COMPOSICIÓN DE  
CONTEXTOS L-FUZZY. UNA  
HERRAMIENTA PARA EL DISEÑO  
DE BIOMATERIALES

CARACTERIZACIÓN DE RETÍCULOS  
RESIDUADOS SOBRE  $\{0, 1\}$  A TRAVÉS  
DE LOS F-ÍNDICES...

ALGORITMOS CBO PARA EL CÁLCULO  
DEL RETÍCULO DE CONCEPTOS

HESITANT FUZZY SETS Y  
GRADUAL SETS: UN TEOREMA DE  
REPRESENTACIÓN GENERALIZADO

UN ANÁLISIS SOBRE LA AGREGACIÓN  
DE ESPACIOS VECTORIALES DIFUSOS

ASPECTOS CUANTIFICABLES DE LAS  
DISTRIBUCIONES DE VOTOS

DEFINIENDO LAS ÁLGEBRAS DE  
HEYTING DÉBILES

MEDIDAS DE INCONSISTENCIA  
DE ECUACIONES DE RELACIONES  
DIFUSAS

DESCUBRIMIENTO DE SUBGRUPOS  
CON IMPLICACIONES BORROSAS  
APLICADO AL ANÁLISIS...

HACIA LAS FUNCIONES PROMEDIO  
PARA DATOS INTERVALARES

SISTEMA DE INFERENCIA DIFUSO  
BASADO EN LA COMPARACIÓN DE  
REGLAS

FORKS

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES  
BIPOLES DE RELACIONES DIFUSAS  
EN RETÍCULOS



## Aspectos cuantificables de las distribuciones de votos

NOELIA RICO, IRENE DÍAZ, AGUSTINA BOUCHET

Departamento de Informática, Universidad de Oviedo

[noeliarico@uniovi.es](mailto:noeliarico@uniovi.es)

**Resumen:** En el contexto de la toma de decisiones, donde un grupo de votantes expresa sus preferencias sobre varios candidatos, existen diversos métodos de agregación de información. El propósito de todos ellos es fusionar las preferencias individuales en una elección única que busque maximizar, en algún sentido, la satisfacción individual de los votantes. Estos procesos se vinculan con la teoría de la elección social, campo en el que existen axiomas que se utilizan para entender cómo los procesos de agregación se comportan ante ciertas situaciones [1]. Sin embargo, aunque parece evidente que el modo en que se distribuyen las preferencias emitidas por los votantes influye en el proceso y el resultado de la agregación, ninguno de estos axiomas se centra en las particularidades de la votación y su distribución de preferencias.

Dado que utilizar este enfoque resultaría de gran interés para identificar cómo diferentes metodologías se comportan en relación con las características de los votos [2], en esta charla se introducen definiciones formales para medir diversos aspectos de la distribución de las preferencias emitidas por los votantes. Estas definiciones ofrecen una manera de caracterizar situaciones como la existencia de subpoblaciones con preferencias comunes entre los miembros de una subpoblación y diferentes a las de otras subpoblaciones, así como la identificación de candidatos que son ampliamente populares aunque no alcancen la máxima popularidad. Esto contribuye a comprender la incertidumbre inherente en estos procesos de toma de decisiones, permitiendo un abordaje más eficiente en la agregación de información.

### Referencias

- [1] A. Prasad, H. Pareek, P. Ravikumar (2015). Distributional rank aggregation, and an axiomatic analysis. In International Conference on Machine Learning, 2104-2112.
- [2] N. Rico, C. R. Vela, I. Díaz (2023). Reducing the time required to find the Kemeny ranking by exploiting a necessary condition for being a winner. European Journal of Operational Research, 305, 3, 1323-1336.

**Agradecimientos:** Esta investigación ha sido respaldada por el proyecto PID2022-139886NB-I00. Financiado por el Gobierno de España.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:50 – 17:15

SESIÓN ESPECIAL 17  
Desarrollo Matemático en Inteligencia Artificial y Machine Learning

FUSIÓN DE INFORMACIÓN MULTIVALUADA MEDIANTE GRADO DE TOTALNESS

MODELIZACIÓN DE LOS DATOS: FUERZAS GRAVITACIONALES

SOBRE EL ANÁLISIS EN CONCEPTOS FORMALS COMO MODELO DE SEMÁNTICA COGNITIVA...

COMBINACIÓN DE FUNCIONES DE FUSIÓN A TRAVÉS DE UNA EXTENSIÓN DE FUNCIONES...

ENLAZANDO RETÍCULOS DE CONCEPTOS MULTIAJUNTOS

COMPOSICIÓN DE CONTEXTOS L-FUZZY. UNA HERRAMIENTA PARA EL DISEÑO DE BIOMATERIALES

CARACTERIZACIÓN DE RETÍCULOS RESIDUADOS SOBRE  $\{0, 1\}$  A TRAVÉS DE LOS F-ÍNDICES...

ALGORITMOS CBO PARA EL CÁLCULO DEL RETÍCULO DE CONCEPTOS

HESITANT FUZZY SETS Y GRADUAL SETS: UN TEOREMA DE REPRESENTACIÓN GENERALIZADO

UN ANÁLISIS SOBRE LA AGREGACIÓN DE ESPACIOS VECTORIALES DIFUSOS

ASPECTOS CUANTIFICABLES DE LAS DISTRIBUCIONES DE VOTOS

DEFINIENDO LAS ÁLGEBRAS DE HEYTING DÉBILES

MEDIDAS DE INCONSISTENCIA DE ECUACIONES DE RELACIONES DIFUSAS

DESCUBRIMIENTO DE SUBGRUPOS CON IMPLICACIONES BORROSAS APLICADO AL ANÁLISIS...

HACIA LAS FUNCIONES PROMEDIO PARA DATOS INTERVALARES

SISTEMA DE INFERENCIA DIFUSO BASADO EN LA COMPARACIÓN DE REGLAS

FORKS

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES BIPOLES DE RELACIONES DIFUSAS EN RETÍCULOS



## Definiendo las álgebras de Heyting débiles

FRANCISCO PÉREZ GÁMEZ, CARLOS BEJINES

Departamento Matemática aplicada, Universidad de Málaga

[franciscoperezgamez@uma.es](mailto:franciscoperezgamez@uma.es)

**Resumen:** Las álgebras de Heyting es una estructura matemática que tiene aplicación en distintas áreas como son la lógica, la topología o las ciencias de la computación. Cuando se definieron, se presentaron como una generalización de las álgebras de Boole (ver [2]). Estas álgebras tienen unas propiedades que las hacen bastante útiles para modelar sistemas con información parcial o desconocida considerando un marco difuso. Por ejemplo, [1].

Las álgebras de Heyting son estructuras que cumplen un conjunto de axiomas que generalizan a las álgebras de Boole. Un álgebra de Heyting es un retículo completo junto a una operación residuo ( $\rightarrow$ ) que cumple la siguiente propiedad de adjunción, para todo  $a, b, c \in L$ :  $a \wedge b \leq c$  si y solo si  $b \leq a \rightarrow c$ .

Es bien conocido que una condición necesaria para poder definir un álgebra de Heyting es que el retículo sobre el que se trabaja tiene que ser distributivo. En este trabajo vamos a introducir una nueva estructura que se llamará álgebra de Heyting débil, la cual, deben cumplir una debilitación de las condiciones de las álgebras de Heyting. Esta debilitación nos permitirá definir esta estructura sobre retículos no distributivos. También estudiaremos las condiciones necesarias y suficientes para poder definir esta nueva álgebra y daremos una caracterización de estas.

### Referencias

- [1] Stanimirović, Stefan and Micić, Ivana and Ćirić, Miroslav (2020). Approximate bisimulations for fuzzy automata over complete heyting algebras. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 30,2 437-447.
- [2] Heyting, Arend (1930). Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. *Sitzungsbericht PreuBische Akademie der Wissenschaften Berlin, physikalisch-mathematische Klasse II.* 42– 56

**Agradecimientos:** Queremos agradecer la ayuda económica recibida de los proyectos del Ministerio de Ciencia e Innovación PID2022-140630NB-I00 y PID2021-127870OB-I00.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
17:15 – 17:40

SESIÓN ESPECIAL 17  
Desarrollo Matemático en Inteligencia Artificial y Machine Learning

FUSIÓN DE INFORMACIÓN  
MULTIVALUADA MEDIANTE  
GRADO DE TOTALNESS

MODELIZACIÓN DE LOS DATOS:  
FUERZAS GRAVITACIONALES

SOBRE EL ANÁLISIS EN CONCEPTOS  
FORMALES COMO MODELO DE  
SEMÁNTICA COGNITIVA...

COMBINACIÓN DE FUNCIONES DE  
FUSIÓN A TRAVÉS DE UNA EXTENSIÓN  
DE FUNCIONES...

ENLAZADO RETÍCULOS DE  
CONCEPTOS MULTIJUNTOS

COMPOSICIÓN DE  
CONTEXTOS L-FUZZY. UNA  
HERRAMIENTA PARA EL DISEÑO  
DE BIOMATERIALES

CARACTERIZACIÓN DE RETÍCULOS  
RESIDUADOS SOBRE  $\{0, 1\}$  A TRAVÉS  
DE LOS F-ÍNDICES...

ALGORITMOS CBO PARA EL CÁLCULO  
DEL RETÍCULO DE CONCEPTOS

HESITANT FUZZY SETS Y  
GRADUAL SETS: UN TEOREMA DE  
REPRESENTACIÓN GENERALIZADO

UN ANÁLISIS SOBRE LA AGREGACIÓN  
DE ESPACIOS VECTORIALES DIFUSOS

ASPECTOS CUANTIFICABLES DE LAS  
DISTRIBUCIONES DE VOTOS

DEFINIENDO LAS ÁLGEBRAS DE  
HEYTING DÉBILES

MEDIDAS DE INCONSISTENCIA  
DE ECUACIONES DE RELACIONES  
DIFUSAS

DESCUBRIMIENTO DE SUBGRUPOS  
CON IMPLICACIONES BORROSAS  
APLICADO AL ANÁLISIS...

HACIA LAS FUNCIONES PROMEDIO  
PARA DATOS INTERVALARES

SISTEMA DE INFERENCIA DIFUSO  
BASADO EN LA COMPARACIÓN DE  
REGLAS

FORKS

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES  
BIPOLARES DE RELACIONES DIFUSAS  
EN RETÍCULOS

## Medidas de inconsistencia de ecuaciones de relaciones difusas

DAVID LOBO, VÍCTOR LÓPEZ-MARCHANTE, JESÚS MEDINA

Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz

[david.lobo@uca.es](mailto:david.lobo@uca.es)

**Resumen:** Las ecuaciones de relaciones difusas (FRE), introducidas por E. Sánchez, son una teoría ampliamente estudiada en la literatura, con aplicación en campos como la toma de decisiones, la optimización y el procesamiento de imágenes. Con frecuencia, las bases de datos disponibles contienen información incierta o imperfecta, lo que deriva en la presencia de inconsistencias. Como resultado, una FRE asociada a dichos datos puede ser irresoluble.

Existen algunos trabajos que estudian cómo modificar el término independiente de una FRE irresoluble de forma que el resultado sea una FRE resoluble. Por un lado, el estudio presentado en [1] permite recuperar la resolubilidad de una FRE aumentando todas las componentes del término independiente o bien disminuyéndolas todas. Por su parte, el método definido en [2] se basa en las técnicas de reducción de atributos del análisis formal de conceptos (FCA), dando lugar a un proceso que fija algunas componentes del término independiente y modifica las restantes.

El objetivo de este trabajo es diseñar medidas que permitan comparar el término independiente de una FRE irresoluble con el término independiente obtenido mediante alguno de los métodos mencionados.

### Referencias

- [1] M. E. Cornejo, J. C. Díaz-Moreno, J. Medina (2017). Multi-adjoint relation equations: A decision support system for fuzzy logic. *International Journal of Intelligent Systems*, 32(8), 778–800.
- [2] D. Lobo, V. López-Marchante, J. Medina (2023). Reducing fuzzy relation equations via concept lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 463, 108465.

**Agradecimientos:** Parcialmente financiada por el Ministerio de Ciencia e Innovación con los proyectos PID2019-108991GB-I00 y PID2022-137620NB-I00, con el Proyecto de Transición Ecológica y Digital TED2021-129748B-I00, y por el Departamento de Economía, Conocimiento, Empresa y Universidad de la Junta de Andalucía con el proyecto FEDER-UCA18-108612, y por la Acción CA17124 de Cooperación Europea en Ciencia y Tecnología (COST).

JUEVES, 25 DE ENERO:  
17:40 – 18:00

SESIÓN ESPECIAL 17  
Desarrollo Matemático en Inteligencia Artificial y Machine Learning

FUSIÓN DE INFORMACIÓN  
MULTIVALUADA MEDIANTE  
GRADO DE TOTALNESS

MODELIZACIÓN DE LOS DATOS:  
FUERZAS GRAVITACIONALES

SOBRE EL ANÁLISIS EN CONCEPTOS  
FORMALES COMO MODELO DE  
SEMÁNTICA COGNITIVA...

COMBINACIÓN DE FUNCIONES DE  
FUSIÓN A TRAVÉS DE UNA EXTENSIÓN  
DE FUNCIONES...

ENLAZADO RETÍCULOS DE  
CONCEPTOS MULTIJUNTOS

COMPOSICIÓN DE  
CONTEXTOS L-FUZZY. UNA  
HERRAMIENTA PARA EL DISEÑO  
DE BIOMATERIALES

CARACTERIZACIÓN DE RETÍCULOS  
RESIDUADOS SOBRE  $\{0, 1\}$  A TRAVÉS  
DE LOS F-ÍNDICES...

ALGORITMOS CBO PARA EL CÁLCULO  
DEL RETÍCULO DE CONCEPTOS

HESITANT FUZZY SETS Y  
GRADUAL SETS: UN TEOREMA DE  
REPRESENTACIÓN GENERALIZADO

UN ANÁLISIS SOBRE LA AGREGACIÓN  
DE ESPACIOS VECTORIALES DIFUSOS

ASPECTOS CUANTIFICABLES DE LAS  
DISTRIBUCIONES DE VOTOS

DEFINIENDO LAS ÁLGEBRAS DE  
HEYTING DÉBILES

MEDIDAS DE INCONSISTENCIA  
DE ECUACIONES DE RELACIONES  
DIFUSAS

DESCUBRIMIENTO DE SUBGRUPOS  
CON IMPLICACIONES BORROSAS  
APLICADO AL ANÁLISIS...

HACIA LAS FUNCIONES PROMEDIO  
PARA DATOS INTERVALARES

SISTEMA DE INFERENCIA DIFUSO  
BASADO EN LA COMPARACIÓN DE  
REGLAS

FORKS

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES  
BIPOLARES DE RELACIONES DIFUSAS  
EN RETÍCULOS

## Descubrimiento de subgrupos con implicaciones borrosas aplicado al análisis de resultados electorales

RAQUEL FERNANDEZ-PERALTA, SEBASTIA MASSANET  
Dpto. Ciencias Matemáticas e Informática, Universitat de les Illes Balears  
r.fernandez@uib.es

**Resumen:** El descubrimiento de subgrupos es una técnica popular de minería de datos diseñada para identificar subgrupos de datos que son interesantes respecto de una variable objetivo fijada [1]. La importancia de un subgrupo se cuantifica numéricamente a través de una medida de calidad, que se selecciona de acuerdo con el objetivo concreto o los deseos del experto. Cada subgrupo se representa normalmente en forma de una regla *Condición*  $\rightarrow$  *Objetivo*, donde “*Objetivo*” representa la variable de interés y “*Condición*” es una conjunción de diferentes características. Recientemente, se ha introducido una nueva perspectiva para este tipo de técnicas basada en el uso de implicaciones borrosas [2]. A diferencia de las perspectivas existentes, la introducción del uso de estos operadores permite interpretar los subgrupos como implicaciones lógicas y que los algoritmos correspondientes puedan aplicarse a variables objetivo numéricas modeladas como variables lingüísticas borrosas. En esta contribución, se profundiza en el diseño e implementación de técnicas de descubrimiento de subgrupos basadas en implicaciones borrosas y en sus aplicaciones. En particular, como caso práctico se analizan los resultados de las últimas elecciones generales en España.

### Referencias

- [1] Atzmueller, M. (2015). Subgroup discovery. *Data Min. Knowl. Discov.*, 5, 35-49.
- [2] R. Fernandez-Peralta, S. Massanet, M. Gupta, K. Nanavati and B. Jayaram (2023). Subgroup Discovery through Sharp Transitions using Implicative Type Rules. 2023 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE).

**Agradecimientos:** Esta publicación es parte del Proyecto I+D+i PID2020-113870GBI00 – “Desarrollo de herramientas de Soft Computing para la Ayuda al Diagnóstico Clínico y a la Gestión de Emergencias (HESOCODICE)”, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
11:30 – 11:55

SESIÓN ESPECIAL 17  
Desarrollo Matemático en Inteligencia Artificial y Machine Learning

FUSIÓN DE INFORMACIÓN MULTIVALUADA MEDIANTE GRADO DE TOTALNESS

MODELIZACIÓN DE LOS DATOS: FUERZAS GRAVITACIONALES

SOBRE EL ANÁLISIS EN CONCEPTOS FORMALS COMO MODELO DE SEMÁNTICA COGNITIVA...

COMBINACIÓN DE FUNCIONES DE FUSIÓN A TRAVÉS DE UNA EXTENSIÓN DE FUNCIONES...

ENLAZADO RETÍCULOS DE CONCEPTOS MULTIJUNTOS

COMPOSICIÓN DE CONTEXTOS L-FUZZY. UNA HERRAMIENTA PARA EL DISEÑO DE BIOMATERIALES

CARACTERIZACIÓN DE RETÍCULOS RESIDUADOS SOBRE  $\{0, 1\}$  A TRAVÉS DE LOS F-ÍNDICES...

ALGORITMOS CBO PARA EL CÁLCULO DEL RETÍCULO DE CONCEPTOS

HESITANT FUZZY SETS Y GRADUAL SETS: UN TEOREMA DE REPRESENTACIÓN GENERALIZADO

UN ANÁLISIS SOBRE LA AGREGACIÓN DE ESPACIOS VECTORIALES DIFUSOS

ASPECTOS CUANTIFICABLES DE LAS DISTRIBUCIONES DE VOTOS

DEFINIENDO LAS ÁLGEBRAS DE HEYTING DÉBILES

MEDIDAS DE INCONSISTENCIA DE ECUACIONES DE RELACIONES DIFUSAS

DESCUBRIMIENTO DE SUBGRUPOS CON IMPLICACIONES BORROSAS APLICADO AL ANÁLISIS...

HACIA LAS FUNCIONES PROMEDIO PARA DATOS INTERVALARES

SISTEMA DE INFERENCIA DIFUSO BASADO EN LA COMPARACIÓN DE REGLAS

FORKS

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES BIPOLES DE RELACIONES DIFUSAS EN RETÍCULOS

## Hacia las funciones promedio para datos intervalares

SUSANA MONTES, SERGIO FERNÁNDEZ, PELAYO S. DOSANTOS, SUSANA DÍAZ

Departamento de Estadística e I.O. y D.M., Universidad de Oviedo

[montes@uniovi.es](mailto:montes@uniovi.es)

**Resumen:** Las funciones de agregación [2] han demostrado ser de utilidad en numerosos campos durante los últimos años. Es especialmente relevante las distintas aplicaciones que tienen un tipo especialmente importante de funciones de agregación, las funciones promedio [1]. Tanto unas como otras, son habitualmente establecidas como aplicaciones sobre el intervalo cerrado  $[0, 1]$  y como tal han sido aplicadas con éxito en la lógica difusa. No obstante, las funciones promedio son además herramientas fundamentales en el área de la estadística descriptiva, donde los datos a agregar son números reales cualesquiera. Parece, por tanto, lógico plantearse el análisis de este tipo de medidas para valores reales cualesquiera. Por otro lado, en los últimos años han surgido numerosos campos donde los datos a tratar no son números sino intervalos y, aunque se podrían representar mediante algún tipo de marca de clase, lo lógico sería mantener toda la información contenida en dicho intervalo, sin necesidad de reducir el mismo a un número. Surge así la idea de definir las funciones promedio para datos intervalares. En concreto se va a trabajar con intervalos reales cerrados cualesquiera. Al no existir en el conjunto de tales intervalos un orden total clásico, en este trabajo se va a analizar la influencia de los distintos órdenes considerados, pasando por el orden reticular y los órdenes admisibles [3], en este tipo de medidas. Por coherencia con el tipo de datos a tratar, los órdenes serán extendidos a intervalos cerrados de extremos reales cualesquiera.

### Referencias

- [1] G. Beliakov, H. Bustince, T. Calvo (2016). A Practical Guide to Averaging Functions. Springer.
- [2] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo (2007). Aggregation Functions: A Guide for Practitioners. Springer.
- [3] F. Santana, B. Bedregal, P. Viana, H. Bustince (2020). On admissible orders over closed subintervals of  $[0, 1]$ . Fuzzy Sets and Systems, 399, 44-54.

**Agradecimientos:** Esta investigación ha sido financiada parcialmente por el proyecto PID2022-139886NB-I00 financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
11:55 – 12:20

SESIÓN ESPECIAL 17  
Desarrollo Matemático en Inteligencia Artificial y Machine Learning

FUSIÓN DE INFORMACIÓN MULTIVALUADA MEDIANTE GRADO DE TOTALNESS

MODELIZACIÓN DE LOS DATOS: FUERZAS GRAVITACIONALES

SOBRE EL ANÁLISIS EN CONCEPTOS FORMALS COMO MODELO DE SEMÁNTICA COGNITIVA...

COMBINACIÓN DE FUNCIONES DE FUSIÓN A TRAVÉS DE UNA EXTENSIÓN DE FUNCIONES...

ENLAZANDO RETÍCULOS DE CONCEPTOS MULTIJUNTOS

COMPOSICIÓN DE CONTEXTOS L-FUZZY. UNA HERRAMIENTA PARA EL DISEÑO DE BIOMATERIALES

CARACTERIZACIÓN DE RETÍCULOS RESIDUADOS SOBRE  $[0, 1]$  A TRAVÉS DE LOS F-ÍNDICES...

ALGORITMOS CBO PARA EL CÁLCULO DEL RETÍCULO DE CONCEPTOS

HESITANT FUZZY SETS Y GRADUAL SETS: UN TEOREMA DE REPRESENTACIÓN GENERALIZADO

UN ANÁLISIS SOBRE LA AGREGACIÓN DE ESPACIOS VECTORIALES DIFUSOS

ASPECTOS CUANTIFICABLES DE LAS DISTRIBUCIONES DE VOTOS

DEFINIENDO LAS ÁLGEBRAS DE HEYTING DÉBILES

MEDIDAS DE INCONSISTENCIA DE ECUACIONES DE RELACIONES DIFUSAS

DESCUBRIMIENTO DE SUBGRUPOS CON IMPLICACIONES BORROSAS APLICADO AL ANÁLISIS...

HACIA LAS FUNCIONES PROMEDIO PARA DATOS INTERVALARES

SISTEMA DE INFERENCIA DIFUSO BASADO EN LA COMPARACIÓN DE REGLAS

FORKS

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES BIPOLARES DE RELACIONES DIFUSAS EN RETÍCULOS

## Sistema de inferencia difuso basado en la comparación de reglas

ASIER URÍO-LARREA, JAVIER FERNÁNDEZ, GRAÇALIZ DIMURO,  
HUMBERTO BUSTINCE

Departamento Estadística Matemáticas e Informática, Universidad Pública de Navarra  
[asier.urio@unavarra.es](mailto:asier.urio@unavarra.es)

**Resumen:** Zadeh introdujo en 1965 el modus ponens generalizado [1], un sistema que ha sido ampliamente usado para crear sistemas de inferencia que trabajan con información imprecisa. Estos sistemas emplean reglas si-entonces las cuales tienen conjuntos difusos tanto en los antecedentes como en los consecuentes. Inicialmente Zadeh propuso el mecanismo de inferencia denominado regla de inferencia composicional [2] y posteriormente el mecanismo de interpolación [3]. Otros autores también han desarrollado una variedad de mecanismos con el objetivo de implementar el modus ponens generalizado. La aportación principal de este trabajo es establecer una medida de comparación de reglas difusas. Esta medida emplea diferentes índices entre conjuntos difusos. Estos índices se aplican a cada par de conjuntos en los antecedentes y consecuentes de cada regla y finalmente se agregan todos los valores individuales obtenidos. El segundo objetivo es la presentación de un método basado en la comparación de reglas difusas que permita resolver el modus ponens generalizado.

### Referencias

- [1] L.A. Zadeh (1965). Fuzzy sets. Inform. Control 8, 338-353.
- [2] L. A. Zadeh (1973). Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics SMC-3 (1), 28-44.
- [3] L. Zadeh (1983). The role of fuzzy logic in the management of uncertainty in expert systems. Fuzzy Sets and Systems 11 (1), 199-227.

**Agradecimientos:** Este trabajo está financiado por los proyectos de investigación PID2022-136627NB-I00 de la Agencia Estatal de Investigación y los proyectos CNPq (301618/2019-4,305805/2021-5) y FAPERGS (19/2551-0001660-3). Asier Urió-Larrea es beneficiario de una ayuda predoctoral Santander-UPNA 2021/22.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
12:20 – 12:45

SESIÓN ESPECIAL 17  
Desarrollo Matemático en Inteligencia Artificial y Machine Learning

FUSIÓN DE INFORMACIÓN  
MULTIVALUADA MEDIANTE  
GRADO DE TOTALNESS

MODELIZACIÓN DE LOS DATOS:  
FUERZAS GRAVITACIONALES

SOBRE EL ANÁLISIS EN CONCEPTOS  
FORMALES COMO MODELO DE  
SEMÁNTICA COGNITIVA...

COMBINACIÓN DE FUNCIONES DE  
FUSIÓN A TRAVÉS DE UNA EXTENSIÓN  
DE FUNCIONES...

ENLAZADO RETÍCULOS DE  
CONCEPTOS MULTIJUNTOS

COMPOSICIÓN DE  
CONTEXTOS L-FUZZY. UNA  
HERRAMIENTA PARA EL DISEÑO  
DE BIOMATERIALES

CARACTERIZACIÓN DE RETÍCULOS  
RESIDUADOS SOBRE  $\{0, 1\}$  A TRAVÉS  
DE LOS F-ÍNDICES...

ALGORITMOS CBO PARA EL CÁLCULO  
DEL RETÍCULO DE CONCEPTOS

HESITANT FUZZY SETS Y  
GRADUAL SETS: UN TEOREMA DE  
REPRESENTACIÓN GENERALIZADO

UN ANÁLISIS SOBRE LA AGREGACIÓN  
DE ESPACIOS VECTORIALES DIFUSOS

ASPECTOS CUANTIFICABLES DE LAS  
DISTRIBUCIONES DE VOTOS

DEFINIENDO LAS ÁLGEBRAS DE  
HEITTING DÉBILES

MEDIDAS DE INCONSISTENCIA  
DE ECUACIONES DE RELACIONES  
DIFUSAS

DESCUBRIMIENTO DE SUBGRUPOS  
CON IMPLICACIONES BORROSAS  
APLICADO AL ANÁLISIS...

HACIA LAS FUNCIONES PROMEDIO  
PARA DATOS INTERVALARES

SISTEMA DE INFERENCIA DIFUSO  
BASADO EN LA COMPARACIÓN DE  
REGLAS

FORKS

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES  
BIPOLARES DE RELACIONES DIFUSAS  
EN RETÍCULOS

## Forks

GILBERTO PÉREZ, FELICIDAD AGUADO, PEDRO CABALAR, JORGE FANDIÑO,  
DAVID PEARCE, CONCEPCIÓN VIDAL

Departamento de Ciencias de la Computación y Tecnologías de la Información, Universidad de A Coruña  
gilberto.pvega@udc.es

**Resumen:** Abordamos el problema de comprobar la equivalencia fuerte (strong equivalence) de programas lógicos que contienen átomos auxiliares locales, y son eliminados de sus modelos estables y prohibidos en cualquier contexto externo. Esta propiedad, que se denomina equivalencia proyectiva fuerte (Projective Strong Equivalence, PSE) de programas lógicos, garantiza que dos programas lógicos tienen el mismo comportamiento (bajo la semántica de modelos estables) independientemente de un contexto común e ignorando el efecto de los átomos auxiliares. Se sabe que no se puede reformular cualquier programa lógico con átomos auxiliares como otro programa lógico sin ellos bajo PSE, esto se conoce como *strongly persistent forgetting*.

Presentamos una extensión de Equilibrium Logic y su base monótona, la lógica del Here-and-There, en la que se trata con una nueva conectiva  $|$  a la que llamamos *fork*. Dados dos programas  $P$  y  $P'$  (entendiendo un programa como la conjunción de sus reglas) el significado intuitivo de esta conectiva es que los modelos estables de  $P | P'$  corresponden a la unión de modelos estables de  $P$  y  $P'$  en cualquier contexto  $Q$ , esto es  $SM[(P | P') \wedge Q] = SM[P \wedge Q] \cup SM[P' \wedge Q]$ . Proporcionamos una caracterización semántica de PSE para *forks* que se utiliza para demostrar que, en esta extensión, siempre es posible olvidar átomos auxiliares bajo persistencia fuerte. También demostramos que los *forks* pueden traducirse de nuevo a programas lógicos introduciendo nuevos átomos auxiliares, esta traducción es exponencial en el caso peor. Esto nos permite demostrar que el razonamiento con *forks* tiene la misma complejidad que la de los programas lógicos ordinarios allanando el camino para una implementación eficiente de los *forks*.

### Referencias

- [1] F. Aguado, P. Cabalar, J. Fandiño, D. Pearce, G. Pérez, C. Vidal. A polynomial reduction of forks into logic programs. *Artificial Intelligence*. 308 (2022) 1037121.
- [2] F. Aguado, P. Cabalar, J. Fandiño, D. Pearce, G. Pérez, C. Vidal. Syntactic ASP forgetting with forks. *Artificial Intelligence*. 326 (2024) 104033.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
12:45 – 13:10

SESIÓN ESPECIAL 17  
Desarrollo Matemático en Inteligencia Artificial y Machine Learning

FUSIÓN DE INFORMACIÓN  
MULTIVALUADA MEDIANTE  
GRADO DE TOTALNESS

MODELIZACIÓN DE LOS DATOS:  
FUERZAS GRAVITACIONALES

SOBRE EL ANÁLISIS EN CONCEPTOS  
FORMALES COMO MODELO DE  
SEMÁNTICA COGNITIVA...

COMBINACIÓN DE FUNCIONES DE  
FUSIÓN A TRAVÉS DE UNA EXTENSIÓN  
DE FUNCIONES...

ENLAZANDO RETÍCULOS DE  
CONCEPTOS MULTIJUNTOS

COMPOSICIÓN DE  
CONTEXTOS L-FUZZY. UNA  
HERRAMIENTA PARA EL DISEÑO  
DE BIOMATERIALES

CARACTERIZACIÓN DE RETÍCULOS  
RESIDUADOS SOBRE  $\{0, 1\}$  A TRAVÉS  
DE LOS F-ÍNDICES...

ALGORITMOS CBO PARA EL CÁLCULO  
DEL RETÍCULO DE CONCEPTOS

HESITANT FUZZY SETS Y  
GRADUAL SETS: UN TEOREMA DE  
REPRESENTACIÓN GENERALIZADO

UN ANÁLISIS SOBRE LA AGREGACIÓN  
DE ESPACIOS VECTORIALES DIFUSOS

ASPECTOS CUANTIFICABLES DE LAS  
DISTRIBUCIONES DE VOTOS

DEFINIENDO LAS ÁLGEBRAS DE  
HEYTING DÉBILES

MEDIDAS DE INCONSISTENCIA  
DE ECUACIONES DE RELACIONES  
DIFUSAS

DESCUBRIMIENTO DE SUBGRUPOS  
CON IMPLICACIONES BORROSAS  
APLICADO AL ANÁLISIS...

HACIA LAS FUNCIONES PROMEDIO  
PARA DATOS INTERVALARES

SISTEMA DE INFERENCIA DIFUSO  
BASADO EN LA COMPARACIÓN DE  
REGLAS

FORKS

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES  
BIPOLES DE RELACIONES DIFUSAS  
EN RETÍCULOS

## Resolución de ecuaciones bipolares de relaciones difusas en retículos

M. EUGENIA CORNEJO, ELENA JARAMILLO-ROSADO, DAVID LOBO

Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz

[mariaeugenia.cornejo@uca.es](mailto:mariaeugenia.cornejo@uca.es)

**Resumen:** Las ecuaciones bipolares de relaciones difusas ya se han empleado con éxito en problemas de optimización, en cambio, la literatura específica sobre la resolución de estas ecuaciones no es abundante. De hecho, la mayoría de las publicaciones sobre ecuaciones bipolares de relaciones difusas están restringidas al intervalo unidad, considerando las composiciones máximo-norma triangular (Gödel, producto y Lukasiewicz) y la negación estándar. Recientemente se han obtenido avances en el desarrollo de esta teoría, los resultados presentados en [1] han ampliado el marco algebraico de las ecuaciones bipolares al contexto teórico de los retículos no lineales, considerando al mismo tiempo la clase más general posible de normas triangulares, una negación involutiva arbitraria y un elemento supremo irreducible del retículo como término independiente. En este trabajo, siguiendo el enfoque planteado en [2], se propone una estrategia alternativa a la proporcionada en [1], para hallar el conjunto de soluciones de dichas ecuaciones mediante el estudio de inecuaciones bipolares de relaciones difusas. Esta nueva estrategia nos permitirá abordar el estudio de la resolución de ecuaciones bipolares con término independiente supremo reducible.

### Referencias

- [1] M. Eugenia Cornejo, David Lobo, Jesús Medina, Bernard De Baets (2022). Bipolar equations on complete distributive symmetric residuated lattices: The case of a join-irreducible right-hand side. *Fuzzy Sets and Systems*, 442, 92-108.
- [2] Bernard De Baets (1995). An Order-Theoretic Approach to Solving Sup-T Equations. In: Ruan, D. (eds) *Fuzzy Set Theory and Advanced Mathematical Applications*. International Series in Intelligent Technologies, 4, 67-87. Springer, Boston, MA.

**Agradecimientos:** Esta investigación ha sido parcialmente financiada por el Ministerio de Ciencia e Innovación con los proyectos PID2019-108991GB-I00 y PID2022-137620NB-I00, con el Proyecto de Transición Ecológica y Digital TED2021-129748B-I00, por el Departamento de Economía, Conocimiento, Empresa y Universidad de la Junta de Andalucía con el proyecto FEDER-UCA18-108612, y por la Acción CA17124 de Cooperación Europea en Ciencia y Tecnología (COST).

VIERNES, 26 DE ENERO:  
13:10 – 13:30

SESIÓN ESPECIAL 17  
Desarrollo Matemático en Inteligencia Artificial y Machine Learning

FUSIÓN DE INFORMACIÓN MULTIVALUADA MEDIANTE GRADO DE TOTALNESS

MODELIZACIÓN DE LOS DATOS: FUERZAS GRAVITACIONALES

SOBRE EL ANÁLISIS EN CONCEPTOS FORMALES COMO MODELO DE SEMÁNTICA COGNITIVA...

COMBINACIÓN DE FUNCIONES DE FUSIÓN A TRAVÉS DE UNA EXTENSIÓN DE FUNCIONES...

ENLAZADO RETÍCULOS DE CONCEPTOS MULTIJUNTOS

COMPOSICIÓN DE CONTEXTOS L-FUZZY. UNA HERRAMIENTA PARA EL DISEÑO DE BIOMATERIALES

CARACTERIZACIÓN DE RETÍCULOS RESIDUADOS SOBRE  $\{0, 1\}$  A TRAVÉS DE LOS F-ÍNDICES...

ALGORITMOS CBO PARA EL CÁLCULO DEL RETÍCULO DE CONCEPTOS

HESITANT FUZZY SETS Y GRADUAL SETS: UN TEOREMA DE REPRESENTACIÓN GENERALIZADO

UN ANÁLISIS SOBRE LA AGREGACIÓN DE ESPACIOS VECTORIALES DIFUSOS

ASPECTOS CUANTIFICABLES DE LAS DISTRIBUCIONES DE VOTOS

DEFINIENDO LAS ÁLGEBRAS DE HEYTING DÉBILES

MEDIDAS DE INCONSISTENCIA DE ECUACIONES DE RELACIONES DIFUSAS

DESCUBRIMIENTO DE SUBGRUPOS CON IMPLICACIONES BORROSAS APLICADO AL ANÁLISIS...

HACIA LAS FUNCIONES PROMEDIO PARA DATOS INTERVALARES

SISTEMA DE INFERENCIA DIFUSO BASADO EN LA COMPARACIÓN DE REGLAS

FORKS

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES BIPOLARES DE RELACIONES DIFUSAS EN RETÍCULOS



## SESIÓN ESPECIAL 18

### Sesión especial de la red MATSI: Teoría de Códigos

#### Organizadores:

**SARA DÍAZ CARDELL**  
(Universidade Estadual Paulista)

**HELENA MARTÍN CRUZ**  
(Universitat Jaume I)

**VERÓNICA REQUENA**  
(Universidad de Alicante)

**CARLOS VELA CABELLO**  
(Universidade de Aveiro)

#### Descripción:

La teoría de códigos se ha convertido en los últimos 60 años, motivada por el auge de las comunicaciones, en un área activa de investigación que trata las leyes de la codificación de la información y el problema de detectar y corregir los posibles errores producidos en su transmisión. Para ello se codifica, es decir, se transforma en una señal convenida para su transmisión, agregándole cierta información extra que nos ayudará a detectarlos y corregirlos. Decodificar es el proceso inverso, mediante el cual la señal transmitida se transforma en la información original. La teoría de códigos hace uso de técnicas algebraicas clásicas y modernas que involucran cuerpos finitos, teoría de grupos y álgebra polinomial. En la actualidad, los avances que se están produciendo están encaminados hacia la utilización de las bases de Gröbner como herramienta para la codificación y decodificación en los códigos correctores de errores. El objetivo de esta sesión es reunir a especialistas en esta área para poner en común los progresos e investigaciones relacionados con los problemas abiertos de códigos.

SESIÓN ESPECIAL 18  
Sesión especial de la red MATSI:  
Teoría de Códigos

LINEAR AND SEMILINEAR  
EQUIVALENCY OF FLAG CODES

RELATIVE HULLS AND QUANTUM  
CODES

CONSTRUCCIÓN DE CÓDIGOS  
COMPLETE MDP

WEIGHTED REED-SOLOMON  
CONVOLUTIONAL CODES

NON COMMUTATIVE GOPPA CODES  
AND THEIR USE IN CODE-BASED  
CRYPTOGRAPHY

A RECURSIVE CONSTRUCTION FOR  
PROJECTIVE REED-MULLER CODES

EL ALGORITMO DE BERLEKAMP-  
MASSEY-SAKATA

CONSTRUCTION OF FAMILIES OF  $Z_p$   
 $Z_{p^2}$ ...  $Z_{p^k}$ -LINEAR HADAMARD CODES,  
CLASSIFICATION...

MODULI PROBLEMS, ENUMERATIVE  
GEOMETRY AND CODING THEORY

CÓDIGOS CONVOLUCIONALES  
OBSERVABLES CON PROPIEDADES  
ÓPTIMAS DE DECODIFICACIÓN...

QUANTUM CODES FROM  
GENERALIZED MONOMIAL-  
CARTESIAN CODES

DECODING 2D CONVOLUTIONAL  
CODES OVER ERASURE CHANNELS



## Linear and semilinear equivalency of flag codes

XARO SOLER-ESCRIVÀ, MIGUEL ÀNGEL NAVARRO-PÉREZ

Departament de Matemàtiques, Universitat d'Alacant

[xaro.soler@ua.es](mailto:xaro.soler@ua.es)

**Abstract:** In the context of Network Coding, *flag codes* can be seen as an extension of *constant dimension codes*. In this case, the codewords are sequences of nested subspaces (flags) of a finite dimensional vector space over a finite field. Flag codes were introduced by Liebhold *et al.* in [3] and, since then, several works have deepened the study of these codes and provided different constructions of them (see [1, 2, 4] for instance).

The *projected codes* of a flag code are the constant dimension codes containing all the subspaces of prescribed dimensions that form the flags in the flag code.

In this talk we address the notion of (semi)linear equivalence for flag codes and explore in which situations such an equivalence can be reduced to the (semi)linear equivalence of the corresponding projected codes. In addition, this study leads to new results concerning the automorphism group of certain families of flag codes.

### References

- [1] C. Alonso-González, M. A. Navarro-Pérez, X. Soler-Escrivà (2021). An Orbital Construction of Optimum Distance Flag Codes. *Finite Fields and Their Applications*, Vol. 73, 101861.
- [2] S. Kurz (2021). Bounds for Flag Codes. *Designs, Codes and Cryptography*, Vol. 89, 2759-2785.
- [3] D. Liebhold, G. Nebe, A. Vazquez-Castro (2018). Network Coding with Flags. *Designs, Codes and Cryptography*, Vol. 86 (2), 269-284.
- [4] M. A. Navarro-Pérez, X. Soler-Escrivà (2022). Flag codes of maximum distance and constructions using Singer groups. *Finite Fields and Their Applications*, Vol. 80, 102011.

**Acknowledgments:** The authors received financial support of Ministerio de Ciencia e Innovación (PID2022-142159OB-I00) and Conselleria de Innovación, Universidades, Ciencia y Sociedad Digital (CIAICO/2022/167).

JUEVES, 25 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 18  
Sesión especial de la red MATSI:  
Teoría de Códigos

LINEAR AND SEMILINEAR  
EQUIVALENCY OF FLAG CODES

RELATIVE HULLS AND QUANTUM  
CODES

CONSTRUCCIÓN DE CÓDIGOS  
COMPLETE MDP

WEIGHTED REED-SOLOMON  
CONVOLUTIONAL CODES

NON COMMUTATIVE GOPPA CODES  
AND THEIR USE IN CODE-BASED  
CRYPTOGRAPHY

A RECURSIVE CONSTRUCTION FOR  
PROJECTIVE REED-MULLER CODES

EL ALGORITMO DE BERLEKAMP-  
MASSEY-SAKATA

CONSTRUCTION OF FAMILIES OF  $Z_p$   
 $Z_{p^2}$ ...  $Z_{p^k}$ -LINEAR HADAMARD CODES,  
CLASSIFICATION...

MODULI PROBLEMS, ENUMERATIVE  
GEOMETRY AND CODING THEORY

CÓDIGOS CONVOLUCIONALES  
OBSERVABLES CON PROPIEDADES  
ÓPTIMAS DE DECODIFICACIÓN...

QUANTUM CODES FROM  
GENERALIZED MONOMIAL-  
CARTESIAN CODES

DECODING 2D CONVOLUTIONAL  
CODES OVER ERASURE CHANNELS

## Relative hulls and quantum codes

DIEGO RUANO, SARAH E. ANDERSON, EDUARDO CAMPS-MORENO,  
HIRAM H. LÓPEZ, GRETCHEN L. MATTHEWS, IVAN SOPRUNOV  
IMUVa-Instituto de Investigación en Matemáticas, Universidad de Valladolid  
[diego.ruano@uva.es](mailto:diego.ruano@uva.es)

**Abstract:** Given two  $q$ -ary codes  $C_1$  and  $C_2$ , the relative hull of  $C_1$  with respect to  $C_2$  is the intersection  $C_1 \cap C_2^\perp$ . We prove that when  $q > 2$ , the relative hull dimension can be repeatedly reduced by one, down to a certain bound, by replacing either of the two codes with an equivalent one. The reduction of the relative hull dimension applies to hulls taken with respect to the  $e$ -Galois inner product, which has as special cases both the Euclidean and Hermitian inner products. We give conditions under which the relative hull dimension can be increased by one via equivalent codes when  $q > 2$ . We study some consequences of the relative hull properties on entanglement-assisted quantum error-correcting codes (EAQECCs) [2, 3]. The relative hull dimension is linked to  $c$ , the required number of pairs of maximally entangled quantum states for an EAQECC. Our results demonstrate how monomially equivalent codes may be used to tailor the parameter  $c$ . Thus, we can reduce the required number of pairs of maximally entangled quantum states while maintaining the net rate and prove the existence of new entanglement-assisted quantum error-correcting maximum distance separable codes, meaning those whose parameters satisfy the quantum Singleton bound [1].

### References

- [1] S.E. Anderson, E. Camps-Moreno, H.H. López, G.L. Matthews, D. Ruano, I. Soprunov (2022) Relative hulls and quantum codes. arXiv:2212.14521
- [2] T. Brun, I. Devetak, M.-H. Hsieh (2006) Correcting Quantum Errors with Entanglement. Science 314, 5798, 436-439
- [3] C. Galindo, F. Hernando, R. Matsumoto, D Ruano (2019). Entanglement-assisted quantum error-correcting codes over arbitrary finite fields. Quantum Information Processing 4, 116.

**Acknowledgments:** The first author was partially supported by Grant TED2021-130358B-I00 funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and by the “European Union NextGenerationEU/PRTR”, and by QCAYLE project funded by MCIN, the European Union NextGenerationEU (PRTR C17.I1) and Junta de Castilla y León.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

SESIÓN ESPECIAL 18  
Sesión especial de la red MATSI:  
Teoría de Códigos

LINEAR AND SEMILINEAR  
EQUIVALENCY OF FLAG CODES

RELATIVE HULLS AND QUANTUM  
CODES

CONSTRUCCIÓN DE CÓDIGOS  
COMPLETE MDP

WEIGHTED REED-SOLOMON  
CONVOLUTIONAL CODES

NON COMMUTATIVE GOPPA CODES  
AND THEIR USE IN CODE-BASED  
CRYPTOGRAPHY

A RECURSIVE CONSTRUCTION FOR  
PROJECTIVE REED-MULLER CODES

EL ALGORITMO DE BERLEKAMP-  
MASSEY-SAKATA

CONSTRUCTION OF FAMILIES OF  $Z_p$   
 $Z_{p^2}$ ...  $Z_{p^k}$ -LINEAR HADAMARD CODES,  
CLASSIFICATION...

MODULI PROBLEMS, ENUMERATIVE  
GEOMETRY AND CODING THEORY

CÓDIGOS CONVOLUCIONALES  
OBSERVABLES CON PROPIEDADES  
ÓPTIMAS DE DECODIFICACIÓN...

QUANTUM CODES FROM  
GENERALIZED MONOMIAL-  
CARTESIAN CODES

DECODING 2D CONVOLUTIONAL  
CODES OVER ERASURE CHANNELS

## Construcción de códigos complete MDP

JOSÉ IGNACIO IGLESIAS CURTO

Departamento de Matemáticas e IUFFyM, Universidad de Salamanca

[joseig@usal.es](mailto:joseig@usal.es)

**Resumen:** Los códigos MDP se definen por la propiedad de que su secuencia (perfil) de distancias columna es óptima, lo que les permite corregir el máximo número de errores en una ventana temporal de longitud determinada. Esto es particularmente aplicable sobre el canal de borrado. Un código MDP permite una recuperación óptima de coordenadas borradas, condicionada a la existencia de un espacio de resguardo previo a la ventana a decodificar.

Los códigos complete MDP son una subclase de códigos MDP que verifican además algunas propiedades más restrictivas. A cambio, permiten recuperar borrados en ciertas condiciones cuando no existe el espacio de resguardo previo a la ventana. Son, por tanto, los códigos con mejores capacidades para la recuperación de borrados. Las propiedades adicionales que los definen hacen que sea extremadamente complicado obtener códigos de este tipo. Aunque se sabe que puede construirse un código de parámetros dados sobre un cuerpo suficientemente grande, tampoco se conoce en general con exactitud el mínimo tamaño del cuerpo sobre el que puede obtenerse. Tanto el estudio del tamaño del cuerpo como la construcción explícita de códigos complete MDP son materias de indudable interés.

El objetivo de este trabajo es utilizar propiedades conocidas de este tipo de códigos para materializar construcciones y analizar el tamaño del cuerpo sobre el que se pueden realizar.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

SESIÓN ESPECIAL 18  
Sesión especial de la red MATSI:  
Teoría de Códigos

LINEAR AND SEMILINEAR  
EQUIVALENCY OF FLAG CODES

RELATIVE HULLS AND QUANTUM  
CODES

CONSTRUCCIÓN DE CÓDIGOS  
COMPLETE MDP

WEIGHTED REED-SOLOMON  
CONVOLUTIONAL CODES

NON COMMUTATIVE GOPPA CODES  
AND THEIR USE IN CODE-BASED  
CRYPTOGRAPHY

A RECURSIVE CONSTRUCTION FOR  
PROJECTIVE REED-MULLER CODES

EL ALGORITMO DE BERLEKAMP-  
MASSEY-SAKATA

CONSTRUCTION OF FAMILIES OF  $Z_p$   
 $Z_{p^2}$ ...  $Z_{p^m}$ -LINEAR HADAMARD CODES,  
CLASSIFICATION...

MODULI PROBLEMS, ENUMERATIVE  
GEOMETRY AND CODING THEORY

CÓDIGOS CONVOLUCIONALES  
OBSERVABLES CON PROPIEDADES  
ÓPTIMAS DE DECODIFICACIÓN...

QUANTUM CODES FROM  
GENERALIZED MONOMIAL-  
CARTESIAN CODES

DECODING 2D CONVOLUTIONAL  
CODES OVER ERASURE CHANNELS

## Weighted Reed-Solomon Convolutional Codes

GIANIRA N. ALFARANO, **DIEGO NAPP**, ALESSANDRO NERI, VERÓNICA REQUENA

Departamento de Matemáticas, Universidad de Alicante

[diego.napp@ua.es](mailto:diego.napp@ua.es)

**Resumen:** En esta charla presentamos una construcción algebraica concreta de una nueva clase de códigos convolucionales. Estos códigos se basan en matrices de Vandermonde generalizadas y, por lo tanto, pueden verse como una extensión natural de los códigos bloque Reed-Solomon en el contexto de los códigos convolucionales. Por esta razón los llamamos Weighted Reed-Solomon convolutional codes (WRS). Mostramos que, bajo algunas restricciones en los parámetros que definen estos códigos, son códigos MDP, lo que significa que tienen el máximo crecimiento posible respecto a la distancia columna. Estudiamos el tamaño del cuerpo necesario para obtener códigos convolucionales WRS que son MDP y lo comparamos con las construcciones generales existentes de códigos convolucionales MDP en la literatura, mostrando que en muchos casos los códigos convolucionales aquí presentados requieren cuerpos significativamente más pequeños.

**Agradecimientos:** Los autores Diego Napp y Verónica Requena recibieron soporte financiero del Ministerio de Ciencia e Innovación (PID2022-142159OB-I00) y de la Conselleria de Innovación, Universidades, Ciencia y Sociedad Digital (CIAICO/2022/167).

JUEVES, 25 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

SESIÓN ESPECIAL 18  
Sesión especial de la red MATSI:  
Teoría de Códigos

LINEAR AND SEMILINEAR  
EQUIVALENCY OF FLAG CODES

RELATIVE HULLS AND QUANTUM  
CODES

CONSTRUCCIÓN DE CÓDIGOS  
COMPLETE MDP

WEIGHTED REED-SOLOMON  
CONVOLUTIONAL CODES

NON COMMUTATIVE GOPPA CODES  
AND THEIR USE IN CODE-BASED  
CRYPTOGRAPHY

A RECURSIVE CONSTRUCTION FOR  
PROJECTIVE REED-MULLER CODES

EL ALGORITMO DE BERLEKAMP-  
MASSEY-SAKATA

CONSTRUCTION OF FAMILIES OF  $Z_p$   
 $Z_{p^2}$ ...  $Z_{p^m}$ -LINEAR HADAMARD CODES,  
CLASSIFICATION...

MODULI PROBLEMS, ENUMERATIVE  
GEOMETRY AND CODING THEORY

CÓDIGOS CONVOLUCIONALES  
OBSERVABLES CON PROPIEDADES  
ÓPTIMAS DE DECODIFICACIÓN...

QUANTUM CODES FROM  
GENERALIZED MONOMIAL-  
CARTESIAN CODES

DECODING 2D CONVOLUTIONAL  
CODES OVER ERASURE CHANNELS

## Non commutative Goppa codes and their use in code-based cryptography

J. GÓMEZ-TORRECILLAS, F. J. LOBILLO, G. NAVARRO

Universidad de Granada

[jlobillo@ugr.es](mailto:jlobillo@ugr.es)

**Abstract:** A class of linear codes that extends classical Goppa codes to a non-commutative context is defined. An efficient decoding algorithm, based on the solution of a non-commutative key equation, is designed. We show how the parameters of these codes, when the alphabet is a finite field, may be adjusted to propose a McEliece-type cryptosystem.

### References

- [1] José Gómez-Torrecillas, F. J. Lobillo, Gabriel Navarro. Procedimiento y dispositivo de cifrado/descifrado post-cuántico usando códigos lineales. OEPM, February 2022. patente solicitud número P202230118.
- [2] José Gómez-Torrecillas, F. J. Lobillo, Gabriel Navarro. Skew differential Goppa codes and their application to McEliece cryptosystem. Des. Codes Cryptogr. (2023). URL: <https://doi.org/10.1007/s10623-023-01286-6>

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

SESIÓN ESPECIAL 18  
Sesión especial de la red MATSI:  
Teoría de Códigos

LINEAR AND SEMILINEAR  
EQUIVALENCY OF FLAG CODES

RELATIVE HULLS AND QUANTUM  
CODES

CONSTRUCCIÓN DE CÓDIGOS  
COMPLETE MDP

WEIGHTED REED-SOLOMON  
CONVOLUTIONAL CODES

NON COMMUTATIVE GOPPA CODES  
AND THEIR USE IN CODE-BASED  
CRYPTOGRAPHY

A RECURSIVE CONSTRUCTION FOR  
PROJECTIVE REED-MULLER CODES

EL ALGORITMO DE BERLEKAMP-  
MASSEY-SAKATA

CONSTRUCTION OF FAMILIES OF  $Z_p$   
 $Z_{p^2}$ ...  $Z_{p^k}$ -LINEAR HADAMARD CODES,  
CLASSIFICATION...

MODULI PROBLEMS, ENUMERATIVE  
GEOMETRY AND CODING THEORY

CÓDIGOS CONVOLUCIONALES  
OBSERVABLES CON PROPIEDADES  
ÓPTIMAS DE DECODIFICACIÓN...

QUANTUM CODES FROM  
GENERALIZED MONOMIAL-  
CARTESIAN CODES

DECODING 2D CONVOLUTIONAL  
CODES OVER ERASURE CHANNELS

## A recursive construction for projective Reed-Muller codes

RODRIGO SAN JOSÉ

Universidad de Valladolid

[rodrigo.san-jose@uva.es](mailto:rodrigo.san-jose@uva.es)

**Abstract:** Binary affine Reed-Muller codes can be constructed recursively via the  $(u \mid u+v)$  construction. Generally,  $q$ -ary affine Reed-Muller codes can be constructed recursively using a matrix-product code construction. We are interested in a recursive construction for projective Reed-Muller codes, a generalization of affine Reed-Muller codes obtained by evaluating homogeneous polynomials in the projective space  $\mathbb{P}^m$ . We apply this recursive construction to obtain information about the subfield subcodes and generalized Hamming weights of projective Reed-Muller codes. Given a code  $C \subset \mathbb{F}_{q^s}^n$ , its subfield subcode with respect to the extension  $\mathbb{F}_{q^s} \supset \mathbb{F}_q$  is the linear code  $C \cap \mathbb{F}_q^n$ . With this technique, it is possible to construct long linear codes with good parameters over a small finite field. The main task is the computation of a basis for the subfield subcode, which, in particular, gives its dimension. We show that, for certain degrees, the recursive construction we obtain for projective Reed-Muller codes can be applied to their subfield subcodes as well. This directly gives the dimension of these subfield subcodes in a recursive manner, for any  $m \geq 2$ , and allows us to obtain a set of polynomials such that its evaluation is a basis for the subfield subcode. We can obtain a description of the subfield subcode as an evaluation code. For some particular degrees, we obtain codes with good parameters: codes with the best known parameters and many codes surpassing the Gilbert-Varshamov bound. The generalized Hamming weights of a code are a set of parameters that generalize the minimum distance. Although the complete weight hierarchy of affine Reed-Muller codes was determined, the computation of the generalized Hamming weights of projective Reed-Muller codes remains an open problem and only partial results are known. We obtain a recursive lower bound for the generalized Hamming weights of a projective Reed-Muller code of any degree. Moreover, we provide an upper bound that gives us a criterion to ensure that the bound is sharp in many cases. By considering the monotonicity and duality properties of the generalized Hamming weights and our bounds, we obtain the exact values of the generalized Hamming weights of projective Reed-Muller codes in many cases.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 18  
Sesión especial de la red MATSI:  
Teoría de Códigos

LINEAR AND SEMILINEAR  
EQUIVALENCY OF FLAG CODES

RELATIVE HULLS AND QUANTUM  
CODES

CONSTRUCCIÓN DE CÓDIGOS  
COMPLETE MDP

WEIGHTED REED-SOLOMON  
CONVOLUTIONAL CODES

NON COMMUTATIVE GOPPA CODES  
AND THEIR USE IN CODE-BASED  
CRYPTOGRAPHY

A RECURSIVE CONSTRUCTION FOR  
PROJECTIVE REED-MULLER CODES

EL ALGORITMO DE BERLEKAMP-  
MASSEY-SAKATA

CONSTRUCTION OF FAMILIES OF  $\mathbb{Z}_p$   
 $\mathbb{Z}_p$ -LINEAR HADAMARD CODES,  
CLASSIFICATION...

MODULI PROBLEMS, ENUMERATIVE  
GEOMETRY AND CODING THEORY

CÓDIGOS CONVOLUCIONALES  
OBSERVABLES CON PROPIEDADES  
ÓPTIMAS DE DECODIFICACIÓN...

QUANTUM CODES FROM  
GENERALIZED MONOMIAL-  
CARTESIAN CODES

DECODING 2D CONVOLUTIONAL  
CODES OVER ERASURE CHANNELS

## El Algoritmo de Berlekamp-Massey-Sakata

J. J. SIMÓN, J. J. BERNAL

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

[jsimon@um.es](mailto:jsimon@um.es)

**Resumen:** El algoritmo de Berlekamp-Massey-Sakata (aBMS) es una generalización a dos variables del algoritmo de Berlekamp-Massey que consiste en, dada una sucesión periódica en un cuerpo finito, encontrar la fórmula de recurrencia que la genere. En el caso de dos variables, consiste en encontrar una base de Groebner para determinar el sistema de recurrencias lineales.

Existen muchos métodos de descodificación basados en este algoritmo; entre otros, la descodificación por localización que se aplica en códigos abelianos y algebraico-geométricos.

En esta charla, vamos a mostrar un panorama sobre su funcionamiento y comentaremos algunas de nuestras aportaciones en un trabajo conjunto con José Joaquín Bernal. Entre otras, cabe mencionar la siguiente: para una tabla de orden  $r_1 \times r_2$  (o bien, doblemente periódica), obtenida por una fórmula polinomial (por síndromes) que tiene  $t \leq \min\{\lfloor \frac{r_1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{r_2}{2} \rfloor\}$  términos, existe un conjunto mínimo de índices sobre el que basta ejecutar el algoritmo para obtener la base de Groebner, garantizando que el proceso terminará en, a lo más,  $\frac{t^2+7t}{2} - 1$  pasos.

**Agradecimientos:** This work was partially supported by MINECO, project PID2020-113206GB I00/AEI/10.13039/501100011033, and Fundación Séneca of Murcia, project 22004/PI/22.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 18  
Sesión especial de la red MATSI:  
Teoría de Códigos

LINEAR AND SEMILINEAR  
EQUIVALENCY OF FLAG CODES

RELATIVE HULLS AND QUANTUM  
CODES

CONSTRUCCIÓN DE CÓDIGOS  
COMPLETE MDP

WEIGHTED REED-SOLOMON  
CONVOLUTIONAL CODES

NON COMMUTATIVE GOPPA CODES  
AND THEIR USE IN CODE-BASED  
CRYPTOGRAPHY

A RECURSIVE CONSTRUCTION FOR  
PROJECTIVE REED-MULLER CODES

EL ALGORITMO DE BERLEKAMP-  
MASSEY-SAKATA

CONSTRUCTION OF FAMILIES OF  $Z_p$   
 $Z_{p^2}$ , ...,  $Z_{p^m}$ -LINEAR HADAMARD CODES,  
CLASSIFICATION...

MODULI PROBLEMS, ENUMERATIVE  
GEOMETRY AND CODING THEORY

CÓDIGOS CONVOLUCIONALES  
OBSERVABLES CON PROPIEDADES  
ÓPTIMAS DE DECODIFICACIÓN...

QUANTUM CODES FROM  
GENERALIZED MONOMIAL-  
CARTESIAN CODES

DECODING 2D CONVOLUTIONAL  
CODES OVER ERASURE CHANNELS

# Construction of Families of $\mathbb{Z}_p\mathbb{Z}_{p^2} \dots \mathbb{Z}_{p^s}$ -Linear Hadamard Codes, Classification and Permutation Decoding

MERCÈ VILLANUEVA, DIPAK K. BHUNIA, CRISTINA FERNÁNDEZ-CÓRDOBA,  
JOSEP RIFÀ, ADRIÁN TORRES-MARTÍN  
Departamento de Ingeniería de la Información y de las Comunicaciones  
Universitat Autònoma de Barcelona  
[merce.villanueva@uab.cat](mailto:merce.villanueva@uab.cat)

**Abstract:** The  $\mathbb{Z}_p\mathbb{Z}_{p^2} \dots \mathbb{Z}_{p^s}$ -additive codes are subgroups of  $\mathbb{Z}_p^{\alpha_1} \times \mathbb{Z}_{p^2}^{\alpha_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p^s}^{\alpha_s}$ . A  $\mathbb{Z}_p\mathbb{Z}_{p^2} \dots \mathbb{Z}_{p^s}$ -linear Hadamard code is a generalized Hadamard code over  $\mathbb{Z}_p$  which is the Gray map image of a  $\mathbb{Z}_p\mathbb{Z}_{p^2} \dots \mathbb{Z}_{p^s}$ -additive code. Recursive constructions for some families of these codes of type  $(\alpha_1, \dots, \alpha_s; t_1, \dots, t_s)$  are described. First, it is shown for which types the corresponding generalized Hadamard codes of length  $2^t$  are nonlinear. For these codes, the rank and dimension of the kernel, which allow us to give a partial classification of these codes, are computed. In some cases, a complete classification can be provided, by giving the exact amount of nonequivalent such codes for a given length. The equivalence relations between several infinite families of these codes are studied. For example,  $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4\mathbb{Z}_8$ -linear Hadamard codes of length  $2^{11}$  with nonzero  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  are not equivalent to each other, nor are they equivalent to any  $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_4$ -linear or  $\mathbb{Z}_2$ -linear Hadamard codes with  $s \geq 2$ , with the same length  $2^{11}$ .

Since  $\mathbb{Z}_{p^s}$ -linear codes are systematic, the permutation decoding method can be applied to these codes. This technique also requires the existence of  $r$ -PD-sets, which are subsets of the permutation automorphism group of the code. The permutation automorphism group for  $\mathbb{Z}_{p^s}$ -linear generalized Hadamard codes is determined and, in order to be able to perform a partial permutation decoding for these codes, we show how to construct  $r$ -PD-sets of minimum size  $r + 1$ , for all  $r$  up to an upper bound.

## References

- [1] D. K. Bhunia, C. Fernández-Córdoba, M. Villanueva (2023). Linearity and classification of  $\mathbb{Z}_p\mathbb{Z}_{p^2}$ -linear generalized Hadamard codes, *Finite Fields Their Appl.*, 102140.
- [2] A. Torres-Martín, M. Villanueva (2023). Partial permutation decoding and PD-sets for  $\mathbb{Z}_{p^s}$ -linear generalized Hadamard codes, *Finite Fields Their Appl.*, 102316.

**Acknowledgments:** This work has been partially supported by the Spanish Ministerio de Ciencia e Innovación under Grants PID2019-104664GB-I00, PID2022-137924NB-I00, and RED2022-134306-T (AEI/10.13039/501100011033) and by the Catalan AGAUR grant 2021SGR 00643.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

SESIÓN ESPECIAL 18  
Sesión especial de la red MATSI:  
Teoría de Códigos

LINEAR AND SEMILINEAR  
EQUIVALENCY OF FLAG CODES

RELATIVE HULLS AND QUANTUM  
CODES

CONSTRUCCIÓN DE CÓDIGOS  
COMPLETE MDP

WEIGHTED REED-SOLOMON  
CONVOLUTIONAL CODES

NON COMMUTATIVE GOPPA CODES  
AND THEIR USE IN CODE-BASED  
CRYPTOGRAPHY

A RECURSIVE CONSTRUCTION FOR  
PROJECTIVE REED-MULLER CODES

EL ALGORITMO DE BERLEKAMP-  
MASSEY-SAKATA

CONSTRUCTION OF FAMILIES OF  $\mathbb{Z}_p$   
 $\mathbb{Z}_{p^2} \dots \mathbb{Z}_{p^s}$ -LINEAR HADAMARD CODES,  
CLASSIFICATION...

MODULI PROBLEMS, ENUMERATIVE  
GEOMETRY AND CODING THEORY

CÓDIGOS CONVOLUCIONALES  
OBSERVABLES CON PROPIEDADES  
ÓPTIMAS DE DECODIFICACIÓN...

QUANTUM CODES FROM  
GENERALIZED MONOMIAL-  
CARTESIAN CODES

DECODING 2D CONVOLUTIONAL  
CODES OVER ERASURE CHANNELS



## Moduli problems, enumerative geometry and coding theory

ÁNGEL LUIS MUÑOZ CASTAÑEDA

Departamento de Matemáticas, Universidad de León

[amunc@unileon.es](mailto:amunc@unileon.es)

**Abstract:** Let  $k, n, g$  be natural numbers such that  $n/2 > k > 2g - 2$ . In this talk I will show a close relationship between three problems different in nature. On one hand, the existence of a very strong algebraic-geometric structure for a given convolutional code of rate  $k/n$ . On the other hand, the existence of a (twisted) smooth projective curve  $X$  in the  $(k - 1)$ -dimensional projective space passing through  $n$  different rational points. And finally, the existence of an  $n$ -pointed smooth projective curve whose associated moduli space of line bundles with level structures  $M(X, D)$  contains a given rational point of the Grassmannian  $Gr(k, n)$  through its canonical immersion  $M(X, D) \hookrightarrow Gr(k, n)$ .

**Acknowledgments:** This work was partially supported by MINECO, project TED2021-121158A-I00.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 18  
Sesión especial de la red MATSI:  
Teoría de Códigos

LINEAR AND SEMILINEAR  
EQUIVALENCY OF FLAG CODES

RELATIVE HULLS AND QUANTUM  
CODES

CONSTRUCCIÓN DE CÓDIGOS  
COMPLETE MDP

WEIGHTED REED-SOLOMON  
CONVOLUTIONAL CODES

NON COMMUTATIVE GOPPA CODES  
AND THEIR USE IN CODE-BASED  
CRYPTOGRAPHY

A RECURSIVE CONSTRUCTION FOR  
PROJECTIVE REED-MULLER CODES

EL ALGORITMO DE BERLEKAMP-  
MASSEY-SAKATA

CONSTRUCTION OF FAMILIES OF  $Z_p$   
 $Z_{p^2}$ ...  $Z_{p^r}$ -LINEAR HADAMARD CODES,  
CLASSIFICATION...

MODULI PROBLEMS, ENUMERATIVE  
GEOMETRY AND CODING THEORY

CÓDIGOS CONVOLUCIONALES  
OBSERVABLES CON PROPIEDADES  
ÓPTIMAS DE DECODIFICACIÓN...

QUANTUM CODES FROM  
GENERALIZED MONOMIAL-  
CARTESIAN CODES

DECODING 2D CONVOLUTIONAL  
CODES OVER ERASURE CHANNELS

## Códigos convolucionales observables con propiedades óptimas de decodificación y distancia mediante representaciones I/S/O

N. DECASTRO-GARCÍA, Á. L. MUÑOZ CASTAÑEDA, M. V. CARRIEGOS

Departamento de Matemáticas, Universidad de León

[ncasg@unileon.es](mailto:ncasg@unileon.es)

**Resumen:** Los códigos convolucionales son códigos de detección y corrección de errores utilizados para transmitir, detectar y corregir la información enviada a través de un canal. En esta charla, nos centraremos en los códigos convoluciones desde su descripción como submódulos libres  $\mathcal{C} \subset R[z]^n$  de rango  $k$ , siendo  $R$  un cuerpo finito o determinados anillos conmutativos. Un problema fundamental en la teoría de códigos convolucionales es encontrar métodos para construir códigos convolucionales con buenas propiedades, como la no propagación de errores (observabilidad) o un buen desempeño cuando se aplica un algoritmo de decodificación. Por otro lado, otra propiedad deseable de un código convolucional es que tenga una buena distancia. En este caso, el código tendrá una tasa de recuperación óptima.

Esta charla tiene como objetivo presentar diferentes formas de construir códigos convolucionales observables con buenas propiedades de decodificación mediante los sistemas lineales dinámicos que tienen asociados; es decir, mediante lo que se conoce como una representación de *entrada/estado/salida* (I/S/O) del código. Esta aproximación es útil porque nos permite utilizar las propiedades algebraicas estructurales de sistemas lineales para trabajar en teoría de codificación, considerando propiedades específicas en las matrices que componen las representaciones I/S/O.

**Agradecimientos:** Este trabajo se enmarca dentro del proyecto *Algebraic Methods for the Recovery, Correction and Security of Digital Information (MARCSID)*, concedido en la convocatoria de *Proyectos Estratégicos Orientados a la Transición Ecológica y a la Transición Digital 2021* TED2021-131158A-I00 por el Ministerio de Ciencia e Innovación.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

SESIÓN ESPECIAL 18  
Sesión especial de la red MATSI:  
Teoría de Códigos

LINEAR AND SEMILINEAR  
EQUIVALENCY OF FLAG CODES

RELATIVE HULLS AND QUANTUM  
CODES

CONSTRUCCIÓN DE CÓDIGOS  
COMPLETE MDP

WEIGHTED REED-SOLOMON  
CONVOLUTIONAL CODES

NON COMMUTATIVE GOPPA CODES  
AND THEIR USE IN CODE-BASED  
CRYPTOGRAPHY

A RECURSIVE CONSTRUCTION FOR  
PROJECTIVE REED-MULLER CODES

EL ALGORITMO DE BERLEKAMP-  
MASSEY-SAKATA

CONSTRUCTION OF FAMILIES OF  $\mathbb{Z}_p$   
 $\mathbb{Z}_p$ -LINEAR HADAMARD CODES,  
CLASSIFICATION...

MODULI PROBLEMS, ENUMERATIVE  
GEOMETRY AND CODING THEORY

CÓDIGOS CONVOLUCIONALES  
OBSERVABLES CON PROPIEADES  
ÓPTIMAS DE DECODIFICACIÓN...

QUANTUM CODES FROM  
GENERALIZED MONOMIAL-  
CARTESIAN CODES

DECODING 2D CONVOLUTIONAL  
CODES OVER ERASURE CHANNELS

## Quantum Codes from Generalized Monomial-Cartesian Codes

FERNANDO HERNANDO, BEATRIZ BARBERO-LUCAS,  
HELENA MARTÍN-CRUZ, GARY MCGUIRE

Departamento de Matemáticas e Instituto de Matemáticas y Aplicaciones de Castellón (IMAC),  
Universitat Jaume I  
[carrillf@uji.es](mailto:carrillf@uji.es)

**Abstract:** We construct new stabilizer quantum error-correcting codes from generalized monomial-Cartesian codes. Our construction uses an explicitly defined twist vector, and we present formulas for the minimum distance and dimension. Generalized monomial-Cartesian codes arise from polynomials in  $m$  variables. When  $m = 1$  our codes are MDS, and when  $m = 2$  and our lower bound for the minimum distance is 3 the codes are at least Hermitian Almost MDS. For an infinite family of parameters when  $m = 2$  we prove that our codes beat the Gilbert-Varshamov bound. We also present many examples of our codes that are better than any known code in the literature.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

SESIÓN ESPECIAL 18  
Sesión especial de la red MATSI:  
Teoría de Códigos

LINEAR AND SEMILINEAR  
EQUIVALENCY OF FLAG CODES

RELATIVE HULLS AND QUANTUM  
CODES

CONSTRUCCIÓN DE CÓDIGOS  
COMPLETE MDP

WEIGHTED REED-SOLOMON  
CONVOLUTIONAL CODES

NON COMMUTATIVE GOPPA CODES  
AND THEIR USE IN CODE-BASED  
CRYPTOGRAPHY

A RECURSIVE CONSTRUCTION FOR  
PROJECTIVE REED-MULLER CODES

EL ALGORITMO DE BERLEKAMP-  
MASSEY-SAKATA

CONSTRUCTION OF FAMILIES OF  $Z_p$   
 $Z_p$ -...  $Z_p$ -LINEAR HADAMARD CODES,  
CLASSIFICATION...

MODULI PROBLEMS, ENUMERATIVE  
GEOMETRY AND CODING THEORY

CÓDIGOS CONVOLUCIONALES  
OBSERVABLES CON PROPIEDADES  
ÓPTIMAS DE DECODIFICACIÓN...

QUANTUM CODES FROM  
GENERALIZED MONOMIAL-  
CARTESIAN CODES

DECODING 2D CONVOLUTIONAL  
CODES OVER ERASURE CHANNELS

## Decoding 2D convolutional codes over erasure channels

CARLOS VELA CABELLO, RAQUEL PINTO, MARCOS SPREAFICO

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

carlos.vela@ua.pt

**Abstract:** In this talk we address the problem of constructing optimal 2D convolutional codes for decoding algorithm over an erasure channel. It is well-known that when transmitting over an erasure channel the symbols sent either arrive correctly or they are erased. Convolutional codes are proven to be more efficient than classical block codes when communication over these [2]. Even though there exist decoding methods [1], there is a lack of constructions of optimal codes for them. We propose the construction of two families of 2D convolutional codes (one optimal) based on an optimal 1D convolutional code [3, 4].

### References

- [1] J. Lieb, R. Pinto (2023). A decoding algorithm for 2D convolutional codes over the erasure channel. *Advances in Mathematics of Communications*, 17(4): 935-959. doi: 10.3934/amc.2021031.
- [2] V. Tomas, J. Rosenthal, R. Smarandache (2012). Decoding of Convolutional Codes Over the Erasure Channel. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 58, no. 1, pp. 90-108, doi: 10.1109/TIT.2011.2171530.
- [3] J. Lieb (2019). Complete MDP convolutional codes. *Journal of Algebra and Its Applications*, Vol. 18, No. 06, 1950105 doi: 10.1142/S0219498819501056
- [4] J.-J. Climent, D. Napp, R. Pinto, R. Simões (2016). Decoding of 2D convolutional codes over an erasure channel. *Advances in Mathematics of Communications*, 10(1): 179-193. doi: 10.3934/amc.2016.10.179

**Acknowledgments:** This work was supported by The Center for Research and Development in Mathematics and Applications (CIDMA) through the Portuguese Foundation for Science and Technology (FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia), references UIDB/04106/2020.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
13:30 – 14:00

SESIÓN ESPECIAL 18  
Sesión especial de la red MATSI:  
Teoría de Códigos

LINEAR AND SEMILINEAR  
EQUIVALENCY OF FLAG CODES

RELATIVE HULLS AND QUANTUM  
CODES

CONSTRUCCIÓN DE CÓDIGOS  
COMPLETE MDP

WEIGHTED REED-SOLOMON  
CONVOLUTIONAL CODES

NON COMMUTATIVE GOPPA CODES  
AND THEIR USE IN CODE-BASED  
CRYPTOGRAPHY

A RECURSIVE CONSTRUCTION FOR  
PROJECTIVE REED-MULLER CODES

EL ALGORITMO DE BERLEKAMP-  
MASSEY-SAKATA

CONSTRUCTION OF FAMILIES OF  $Z_p$   
 $Z_{p^2}$ ...  $Z_{p^m}$ -LINEAR HADAMARD CODES,  
CLASSIFICATION...

MODULI PROBLEMS, ENUMERATIVE  
GEOMETRY AND CODING THEORY

CÓDIGOS CONVOLUCIONALES  
OBSERVABLES CON PROPIEDADES  
ÓPTIMAS DE DECODIFICACIÓN...

QUANTUM CODES FROM  
GENERALIZED MONOMIAL-  
CARTESIAN CODES

DECODING 2D CONVOLUTIONAL  
CODES OVER ERASURE CHANNELS

## SESIÓN ESPECIAL 19

### Resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales y aplicaciones

#### Organizadores:

BLANCA BUJANDA CIRAUQUI  
 (Universidad Pública de Navarra)

MARÍA JESÚS MORETA SANTOS  
 (Universidad Complutense de Madrid)

#### Descripción:

Las Ecuaciones en Derivadas Parciales son claves en el desarrollo de la Ciencia y Tecnología debido a la gran cantidad de fenómenos físicos que modelan; su complicada resolución analítica (imposible en muchos casos) hace necesario el desarrollo de métodos numéricos que permitan resolverlas de manera eficiente. Con esta idea en mente, durante las últimas décadas se han realizado muchos estudios matemáticos que han permitido mejorar notablemente la resolución numérica de dichas ecuaciones. El análisis numérico es una ciencia que presenta una gran evolución adaptada a la evolución de la informática y de los problemas matemáticos que reflejan situaciones cada vez más complicadas y más ajustadas a la realidad física que dichas EDP's representan.

El propósito de este minisimposio es mostrar los últimos avances en la integración numérica de diversos problemas mediante el uso de diferentes métodos ajustados cada vez más a problemas concretos, permitiendo su resolución con técnicas cada vez más eficientes. En este sentido se presentan nuevos estudios realizados que son eficientes en la integración de problemas no lineales, en problemas en los que los dominios son complicados y parece necesario aplicar técnicas de descomposición de dominios, en problemas en 3D en los que la geometría utilizada tiene gran importancia, en tipos concretos de ecuaciones como las correspondientes a aguas someras, ecuaciones de tipo Schrödinger o leyes de conservación, en problemas en los que condiciones de frontera no nulas hacen que se produzca una reducción en el orden del método aplicado...

**SESIÓN ESPECIAL 19**  
 Resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales y aplicaciones

**2D NEWTON SCHWARZ DOMAIN DECOMPOSITION METHOD APPLIED TO THE RAYLEIGH-BÉNARD...**

**A SCHWARZ ALTERNATING METHOD FOR AN EVOLUTION CONVECTION PROBLEM**

**UN MÉTODO MULTISPLITTING PARA LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS EVOLUTIVOS 2D SINGULARMENTE...**

**UN MÉTODO NUMÉRICO EFICIENTE PARA SISTEMAS PARABÓLICOS UNIDIMENSIONALES...**

**RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES POR ELEMENTOS FINITOS...**

**AVANCES RECIENTES EN EL DISEÑO DE MÉTODOS BIEN EQUILIBRADOS PARA SISTEMAS...**

**ESQUEMAS SEMI-IMPLÍCITOS BIEN EQUILIBRADOS PARA TODAS LAS SOLUCIONES ESTACIONARIAS...**

**ESQUEMAS LAGRANGIANO-PROYECTADOS DE TIPO IMPLÍCITO-EXPLÍCITO PARA LAS ECUACIONES...**

**ESTABILIDAD DE ALGUNAS RECONSTRUCCIONES DE ALTO ORDEN PARA LA APROXIMACIÓN DE LEYES...**

**MODIFIED EXPONENTIAL ROSENBRÖCK METHODS TO INCREASE THEIR ACCURACY**

**SYMMETRIC-CONJUGATE SPLITTING METHODS FOR EVOLUTION EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE**

**NUMERICAL APPROXIMATION OF A SINGULARLY PERTURBED CONVECTION-DIFFUSION...**

**VERY HIGH-ORDER ACCURATE DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR CURVED BOUNDARIES...**

**ORDER REDUCTION PRESENTED WHEN INTEGRATING LINEAR PROBLEMS WITH GENERAL LINEAR...**

## 2D Newton Schwarz domain decomposition method applied to the Rayleigh-Bénard convection problem

FRANCISCO PLA, DARÍO MARTÍNEZ, HENAR HERRERO

Departamento de Matemáticas, Universidad de Castilla-La Mancha, Ciudad Real (Spain)

[Francisco.Pla@uclm.es](mailto:Francisco.Pla@uclm.es)

**Abstract:** In this paper we present an alternate Schwarz-type domain decomposition (DD) method applied to the Rayleigh-Bénard convection problem in a 2D fluid layer. The problem is modeled with the incompressible Navier-Stokes equations together with the heat equation in a rectangular domain and the Boussinesq approximation is considered [5]. The problem is numerically solved with a Legendre collocation method and the mesh used is defined by Legendre-Gauss-Lobatto collocation points [1]. Since the spectral methods are ill-conditioned it is necessary to use a DD method by dividing the problem into smaller subdomains and in this way, the ill-conditioning of Legendre collocation is overcome. Then, solutions can be obtained for large aspect ratios and/or for larger Rayleigh numbers [2, 4]. The stationary problem by means of the Schwarz alternating DD method and the solutions with this method are compared to reference solutions obtained with finite elements by COMSOL Multiphysics [3].

### Referencias

- [1] C. Bernardi, Y. Maday (1991). Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques. Springer-Verlag.
- [2] H. Herrero, F. Pla, M. Ruiz-Ferrández (2019). A Schwarz Method for a Rayleigh-Bénard Problem. *J. of Scientific Computing*, 78, 376-392.
- [3] D. Martínez, H. Henar, F. Pla (2022). 2D Newton Schwarz Legendre Collocation Method for a Convection Problem. *Mathematics*, 10, 3718.
- [4] D. Martínez, F. Pla, H. Henar, A. Fernández-Pérez (2023). A Schwarz alternating method for an evolution convection problem. *Applied Numerical Mathematics*, 192, 179-196.
- [5] F. Pla, A.M. Mancho, H. Herrero (2008). Bifurcation phenomena in a convection problem with temperature dependent viscosity at low aspect ratio. *Physica D*, D238, 572-580.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 19  
Resolución numérica de ecuaciones  
en derivadas parciales y aplicaciones

2D NEWTON SCHWARZ DOMAIN  
DECOMPOSITION METHOD APPLIED  
TO THE RAYLEIGH-BÉNARD...

A SCHWARZ ALTERNATING METHOD  
FOR AN EVOLUTION CONVECTION  
PROBLEM

UN MÉTODO MULTISPLITTING PARA  
LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS  
EVOLUTIVOS 2D SINGULARMENTE...

UN MÉTODO NUMÉRICO EFICIENTE  
PARA SISTEMAS PARABÓLICOS  
UNIDIMENSIONALES...

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES  
EN DERIVADAS PARCIALES POR  
ELEMENTOS FINITOS...

AVANCES RECIENTES EN EL DISEÑO  
DE MÉTODOS BIEN EQUILIBRADOS  
PARA SISTEMAS...

ESQUEMAS SEMI-IMPLÍCITOS BIEN  
EQUILIBRADOS PARA TODAS LAS  
SOLUCIONES ESTACIONARIAS...

ESQUEMAS LAGRANGIANO-  
PROYECTADOS DE TIPO IMPLÍCITO-  
EXPLÍCITO PARA LAS ECUACIONES...

ESTABILIDAD DE ALGUNAS  
RECONSTRUCCIONES DE ALTO ORDEN  
PARA LA APROXIMACIÓN DE LEYES...

MODIFIED EXPONENTIAL  
ROSENBRÖCK METHODS TO INCREASE  
THEIR ACCURACY

SYMMETRIC-CONJUGATE SPLITTING  
METHODS FOR EVOLUTION EQUATIONS  
OF PARABOLIC TYPE

NUMERICAL APPROXIMATION  
OF A SINGULARLY PERTURBED  
CONVECTION-DIFFUSION...

VERY HIGH-ORDER ACCURATE  
DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD  
FOR CURVED BOUNDARIES...

ORDER REDUCTION PRESENTED WHEN  
INTEGRATING LINEAR PROBLEMS  
WITH GENERAL LINEAR...

## A Schwarz alternating method for an evolution convection problem

HENAR HERRERO, DARÍO MARTÍNEZ, FRANCISCO PLA

Departamento Matemáticas, Universidad de Castilla-La Mancha

[Henar.Herrero@uclm.es](mailto:Henar.Herrero@uclm.es)

**Resumen:** En este trabajo se propone un método de descomposición de dominios de Schwarz para resolver un problema de Rayleigh-Bénard [1]. Legendre colocación es un método mal condicionado. No es posible aumentar el tamaño de la malla para conseguir soluciones en régimen turbulento, que se alcanzan para valores grandes del número de Rayleigh. Esta propuesta consigue mallas gruesas en muchos subdominios, de esta forma el problema en cada subdominio está bien condicionado, el tamaño de la malla total puede crecer aumentando el número de subdominios, y se supera el mal condicionamiento.

Las ecuaciones modelo son las de Navier-Stokes, continuidad y calor en el caso de número de Prandtl infinito en un dominio bidimensional. El problema de evolución no lineal se trata con un esquema de diferencias finitas de orden dos en el tiempo y un método de colocación en el espacio. Cada paso del problema de evolución se resuelve con un método de descomposición de dominios de Schwarz. El dominio se divide en varios subdominios con condiciones de interfaz adecuadas. Sus propiedades de convergencia se estudian teóricamente en un dominio simplificado dividido en dos subdominios. La tasa de convergencia es inferior a uno cuando se considera un solapamiento. La resolución numérica del problema confirma los resultados teóricos. Una comparación con soluciones numéricas obtenidas con otros métodos valida el método. Se alcanza la convergencia para grandes mallas espaciales, que son inabordables para el método de colocación Legendre estándar. Otra ventaja de esta metodología es la paralelización. Los resultados están publicados en [2].

### Referencias

- [1] F. Pla, A. M. Mancho, H. Herrero (2009). Bifurcation phenomena in a convection problem with temperature dependent viscosity at low aspect ratio. *Physica D*, 238, 572-280.
- [2] D. Martínez, F. Pla, H. Herrero, A. Fernández-Pérez (2023). A Schwarz alternating method for an evolution convection problem. *Applied Numerical Mathematics*, 192, 179-196.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

SESIÓN ESPECIAL 19  
Resolución numérica de ecuaciones  
en derivadas parciales y aplicaciones

2D NEWTON SCHWARZ DOMAIN  
DECOMPOSITION METHOD APPLIED  
TO THE RAYLEIGH-BÉNARD...

A SCHWARZ ALTERNATING METHOD  
FOR AN EVOLUTION CONVECTION  
PROBLEM

UN MÉTODO MULTISPLITTING PARA  
LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS  
EVOLUTIVOS 2D SINGULARMENTE...

UN MÉTODO NUMÉRICO EFICIENTE  
PARA SISTEMAS PARABÓLICOS  
UNIDIMENSIONALES...

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES  
EN DERIVADAS PARCIALES POR  
ELEMENTOS FINITOS...

AVANCES RECIENTES EN EL DISEÑO  
DE MÉTODOS BIEN EQUILIBRADOS  
PARA SISTEMAS...

ESQUEMAS SEMI-IMPLÍCITOS BIEN  
EQUILIBRADOS PARA TODAS LAS  
SOLUCIONES ESTACIONARIAS...

ESQUEMAS LAGRANGIANO-  
PROYECTADOS DE TIPO IMPLÍCITO-  
EXPLÍCITO PARA LAS ECUACIONES...

ESTABILIDAD DE ALGUNAS  
RECONSTRUCCIONES DE ALTO ORDEN  
PARA LA APROXIMACIÓN DE LEYES...

MODIFIED EXPONENTIAL  
ROSENBLUTH METHODS TO INCREASE  
THEIR ACCURACY

SYMMETRIC-CONJUGATE SPLITTING  
METHODS FOR EVOLUTION EQUATIONS  
OF PARABOLIC TYPE

NUMERICAL APPROXIMATION  
OF A SINGULARLY PERTURBED  
CONVECTION-DIFFUSION...

VERY HIGH-ORDER ACCURATE  
DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD  
FOR CURVED BOUNDARIES...

ORDER REDUCTION PRESENTED WHEN  
INTEGRATING LINEAR PROBLEMS  
WITH GENERAL LINEAR...

## Un método *multisplitting* para la resolución de sistemas evolutivos 2D singularmente perturbados de convección-difusión-reacción

J.C. JORGE, C. CLAVERO

Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas, Universidad Pública de Navarra

[jcjorge@unavarra.es](mailto:jcjorge@unavarra.es)

**Resumen:** En esta comunicación se presenta un método uniformemente convergente y altamente eficiente desde el punto de vista computacional para resolver sistemas parabólicos dados por

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon(t)\mathbf{u} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{L}_{\mathbf{x}, \varepsilon}(t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in Q \equiv \Omega \times (0, T], \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

donde  $\Omega = (0, 1)^2$ ,  $\mathbf{x} = (x, y)^T$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t))^T$  y

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}, \varepsilon}(t)\mathbf{u} \equiv -\mathcal{D}\Delta\mathbf{u} + \mathcal{B}_1(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{B}_2(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{A}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}, \quad (2)$$

siendo  $\mathcal{D} = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  la matriz de difusión, en la que los coeficientes de difusión  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  pueden ser muy pequeños y de diferentes órdenes de magnitud. Los términos convectivos se agrupan en las matrices  $\mathcal{B}_1(\mathbf{x}) = \text{diag}(b_{11}(\mathbf{x}), b_{12}(\mathbf{x}))$  y  $\mathcal{B}_2(\mathbf{x}) = \text{diag}(b_{21}(\mathbf{x}), b_{22}(\mathbf{x}))$ , compuestas de elementos diagonales positivos; asimismo, se supone que la matriz de reacción  $\mathcal{A}$  es una  $M$ -matriz. Debido al carácter multiescala de la solución de (3), en la que aparecen capas límite solapadas en la frontera saliente del dominio espacial, es necesario recurrir a métodos de discretización espacial uniformemente convergentes para obtener aproximaciones fiables. Los sistemas diferenciales resultantes de este proceso de discretización espacial son costosos de resolver debido a su complejidad y a su elevada rigidez; estos inconvenientes se superan mediante el uso de un integrador temporal apropiado, de tipo pasos fraccionarios, combinado con una descomposición del operador en diferencias por direcciones y por componentes. El algoritmo resultante de este doble proceso de discretización es uniformemente convergente, propiedad que se corrobora en la práctica con la resolución numérica de varios problemas test.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

SESIÓN ESPECIAL 19  
Resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales y aplicaciones

2D NEWTON SCHWARZ DOMAIN DECOMPOSITION METHOD APPLIED TO THE RAYLEIGH-BÉNARD...

A SCHWARZ ALTERNATING METHOD FOR AN EVOLUTION CONVECTION PROBLEM

UN MÉTODO MULTISPLITTING PARA LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS EVOLUTIVOS 2D SINGULARMENTE...

UN MÉTODO NUMÉRICO EFICIENTE PARA SISTEMAS PARABÓLICOS UNIDIMENSIONALES...

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES POR ELEMENTOS FINITOS...

AVANCES RECIENTES EN EL DISEÑO DE MÉTODOS BIEN EQUILIBRADOS PARA SISTEMAS...

ESQUEMAS SEMI-IMPLÍCITOS BIEN EQUILIBRADOS PARA TODAS LAS SOLUCIONES ESTACIONARIAS...

ESQUEMAS LAGRANGIANO-PROYECTADOS DE TIPO IMPLÍCITO-EXPLÍCITO PARA LAS ECUACIONES...

ESTABILIDAD DE ALGUNAS RECONSTRUCCIONES DE ALTO ORDEN PARA LA APROXIMACIÓN DE LEYES...

MODIFIED EXPONENTIAL ROSENBRÖCK METHODS TO INCREASE THEIR ACCURACY

SYMMETRIC-CONJUGATE SPLITTING METHODS FOR EVOLUTION EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE

NUMERICAL APPROXIMATION OF A SINGULARLY PERTURBED CONVECTION-DIFFUSION...

VERY HIGH-ORDER ACCURATE DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR CURVED BOUNDARIES...

ORDER REDUCTION PRESENTED WHEN INTEGRATING LINEAR PROBLEMS WITH GENERAL LINEAR...



## Un método numérico eficiente para sistemas parabólicos unidimensionales singularmente perturbados con *turning points* interiores

C. CLAVERO, J.C. JORGE

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza

clavero@unizar.es

**Resumen:** En esta comunicación se presenta un método uniformemente convergente para resolver sistemas parabólicos singularmente perturbados dados por

$$\begin{cases} \mathbf{L}_\varepsilon \mathbf{u} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, t) + \mathcal{L}_{x,\varepsilon}(t) \mathbf{u}(x, t) = \mathbf{f}(x, t), & (x, t) \in (-1, 1) \times (0, T], \\ \mathbf{u}(-1, t) = \mathbf{g}_0(t), \mathbf{u}(1, t) = \mathbf{g}_1(t), & t \in [0, T], \mathbf{u}(x, 0) = \varphi(x), & x \in (-1, 1), \end{cases} \quad (3)$$

donde  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$  y el operador diferencial lineal que contiene los términos de convección, difusión y reacción está dado por

$$\mathcal{L}_{x,\varepsilon}(t) \mathbf{u} \equiv -\mathcal{D}_\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + x^q \mathcal{B}(x) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathcal{A}(x, t) \mathbf{u}, \quad (4)$$

o bien por

$$\mathcal{L}_{x,\varepsilon}(t) \mathbf{u} \equiv -\mathcal{D}_\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} - x^q \mathcal{B}(x) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathcal{A}(x, t) \mathbf{u}, \quad (5)$$

siendo  $\mathcal{D}_\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  la matriz de difusión,  $q$  un entero impar positivo,  $\mathcal{B}(x) = \text{diag}(b_{11}(x), b_{22}(x))$ , con  $b_{kk} \geq \beta > 0$ ,  $k = 1, 2$ , la matriz de convección y  $\mathcal{A}(x, t) = (a_{kp}(x, t))$ ,  $k, p = 1, 2$ , la matriz de reacción, es una  $M$ -matriz.

Cuando se considera (4), se dice que (3) presenta un *turning point* de tipo repulsivo en  $x = 0$ , mientras que en el caso (5) se dice que el *turning point* es de tipo atractivo. En el primero de los casos, en general, en la solución exacta aparecen capas límite solapadas en  $x = -1$  y  $x = 1$  de anchuras  $\mathcal{O}(\varepsilon_1)$  y  $\mathcal{O}(\varepsilon_2)$ ; por otro lado, en el segundo caso, sólo cuando el término fuente tiene una discontinuidad de salto en  $x = 0$ , aparecen capas internas solapadas en  $x = 0$  de anchuras  $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon_1})$  y  $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon_2})$ .

El problema continuo se resuelve usando un integrador temporal apropiado, de tipo pasos fraccionarios, combinado con una descomposición del operador en diferencias por componentes, junto con el esquema *upwind* definido sobre una malla adecuada de tipo Shishkin para discretizar en espacio. El algoritmo resultante es uniformemente convergente respecto a ambos parámetros de difusión.

Los ensayos numéricos realizados en varios problemas test validan en la práctica la fiabilidad y la eficiencia del método numérico construido.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

SESIÓN ESPECIAL 19  
Resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales y aplicaciones

2D NEWTON SCHWARZ DOMAIN DECOMPOSITION METHOD APPLIED TO THE RAYLEIGH-BÉNARD...

A SCHWARZ ALTERNATING METHOD FOR AN EVOLUTION CONVECTION PROBLEM

UN MÉTODO MULTISPLITTING PARA LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS EVOLUTIVOS 2D SINGULARMENTE...

UN MÉTODO NUMÉRICO EFICIENTE PARA SISTEMAS PARABÓLICOS UNIDIMENSIONALES...

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES POR ELEMENTOS FINITOS...

AVANCES RECIENTES EN EL DISEÑO DE MÉTODOS BIEN EQUILIBRADOS PARA SISTEMAS...

ESQUEMAS SEMI-IMPLÍCITOS BIEN EQUILIBRADOS PARA TODAS LAS SOLUCIONES ESTACIONARIAS...

ESQUEMAS LAGRANGIANO-PROYECTADOS DE TIPO IMPLÍCITO-EXPLÍCITO PARA LAS ECUACIONES...

ESTABILIDAD DE ALGUNAS RECONSTRUCCIONES DE ALTO ORDEN PARA LA APROXIMACIÓN DE LEYES...

MODIFIED EXPONENTIAL ROSENBRÖCK METHODS TO INCREASE THEIR ACCURACY

SYMMETRIC-CONJUGATE SPLITTING METHODS FOR EVOLUTION EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE

NUMERICAL APPROXIMATION OF A SINGULARLY PERTURBED CONVECTION-DIFFUSION...

VERY HIGH-ORDER ACCURATE DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR CURVED BOUNDARIES...

ORDER REDUCTION PRESENTED WHEN INTEGRATING LINEAR PROBLEMS WITH GENERAL LINEAR...

## Resolución de Ecuaciones en Derivadas Parciales por Elementos Finitos para la Optimización de Recolectores de Energía Vibracional

E. GARAIO, D. GANDIA, I. ROYO-SILVESTRE, J.C. JORGE, C. GÓMEZ-POLO

Departamento Ciencias, Universidad Pública de Navarra

eneko.garayo@unavarra.es

**Resumen:** El término ‘recolector de energía’ se refiere a un dispositivo o sistema diseñado para capturar y almacenar energía presente en el entorno, para posteriormente alimentar pequeños dispositivos o sistemas electrónicos, como redes de sensores. Estos dispositivos resultan valiosos cuando no es posible o recomendable depender de fuentes de energía convencionales, como baterías o conexiones a la red eléctrica.

En concreto, los recolectores de energía vibracional tienen la capacidad de transformar pequeñas oscilaciones presentes en el entorno en energía eléctrica. Los materiales magnetostrictivos ofrecen un rendimiento superior a bajas frecuencias ( $< 100$  Hz), como por ejemplo, en las vibraciones de un puente. En este caso, la conversión de energía mecánica a eléctrica se logra a través del efecto Villari, en el que las deformaciones del material magnetostrictivo da lugar a variaciones en la imanación y por tanto en una fuerza electromotriz  $V$  en una bobina receptora. Sin embargo, para que estos recolectores de energía vibracional funcionen de manera óptima, es necesario llevar a cabo una optimización tanto de la plataforma vibrante y sus frecuencias de resonancia mecánica, como del campo magnético estático y las bobinas receptoras encargadas de captar la energía eléctrica. Por lo tanto, se plantea la necesidad de abordar un problema de optimización mecánica y electromagnética.

En este trabajo, se propone la utilización del método de elementos finitos (FEM) para resolver ecuaciones en derivadas parciales con el fin de optimizar un recolector de energía vibracional magnetostrictivo. Este estudio se enfoca en la optimización de recolectores de energía magnetostrictivos basados en una estructura con forma de U. Las vibraciones generadas en la estructura en forma de U son transmitidas a una lámina magnetostrictiva compuesta de Galio y Hierro (GaFe), la cual es imantada mediante imanes permanentes. Las ecuaciones en derivadas parciales a abordar incluyen la de elasticidad lineal y las ecuaciones de Maxwell. El acoplamiento entre el sistema mecánico y electromagnético se lleva a cabo ajustando los coeficientes de amortiguación. También se presenta un esquema de integración temporal (transitorio) para obtener la fuerza electromotriz en función del tiempo.

**Agradecimientos:** El trabajo es parte del proyecto TED2021-130884B-I00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por la Unión Europea “NextGenerationE”/PRTR.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
13:30 – 14:00

SESIÓN ESPECIAL 19  
Resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales y aplicaciones

2D NEWTON SCHWARZ DOMAIN DECOMPOSITION METHOD APPLIED TO THE RAYLEIGH-BÉNARD...

A SCHWARZ ALTERNATING METHOD FOR AN EVOLUTION CONVECTION PROBLEM

UN MÉTODO MULTISPLITTING PARA LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS EVOLUTIVOS 2D SINGULARMENTE...

UN MÉTODO NUMÉRICO EFICIENTE PARA SISTEMAS PARABÓLICOS UNIDIMENSIONALES...

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES POR ELEMENTOS FINITOS...

AVANCES RECIENTES EN EL DISEÑO DE MÉTODOS BIEN EQUILIBRADOS PARA SISTEMAS...

ESQUEMAS SEMI-IMPLÍCITOS BIEN EQUILIBRADOS PARA TODAS LAS SOLUCIONES ESTACIONARIAS...

ESQUEMAS LAGRANGIANO-PROYECTADOS DE TIPO IMPLÍCITO-EXPLÍCITO PARA LAS ECUACIONES...

ESTABILIDAD DE ALGUNAS RECONSTRUCCIONES DE ALTO ORDEN PARA LA APROXIMACIÓN DE LEYES...

MODIFIED EXPONENTIAL ROSENBRÖCK METHODS TO INCREASE THEIR ACCURACY

SYMMETRIC-CONJUGATE SPLITTING METHODS FOR EVOLUTION EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE

NUMERICAL APPROXIMATION OF A SINGULARLY PERTURBED CONVECTION-DIFFUSION...

VERY HIGH-ORDER ACCURATE DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR CURVED BOUNDARIES...

ORDER REDUCTION PRESENTED WHEN INTEGRATING LINEAR PROBLEMS WITH GENERAL LINEAR...

## Avances recientes en el diseño de métodos bien equilibrados para sistemas de leyes de equilibrio

I. GÓMEZ-BUENO<sup>1</sup>, S. BOSCARINO, M.J. CASTRO, C. PARÉS, G. RUSSO

<sup>1</sup>Universidad de Sevilla

igomez1@us.es

**Resumen:** El objetivo de este trabajo es presentar una estrategia general para diseñar métodos numéricos de volúmenes finitos de alto orden explícitos, implícitos y semi-implícitos bien equilibrados para sistemas hiperbólicos de leyes de equilibrio no lineales en una dimensión. Estos métodos se obtienen extendiendo una estrategia general basada en el cálculo de estados estacionarios locales introducida por dos de los autores en [1] para métodos explícitos, cuya clave es la aplicación de operadores de reconstrucción exactamente bien equilibrados. Dicha estrategia requiere conocer las soluciones estacionarias del sistema. Si no es el caso, se diseñan esquemas que son bien equilibrados siguiendo la metodología presentada en los trabajos[2]-[3]. Además, para el desarrollo de esquemas implícitos y semi-implícitos, este procedimiento se combina, siguiendo [4], con un método de discretización temporal de tipo RK-IMEX o RK-implícito. Se mostrarán diferentes aplicaciones y se discutirán algunos trabajos posteriores, como el diseño de esquemas que preservan todas las soluciones estacionarias hidrostáticas de las ecuaciones de Euler con gravedad y el modelo de Ripa.

### Referencias

- [1] M.J. Castro, C. Parés (2020). Well-balanced high-order finite volume methods for systems of balance laws. *Journal of Scientific Computing*, 82(2), 1-48.
- [2] I. Gómez-Bueno, M.J. Castro, C. Parés (2021). High-order well-balanced methods for systems of balance laws: a control-based approach. *Applied Mathematics and Computation*, 394, 125820.
- [3] I. Gómez-Bueno, M.J. Castro, C. Parés, G. Russo (2021). Collocation Methods for High-Order Well-Balanced Methods for Systems of Balance Laws. *Mathematics*, 9(15), 1799.
- [4] I. Gómez-Bueno, S. Boscarino, M.J. Castro, C. Parés, G. Russo (2023). Implicit and semi-implicit well-balanced finite-volume methods for systems of balance laws. *Applied Numerical Mathematics*, 184, 18-48.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

SESIÓN ESPECIAL 19  
Resolución numérica de ecuaciones  
en derivadas parciales y aplicaciones

2D NEWTON SCHWARZ DOMAIN  
DECOMPOSITION METHOD APPLIED  
TO THE RAYLEIGH-BÉNARD...

A SCHWARZ ALTERNATING METHOD  
FOR AN EVOLUTION CONVECTION  
PROBLEM

UN MÉTODO MULTISPLITTING PARA  
LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS  
EVOLUTIVOS 2D SINGULARMENTE...

UN MÉTODO NUMÉRICO EFICIENTE  
PARA SISTEMAS PARABÓLICOS  
UNIDIMENSIONALES...

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES  
EN DERIVADAS PARCIALES POR  
ELEMENTOS FINITOS...

AVANCES RECIENTES EN EL DISEÑO  
DE MÉTODOS BIEN EQUILIBRADOS  
PARA SISTEMAS...

ESQUEMAS SEMI-IMPLÍCITOS BIEN  
EQUILIBRADOS PARA TODAS LAS  
SOLUCIONES ESTACIONARIAS...

ESQUEMAS LAGRANGIANO-  
PROYECTADOS DE TIPO IMPLÍCITO-  
EXPLÍCITO PARA LAS ECUACIONES...

ESTABILIDAD DE ALGUNAS  
RECONSTRUCCIONES DE ALTO ORDEN  
PARA LA APROXIMACIÓN DE LEYES...

MODIFIED EXPONENTIAL  
ROSENBRÖCK METHODS TO INCREASE  
THEIR ACCURACY

SYMMETRIC-CONJUGATE SPLITTING  
METHODS FOR EVOLUTION EQUATIONS  
OF PARABOLIC TYPE

NUMERICAL APPROXIMATION  
OF A SINGULARLY PERTURBED  
CONVECTION-DIFFUSION...

VERY HIGH-ORDER ACCURATE  
DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD  
FOR CURVED BOUNDARIES...

ORDER REDUCTION PRESENTED WHEN  
INTEGRATING LINEAR PROBLEMS  
WITH GENERAL LINEAR...

## Esquemas semi-implícitos bien equilibrados para todas las soluciones estacionarias de las ecuaciones de aguas someras

C. CABALLERO-CÁRDENAS, M. J. CASTRO, C. CHALONS,  
T. MORALES DE LUNA, M. L. MUÑOZ-RUIZ

Departamento Análisis Matemático, Estadística e Investigación Operativa y Matemática Aplicada,  
Universidad de Málaga  
celiacaba@uma.es

**Resumen:** Presentamos esquemas numéricos semi-implícitos de primer y segundo orden bien equilibrados para todas las soluciones estacionarias para las ecuaciones de aguas someras (*shallow water equations*) basados en técnicas de *splitting* y relajación. En concreto, el sistema de aguas someras se divide primero en dos sistemas: el de presión y el de transporte. A continuación, se aplica una técnica de relajación al sistema de presión.

Una de las ventajas de este enfoque es que el paso de presión puede hacerse de forma explícita o implícita, y este último nos permite considerar pasos de tiempo mayores, ya que tiene una condición CFL menos restrictiva. De hecho, para números de Froude pequeños, la principal restricción sobre el paso de tiempo viene dada por el término de presión.

El carácter bien equilibrado del esquema se consigue considerando las fluctuaciones temporales con respecto a un estado estacionario local en cada celda, congelado en el tiempo  $t^n$  como se propone en [1] y el uso de un operador de reconstrucción exactamente equilibrado [2].

### Referencias

- [1] I. Gómez-Bueno, S. Boscarino, M. J. Castro, C. Parés, G. Russo (2023). Implicit and semi-implicit well-balanced finite-volume methods for systems of balance laws. *Applied Numerical Mathematics*, 184, 18-48.
- [2] M. J. Castro, C. Parés (2020). Well-balanced high-order finite volume methods for systems of balance laws. *Journal of Scientific Computing*, 82, 48.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 19  
Resolución numérica de ecuaciones  
en derivadas parciales y aplicaciones

2D NEWTON SCHWARZ DOMAIN  
DECOMPOSITION METHOD APPLIED  
TO THE RAYLEIGH-BÉNARD...

A SCHWARZ ALTERNATING METHOD  
FOR AN EVOLUTION CONVECTION  
PROBLEM

UN MÉTODO MULTISPLITTING PARA  
LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS  
EVOLUTIVOS 2D SINGULARMENTE...

UN MÉTODO NUMÉRICO EFICIENTE  
PARA SISTEMAS PARABÓLICOS  
UNIDIMENSIONALES...

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES  
EN DERIVADAS PARCIALES POR  
ELEMENTOS FINITOS...

AVANCES RECIENTES EN EL DISEÑO  
DE MÉTODOS BIEN EQUILIBRADOS  
PARA SISTEMAS...

ESQUEMAS SEMI-IMPLÍCITOS BIEN  
EQUILIBRADOS PARA TODAS LAS  
SOLUCIONES ESTACIONARIAS...

ESQUEMAS LAGRANGIANO-  
PROYECTADOS DE TIPO IMPLÍCITO-  
EXPLÍCITO PARA LAS ECUACIONES...

ESTABILIDAD DE ALGUNAS  
RECONSTRUCCIONES DE ALTO ORDEN  
PARA LA APROXIMACIÓN DE LEYES...

MODIFIED EXPONENTIAL  
ROSENBROCK METHODS TO INCREASE  
THEIR ACCURACY

SYMMETRIC-CONJUGATE SPLITTING  
METHODS FOR EVOLUTION EQUATIONS  
OF PARABOLIC TYPE

NUMERICAL APPROXIMATION  
OF A SINGULARLY PERTURBED  
CONVECTION-DIFFUSION...

VERY HIGH-ORDER ACCURATE  
DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD  
FOR CURVED BOUNDARIES...

ORDER REDUCTION PRESENTED WHEN  
INTEGRATING LINEAR PROBLEMS  
WITH GENERAL LINEAR...

## Esquemas Lagrangiano-Proyectados de tipo implícito-explicito para las ecuaciones de Ripa

MARÍA LUZ MUÑOZ-RUIZ, CELIA CABALLERO-CÁRDENAS,  
 MANUEL J. CASTRO, TOMÁS MORALES DE LUNA  
 Departamento de Análisis Matemático, Estadística e I.O. y Matemática Aplicada,  
 Universidad de Málaga  
[mlmunoz@uma.es](mailto:mlmunoz@uma.es)

**Resumen:** En este trabajo consideramos el sistema de ecuaciones de aguas someras que incluye los gradientes de temperatura horizontales, conocido como sistema de Ripa. Presentamos un esquema numérico para dicho sistema basado en una formulación de tipo volúmenes finitos de tipo Lagrangiano-Proyectado. Aunque también consideraremos una versión implícita de los esquemas propuestos, la experiencia previa obtenida con el sistema de ecuaciones de aguas poco profundas nos hace decantarnos por la utilización de un esquema implícito-explicito, ya que la ligera mejora obtenida en los resultados del esquema puramente implícito respecto al implícito-explicito no justifica la mayor complejidad que supone el mismo. Así pues, en cada iteración temporal, comenzamos resolviendo nuestro sistema en coordenadas lagrangianas, para después proyectar las soluciones obtenidas en las coordenadas eulerianas. Es ese primer paso el que podemos considerar tanto completamente implícito como implícito-explicito, mientras que la etapa de proyección se realiza siempre de forma explícita.

### Referencias

- [1] C. Caballero-Cárdenas, M.J. Castro, T. Morales de Luna, M.L. Muñoz-Ruiz (2023). Implicit and implicit-explicit lagrange-projection finite volume schemes exactly wellbalanced for 1d shallow water system. *Applied Mathematics and Computation*, 443:127784.
- [2] M.J. Castro, C. Chalons, T. Morales (2018). A fully well-balanced Lagrange-Projection-type scheme for the shallow water equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 56(5), 3071-3098.
- [3] I. Gómez-Bueno, S. Boscarino, M.J. Castro, C. Parés, G. Russo (2023). Implicit and semi-implicit well-balanced finite-volume methods for systems of balance laws. *Applied Numerical Mathematics*. vol. 184, 18-48.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
 17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 19  
 Resolución numérica de ecuaciones  
 en derivadas parciales y aplicaciones

2D NEWTON SCHWARZ DOMAIN  
 DECOMPOSITION METHOD APPLIED  
 TO THE RAYLEIGH-BÉNARD...

A SCHWARZ ALTERNATING METHOD  
 FOR AN EVOLUTION CONVECTION  
 PROBLEM

UN MÉTODO MULTISPLITTING PARA  
 LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS  
 EVOLUTIVOS 2D SINGULARMENTE...

UN MÉTODO NUMÉRICO EFICIENTE  
 PARA SISTEMAS PARABÓLICOS  
 UNIDIMENSIONALES...

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES  
 EN DERIVADAS PARCIALES POR  
 ELEMENTOS FINITOS...

AVANCES RECIENTES EN EL DISEÑO  
 DE MÉTODOS BIEN EQUILIBRADOS  
 PARA SISTEMAS...

ESQUEMAS SEMI-IMPLÍCITOS BIEN  
 EQUILIBRADOS PARA TODAS LAS  
 SOLUCIONES ESTACIONARIAS...

ESQUEMAS LAGRANGIANO-  
 PROYECTADOS DE TIPO IMPLÍCITO-  
 EXPLÍCITO PARA LAS ECUACIONES...

ESTABILIDAD DE ALGUNAS  
 RECONSTRUCCIONES DE ALTO ORDEN  
 PARA LA APROXIMACIÓN DE LEYES...

MODIFIED EXPONENTIAL  
 ROSENBLUTH METHODS TO INCREASE  
 THEIR ACCURACY

SYMMETRIC-CONJUGATE SPLITTING  
 METHODS FOR EVOLUTION EQUATIONS  
 OF PARABOLIC TYPE

NUMERICAL APPROXIMATION  
 OF A SINGULARLY PERTURBED  
 CONVECTION-DIFFUSION...

VERY HIGH-ORDER ACCURATE  
 DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD  
 FOR CURVED BOUNDARIES...

ORDER REDUCTION PRESENTED WHEN  
 INTEGRATING LINEAR PROBLEMS  
 WITH GENERAL LINEAR...

## Estabilidad de algunas reconstrucciones de alto orden para la aproximación de leyes de conservación

S. AMAT, S. BUSQUIER, M.J. CASTRO, C.M. PARÉS

Departamento Matemática Aplicada y Estadística, Universidad Politécnica de Cartagena

[sergio.amat@upct.es](mailto:sergio.amat@upct.es)

**Resumen:** En este trabajo estudiaremos la estabilidad de algunos procedimientos de reconstrucción e interpolación de alto orden que se usan en la aproximación de leyes de conservación. La estabilidad se entiende en el sentido de que el salto de los valores puntuales reconstruidos en cada interfaz de celda tiene el mismo signo que el salto de los promedios de las celdas subyacentes a través de esa interfaz. Además, se verá que el tamaño de estos saltos después de la reconstrucción en relación con el salto de los promedios de las celdas subyacentes está acotado.

### Referencias

- [1] S. Amat, S. Busquier and V.F. Candela (2003). A Polynomial Approach to the Piecewise Hyperbolic Method. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 17 (3), 205–217.
- [2] U.S. Fjordholm, S. Mishra and E. Tadmor (2013). ENO Reconstruction and ENO Interpolation Are Stable. *Found Comput Math*, 13, 139–159.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

SESIÓN ESPECIAL 19  
Resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales y aplicaciones

2D NEWTON SCHWARZ DOMAIN DECOMPOSITION METHOD APPLIED TO THE RAYLEIGH-BÉNARD...

A SCHWARZ ALTERNATING METHOD FOR AN EVOLUTION CONVECTION PROBLEM

UN MÉTODO MULTISPLITTING PARA LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS EVOLUTIVOS 2D SINGULARMENTE...

UN MÉTODO NUMÉRICO EFICIENTE PARA SISTEMAS PARABÓLICOS UNIDIMENSIONALES...

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES POR ELEMENTOS FINITOS...

AVANCES RECIENTES EN EL DISEÑO DE MÉTODOS BIEN EQUILIBRADOS PARA SISTEMAS...

ESQUEMAS SEMI-IMPLÍCITOS BIEN EQUILIBRADOS PARA TODAS LAS SOLUCIONES ESTACIONARIAS...

ESQUEMAS LAGRANGIANO-PROYECTADOS DE TIPO IMPLÍCITO-EXPLÍCITO PARA LAS ECUACIONES...

ESTABILIDAD DE ALGUNAS RECONSTRUCCIONES DE ALTO ORDEN PARA LA APROXIMACIÓN DE LEYES...

MODIFIED EXPONENTIAL ROSENBRÖCK METHODS TO INCREASE THEIR ACCURACY

SYMMETRIC-CONJUGATE SPLITTING METHODS FOR EVOLUTION EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE

NUMERICAL APPROXIMATION OF A SINGULARLY PERTURBED CONVECTION-DIFFUSION...

VERY HIGH-ORDER ACCURATE DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR CURVED BOUNDARIES...

ORDER REDUCTION PRESENTED WHEN INTEGRATING LINEAR PROBLEMS WITH GENERAL LINEAR...

## Modified exponential Rosenbrock methods to increase their accuracy

BEGOÑA CANO, MARÍA JESÚS MORETA

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Valladolid, IMUVA  
bcano@uva.es

**Abstract:** In this talk a technique will be described to avoid order reduction when integrating reaction-diffusion initial boundary value problems with explicit exponential Rosenbrock methods. The technique does not require to impose any stiff order condition but to add some terms related to the information on the boundary. Theoretical results on local and global error will be given as well as some numerical experiments which corroborate the theoretical results, and in which a big gain in efficiency with respect to applying the standard method of lines can be observed. Moreover, we justify that, for most methods, no numerical differentiation is required to calculate the information on the boundary up to order 3 (and even to get order 4 with Dirichlet boundary conditions) and we give some comparisons with several other methods in the literature, with the corresponding stiff order.

### Referencias

- [1] B. Cano, M. J. Moreta (2023). Exponential Rosenbrock methods without order reduction when integrating nonlinear initial boundary value problems. <https://arxiv.org/pdf/2307.12722.pdf>
- [2] B. Cano, M. J. Moreta (2023). Efficient exponential Rosenbrock methods till order four, submitted for publication.

**Acknowledgments:** This research was supported by Junta de Castilla y León and Feder through project VA169P20 and GIR ANEODA at University of Valladolid.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 19  
Resolución numérica de ecuaciones  
en derivadas parciales y aplicaciones

2D NEWTON SCHWARZ DOMAIN  
DECOMPOSITION METHOD APPLIED  
TO THE RAYLEIGH-BÉNARD...

A SCHWARZ ALTERNATING METHOD  
FOR AN EVOLUTION CONVECTION  
PROBLEM

UN MÉTODO MULTISPLITTING PARA  
LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS  
EVOLUTIVOS 2D SINGULARMENTE...

UN MÉTODO NUMÉRICO EFICIENTE  
PARA SISTEMAS PARABÓLICOS  
UNIDIMENSIONALES...

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES  
EN DERIVADAS PARCIALES POR  
ELEMENTOS FINITOS...

AVANCES RECIENTES EN EL DISEÑO  
DE MÉTODOS BIEN EQUILIBRADOS  
PARA SISTEMAS...

ESQUEMAS SEMI-IMPLÍCITOS BIEN  
EQUILIBRADOS PARA TODAS LAS  
SOLUCIONES ESTACIONARIAS...

ESQUEMAS LAGRANGIANO-  
PROYECTADOS DE TIPO IMPLÍCITO-  
EXPLÍCITO PARA LAS ECUACIONES...

ESTABILIDAD DE ALGUNAS  
RECONSTRUCCIONES DE ALTO ORDEN  
PARA LA APROXIMACIÓN DE LEYES...

MODIFIED EXPONENTIAL  
ROSENBRÖCK METHODS TO INCREASE  
THEIR ACCURACY

SYMMETRIC-CONJUGATE SPLITTING  
METHODS FOR EVOLUTION EQUATIONS  
OF PARABOLIC TYPE

NUMERICAL APPROXIMATION  
OF A SINGULARLY PERTURBED  
CONVECTION-DIFFUSION...

VERY HIGH-ORDER ACCURATE  
DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD  
FOR CURVED BOUNDARIES...

ORDER REDUCTION PRESENTED WHEN  
INTEGRATING LINEAR PROBLEMS  
WITH GENERAL LINEAR...

## Symmetric-conjugate splitting methods for evolution equations of parabolic type

FERNANDO CASAS

Departament de Matemàtiques & IMAC, Universitat Jaume I, 12071-Castellón

casas@uji.es

**Abstract:** In this talk I will provide a short introduction to a class of operator splitting methods with complex coefficients which possess a special symmetry, the so-called symmetric-conjugate methods, and analyze their application for the time integration of linear evolution problems. Including complex coefficients with non-negative real parts permits the design of favorable high-order schemes that remain stable in the context of parabolic problems. This sets aside the second-order barrier for standard splitting methods with real coefficients as well as the fourth-order barrier for modified splitting methods involving double commutators. Relevant applications include non-reversible systems and ground state computations for Schrödinger equations based on the imaginary time propagation method.

This is joint work with Sergio Blanes, Cesáreo González and Mechthild Thalhammer.

SESIÓN ESPECIAL 19  
Resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales y aplicaciones

2D NEWTON SCHWARZ DOMAIN DECOMPOSITION METHOD APPLIED TO THE RAYLEIGH-BÉNARD...

A SCHWARZ ALTERNATING METHOD FOR AN EVOLUTION CONVECTION PROBLEM

UN MÉTODO MULTISPLITTING PARA LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS EVOLUTIVOS 2D SINGULARMENTE...

UN MÉTODO NUMÉRICO EFICIENTE PARA SISTEMAS PARABÓLICOS UNIDIMENSIONALES...

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES POR ELEMENTOS FINITOS...

AVANCES RECIENTES EN EL DISEÑO DE MÉTODOS BIEN EQUILIBRADOS PARA SISTEMAS...

ESQUEMAS SEMI-IMPLÍCITOS BIEN EQUILIBRADOS PARA TODAS LAS SOLUCIONES ESTACIONARIAS...

ESQUEMAS LAGRANGIANO-PROYECTADOS DE TIPO IMPLÍCITO-EXPLÍCITO PARA LAS ECUACIONES...

ESTABILIDAD DE ALGUNAS RECONSTRUCCIONES DE ALTO ORDEN PARA LA APROXIMACIÓN DE LEYES...

MODIFIED EXPONENTIAL ROSENBRÖCK METHODS TO INCREASE THEIR ACCURACY

SYMMETRIC-CONJUGATE SPLITTING METHODS FOR EVOLUTION EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE

NUMERICAL APPROXIMATION OF A SINGULARLY PERTURBED CONVECTION-DIFFUSION...

VERY HIGH-ORDER ACCURATE DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR CURVED BOUNDARIES...

ORDER REDUCTION PRESENTED WHEN INTEGRATING LINEAR PROBLEMS WITH GENERAL LINEAR...

VIERNES, 26 DE ENERO:  
12:00 – 12:30



## Numerical approximation of a singularly perturbed convection-diffusion parabolic problem with incompatible initial and boundary data

JOSÉ LUIS GRACIA, EUGENE O'RIORDAN

IUMA y Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza

jlgracia@unizar.es

**Abstract:** A singularly perturbed parabolic problem of convection-diffusion type with incompatible inflow boundary data and initial conditions is examined. In the case of constant coefficients, a singular function is identified which matches the incompatibility in the data and also satisfies the associated homogenous differential equation. In the case of non-constant coefficients, the difference between a natural extension of this singular function and the solution of the parabolic problem is approximated numerically. When the convective coefficient only depends on the time variable and the initial/boundary data is discontinuous, then a mixed analytical/numerical approach is taken. A numerical method is constructed whose order of global convergence is shown to depend on the levels of compatibility satisfied by the data of the problem. Numerical results are presented to support the error bounds established in this talk.

This research is joint work with Eugene O'Riordan from the *Dublin City University, Ireland*.

### Referencias

- [1] J.L. Gracia, E. O'Riordan (2023). A singularly perturbed convection-diffusion parabolic problem with incompatible boundary/initial data. *Appl. Numer. Math.*, 190, 168–186.

**Acknowledgments:** This research was partially supported by the Institute of Mathematics and Applications (IUMA), the Gobierno de Aragon (E24 23R) and the projects PID2022-141385NB-I00 and PID2022-137334NB-I00.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

SESIÓN ESPECIAL 19  
Resolución numérica de ecuaciones  
en derivadas parciales y aplicaciones

2D NEWTON SCHWARZ DOMAIN  
DECOMPOSITION METHOD APPLIED  
TO THE RAYLEIGH-BÉNARD...

A SCHWARZ ALTERNATING METHOD  
FOR AN EVOLUTION CONVECTION  
PROBLEM

UN MÉTODO MULTISPLITTING PARA  
LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS  
EVOLUTIVOS 2D SINGULARMENTE...

UN MÉTODO NUMÉRICO EFICIENTE  
PARA SISTEMAS PARABÓLICOS  
UNIDIMENSIONALES...

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES  
EN DERIVADAS PARCIALES POR  
ELEMENTOS FINITOS...

AVANCES RECIENTES EN EL DISEÑO  
DE MÉTODOS BIEN EQUILIBRADOS  
PARA SISTEMAS...

ESQUEMAS SEMI-IMPLÍCITOS BIEN  
EQUILIBRADOS PARA TODAS LAS  
SOLUCIONES ESTACIONARIAS...

ESQUEMAS LAGRANGIANO-  
PROYECTADOS DE TIPO IMPLÍCITO-  
EXPLÍCITO PARA LAS ECUACIONES...

ESTABILIDAD DE ALGUNAS  
RECONSTRUCCIONES DE ALTO ORDEN  
PARA LA APROXIMACIÓN DE LEYES...

MODIFIED EXPONENTIAL  
ROSENBROCK METHODS TO INCREASE  
THEIR ACCURACY

SYMMETRIC-CONJUGATE SPLITTING  
METHODS FOR EVOLUTION EQUATIONS  
OF PARABOLIC TYPE

NUMERICAL APPROXIMATION  
OF A SINGULARLY PERTURBED  
CONVECTION-DIFFUSION...

VERY HIGH-ORDER ACCURATE  
DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD  
FOR CURVED BOUNDARIES...

ORDER REDUCTION PRESENTED WHEN  
INTEGRATING LINEAR PROBLEMS  
WITH GENERAL LINEAR...

## Very high-order accurate discontinuous Galerkin method for curved boundaries with polygonal meshes

ADÉRITO ARAÚJO, MILENE SANTOS, SÍLVIA BARBEIRO, STÉPHANE CLAIN,  
RICARDO COSTA, GASPAR J. MACHADO  
CMUC, Centre of Mathematics, University of Coimbra, 3000-143 Coimbra, Portugal  
[alma@mat.uc.pt](mailto:alma@mat.uc.pt)

**Abstract:** Preserving the optimal convergence order of discontinuous Galerkin (DG) discretisations in curved domains is a critical and well-known issue. The proposed approach relies on the reconstruction for off-site data (ROD) method developed originally within the finite volume framework. The main advantages are simplicity, since only piecewise linear boundary approximations are used, and versatility, since any type of boundary condition can be imposed. The developed DG-ROD method consists in splitting the boundary conditions treatment and the leading discrete equations from a classical DG formulation into two independent solvers coupled in a simple and efficient iterative procedure. A numerical benchmark is provided to assess the capability of the method with Dirichlet and Neumann boundary conditions prescribed on curved boundaries, demonstrating that the optimal convergence order is effectively achieved.

SESIÓN ESPECIAL 19  
Resolución numérica de ecuaciones  
en derivadas parciales y aplicaciones

2D NEWTON SCHWARZ DOMAIN  
DECOMPOSITION METHOD APPLIED  
TO THE RAYLEIGH-BÉNARD...

A SCHWARZ ALTERNATING METHOD  
FOR AN EVOLUTION CONVECTION  
PROBLEM

UN MÉTODO MULTISPLITTING PARA  
LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS  
EVOLUTIVOS 2D SINGULARMENTE...

UN MÉTODO NUMÉRICO EFICIENTE  
PARA SISTEMAS PARABÓLICOS  
UNIDIMENSIONALES...

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES  
EN DERIVADAS PARCIALES POR  
ELEMENTOS FINITOS...

AVANCES RECIENTES EN EL DISEÑO  
DE MÉTODOS BIEN EQUILIBRADOS  
PARA SISTEMAS...

ESQUEMAS SEMI-IMPLÍCITOS BIEN  
EQUILIBRADOS PARA TODAS LAS  
SOLUCIONES ESTACIONARIAS...

ESQUEMAS LAGRANGIANO-  
PROYECTADOS DE TIPO IMPLÍCITO-  
EXPLÍCITO PARA LAS ECUACIONES...

ESTABILIDAD DE ALGUNAS  
RECONSTRUCCIONES DE ALTO ORDEN  
PARA LA APROXIMACIÓN DE LEYES...

MODIFIED EXPONENTIAL  
ROSENBRÖCK METHODS TO INCREASE  
THEIR ACCURACY

SYMMETRIC-CONJUGATE SPLITTING  
METHODS FOR EVOLUTION EQUATIONS  
OF PARABOLIC TYPE

NUMERICAL APPROXIMATION  
OF A SINGULARLY PERTURBED  
CONVECTION-DIFFUSION...

VERY HIGH-ORDER ACCURATE  
DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD  
FOR CURVED BOUNDARIES...

ORDER REDUCTION PRESENTED WHEN  
INTEGRATING LINEAR PROBLEMS  
WITH GENERAL LINEAR...

VIERNES, 26 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

## Order reduction presented when integrating linear problems with General Linear Methods and how to avoid it

NURIA REGUERA, ISAÍAS ALONSO-MALLO

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de Burgos

[nreguera@ubu.es](mailto:nreguera@ubu.es)

**Abstract:** General linear methods (GLMs) are a class of multistep and multistage methods used for the temporal integration of systems of ordinary differential equations. They were introduced in the literature by Burrage and Butcher [1] and have been used since then, being particular cases of GLMs some of the most common time integrators used to solve numerically ordinary differential equations, such as Runge-Kutta and linear multistep methods.

When a GLM is applied to a rigid problem, the effective order of convergence is governed by its stage order, which is less than or equal to the classical order of the method. This results in an order reduction phenomenon in all GLMs except those of high stage order.

In this work [2], we study the order reduction that arises when GLMs are used as time integrators in the method of lines to numerically solve initial boundary value problems with time-dependent boundary values. Moreover, we propose a technique with which it is possible to recover a unit of order.

### Referencias

- [1] K. Burrage, J.C. Butcher (1980). Nonlinear stability of a general class of differential equation methods. *BIT Numer. Math.* 20, 185–203.
- [2] I. Alonso-Mallo, N. Reguera (2024). Avoiding order reduction phenomenon for general linear methods when integrating linear problems with time dependent boundary values. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 439.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
13:30 – 14:00

SESIÓN ESPECIAL 19  
Resolución numérica de ecuaciones  
en derivadas parciales y aplicaciones

2D NEWTON SCHWARZ DOMAIN  
DECOMPOSITION METHOD APPLIED  
TO THE RAYLEIGH-BÉNARD...

A SCHWARZ ALTERNATING METHOD  
FOR AN EVOLUTION CONVECTION  
PROBLEM

UN MÉTODO MULTISPLITTING PARA  
LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS  
EVOLUTIVOS 2D SINGULARMENTE...

UN MÉTODO NUMÉRICO EFICIENTE  
PARA SISTEMAS PARABÓLICOS  
UNIDIMENSIONALES...

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES  
EN DERIVADAS PARCIALES POR  
ELEMENTOS FINITOS...

AVANCES RECIENTES EN EL DISEÑO  
DE MÉTODOS BIEN EQUILIBRADOS  
PARA SISTEMAS...

ESQUEMAS SEMI-IMPLÍCITOS BIEN  
EQUILIBRADOS PARA TODAS LAS  
SOLUCIONES ESTACIONARIAS...

ESQUEMAS LAGRANGIANO-  
PROYECTADOS DE TIPO IMPLÍCITO-  
EXPLÍCITO PARA LAS ECUACIONES...

ESTABILIDAD DE ALGUNAS  
RECONSTRUCCIONES DE ALTO ORDEN  
PARA LA APROXIMACIÓN DE LEYES...

MODIFIED EXPONENTIAL  
ROSENBROCK METHODS TO INCREASE  
THEIR ACCURACY

SYMMETRIC-CONJUGATE SPLITTING  
METHODS FOR EVOLUTION EQUATIONS  
OF PARABOLIC TYPE

NUMERICAL APPROXIMATION  
OF A SINGULARLY PERTURBED  
CONVECTION-DIFFUSION...

VERY HIGH-ORDER ACCURATE  
DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD  
FOR CURVED BOUNDARIES...

ORDER REDUCTION PRESENTED WHEN  
INTEGRATING LINEAR PROBLEMS  
WITH GENERAL LINEAR...

## SESIÓN ESPECIAL 20

### Diseño óptimo de experimentos

#### Organizadores:

EDGAR BENÍTEZ SASTOQUE  
(Universidad de Navarra)

CARLOS DE LA CALLE ARROYO  
(Universidad de Navarra)

ÁLVARO CÍA MINA  
(Universidad de Navarra)

#### Descripción:

En la sesión sobre Diseño Óptimo de Experimentos se abordarán aplicaciones de esta rama, como la optimización del muestreo en experimentos clásicos. También se discuten enfoques novedosos como la teoría de campos múltiples aleatorios y el submuestreo secuencial en línea para modelos de predicción en el contexto de grandes cantidades de datos.

SESIÓN ESPECIAL 20  
Diseño óptimo de experimentos

MODELLING ETHANOL  
PHARMACOKINETICS: FROM SINGLE  
TO MULTIPLE INTAKES...

OPTIMIZATION OF LIGHT CURVES TO  
DETERMINE THE PERIOD-LUMINOSITY  
RELATION

MULTI-RANDOM FIELD THEORY FOR  
OPTIMAL EXPERIMENTAL DESIGN  
WITH REPEATED MEASUREMENTS

SEQUENTIAL ONLINE SUBSAMPLING  
FOR PREDICTION WITH RANDOM  
COVARIATES

## Modelling ethanol pharmacokinetics: from single to multiple intakes and D-optimal designs

IRENE MARIÑAS-COLLADO, JUAN M. RODRÍGUEZ-DÍAZ,  
M. TERESA SANTOS-MARTÍN

Departamento de Estadística e Investigación Operativa y Didáctica de la Matemática,  
Universidad de Oviedo  
[marinasirene@uniovi.es](mailto:marinasirene@uniovi.es)

**Abstract:** Traditional models for estimating blood alcohol concentration (BAC) tend to oversimplify the complex process of alcohol metabolism and ignore the staggered intake patterns often observed in real life. We propose a new model that takes into account multiple alcohol intake. D-optimal designs are calculated for this model, depending on the time of initial values of the model parameters including the time at which the second intake occurs.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 20  
Diseño óptimo de experimentos

MODELLING ETHANOL  
PHARMACOKINETICS: FROM SINGLE  
TO MULTIPLE INTAKES...

OPTIMIZATION OF LIGHT CURVES TO  
DETERMINE THE PERIOD-LUMINOSITY  
RELATION

MULTI-RANDOM FIELD THEORY FOR  
OPTIMAL EXPERIMENTAL DESIGN  
WITH REPEATED MEASUREMENTS

SEQUENTIAL ONLINE SUBSAMPLING  
FOR PREDICTION WITH RANDOM  
COVARIATES

## Optimization of light curves to determine the period-luminosity relation

GUILLERMO SÁNCHEZ-LEÓN, JUAN M. RODRÍGUEZ-DÍAZ

University of Salamanca

[guillermo@usal.es](mailto:guillermo@usal.es)

**Abstract:** Light curves measure the variation in the luminosity of a celestial body. A typical example is the calculation of the rotation periods of a binary system. An eclipsing binary consists of two close stars moving in an orbit such as, in relation to Earth, the light of one can sometimes be hidden behind the other. In an eclipsing binary system we can distinguish the repeating phases of an eclipse: without eclipse, partial eclipse, and total eclipse. The same method can be used to calculate the rotation period of an irregular asteroid whose luminosity varies with rotation. Building an experimental light curve consists of measuring the luminosity at different times. We aim to find an optimal design to choose the best moments where the measurement should be taken. The problem is that the design must take into account that the measurements can only be taken at certain known time intervals (during the night) and that the measurements are also conditioned by meteorological conditions, which is a random component.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

SESIÓN ESPECIAL 20  
Diseño óptimo de experimentos

MODELLING ETHANOL  
PHARMACOKINETICS: FROM SINGLE  
TO MULTIPLE INTAKES...

OPTIMIZATION OF LIGHT CURVES TO  
DETERMINE THE PERIOD-LUMINOSITY  
RELATION

MULTI-RANDOM FIELD THEORY FOR  
OPTIMAL EXPERIMENTAL DESIGN  
WITH REPEATED MEASUREMENTS

SEQUENTIAL ONLINE SUBSAMPLING  
FOR PREDICTION WITH RANDOM  
COVARIATES

## Multi-Random Field Theory for Optimal Experimental Design with Repeated Measurements

EDGAR BENITEZ, JESÚS LÓPEZ-FIDALGO

DATAI (Tecnun), Universidad de Navarra

[ebenitez@unav.es](mailto:ebenitez@unav.es)

**Abstract:** In 2020, over 19 million cases of cancer were estimated, with 10 million resulting in fatalities. The pursuit of treatments to decelerate tumor progression remains a pivotal research area. Empirical models in pre-clinical stages assess treatment effects, showing results adequately correlating with human exposure at therapeutic dosages. Nonlinear (sigmoidal) models, observing macroscopic behaviors like volume or cell count, are employed [4].

Defining optimal experimental design is crucial for valid parameter estimation inferences at a reduced cost [3]. In nonlinear models, D-optimal designs prove efficient in parameter estimation, presuming independent observations [2, 3]. However, this isn't typically the case in temporal processes like tumor growth.

In longitudinal studies, measuring the same experimental unit over time violates independence assumptions. Hughes-Oliver demonstrated that considering covariance enhances parameter estimation [2]. Nonetheless, integrating correlated structures into growth models is rare [1]. This work aims to evaluate the inclusion of correlation structures in optimal design settings and its impact on parameter estimation performance.

### Referencias

- [1] J. Lopez Fidalgo, I. M. Ortiz Rodriguez, W. K. Wong (2011). Design issues for population growth models, *Journal of Applied Statistics*, 38(3), 501-512.
- [2] J. Hughes-Oliver (1998). Optimal Designs for Nonlinear Models with Correlated Errors, *Lecture Notes-Monograph Series*, 34, 163-174.
- [3] A. Atkinson, A. Donev, R. Tobias (2007). *Optimum experimental designs*, Oxford University Press, New York, U. S. A.
- [4] M. Simeoni, P. Magni, C. Cammia, G. De Nicolao, V. Croci, E. Pesenti, M. Germani, I. Poggesi, M. Rocchetti (2004). Predictive Pharmacokinetic-Pharmacodynamic Modeling of Tumor Growth Kinetics in Xenograft Models after Administration of Anticancer Agents, *Cancer Research*, 64, 1094-1101.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

SESIÓN ESPECIAL 20  
Diseño óptimo de experimentos

MODELLING ETHANOL  
PHARMACOKINETICS: FROM SINGLE  
TO MULTIPLE INTAKES...

OPTIMIZATION OF LIGHT CURVES TO  
DETERMINE THE PERIOD-LUMINOSITY  
RELATION

MULTI-RANDOM FIELD THEORY FOR  
OPTIMAL EXPERIMENTAL DESIGN  
WITH REPEATED MEASUREMENTS

SEQUENTIAL ONLINE SUBSAMPLING  
FOR PREDICTION WITH RANDOM  
COVARIATES

## Sequential Online Subsampling for Prediction with Random Covariates

ÁLVARO CÍA-MINA, JESÚS LÓPEZ-FIDALGO

Instituto de Ciencia de los Datos e Inteligencia Artificial (DATAI), Universidad de Navarra  
[aciamina@unav.es](mailto:aciamina@unav.es)

**Abstract:** Subsampling is commonly employed to improve computation efficiency in regression models. However, existing methods primarily focus on minimizing errors in estimating parameters, whereas the main practical goal of statistical models often lies in minimizing prediction errors. This study introduces a novel approach to selecting subdata for linear models, which takes into account the distribution of covariates. Our method specifically addresses scenarios with large samples where obtaining labels for the response variable is costly. The introduction of the "J-optimality" criterion is supported by theoretical justifications and aligned with standard linear optimality criteria. The sequential approach is developed for online data, where the distribution of the covariates is unknown. As expected based on theory, our method demonstrates a reduction in prediction mean squared error compared to existing methods. Through simulations, we present empirical evidence of the performance and potential of our approach in enhancing prediction accuracy.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

SESIÓN ESPECIAL 20  
Diseño óptimo de experimentos

MODELLING ETHANOL  
PHARMACOKINETICS: FROM SINGLE  
TO MULTIPLE INTAKES...

OPTIMIZATION OF LIGHT CURVES TO  
DETERMINE THE PERIOD-LUMINOSITY  
RELATION

MULTI-RANDOM FIELD THEORY FOR  
OPTIMAL EXPERIMENTAL DESIGN  
WITH REPEATED MEASUREMENTS

SEQUENTIAL ONLINE SUBSAMPLING  
FOR PREDICTION WITH RANDOM  
COVARIATES



## SESIÓN ESPECIAL 21 Advanced numerical techniques for the solution of differential problems

### Organizers:

ANDRÉS ARRARÁS  
(Public University of Navarre)

LAURA PORTERO  
(Public University of Navarre)

CARMEN RODRIGO  
(University of Zaragoza)

### Summary:

Both ordinary and partial differential equations appear in several fields of science and technology when mathematical modelling is applied to describe multitude of phenomena. It is well known that the analytical solution of these models is not possible in most of the cases, and, therefore, numerical methods play a crucial role in order to obtain approximations of their solution in a precise and efficient way. The main aim of this session is to deal with the most recent advances in this field within the research community of our country.

**SESIÓN ESPECIAL 21**  
Advanced numerical techniques for  
the solution of differential problems

ON SPLITTING SCHEMES FOR  
COUPLED PDES

FIRST-ORDER SPACE-TIME PARALLEL  
SOLVERS FOR MATHEMATICAL  
MODELS IN BIOLOGY

MITIGATING THE REDUCTION ON THE  
CONVERGENCE ORDER IN THE TIME  
INTEGRATION OF PARABOLIC...

A MULTIPHASE POROUS MODEL OF  
THE MECHANOCHEMICAL COUPLING  
IN TUMOR GROWTH

A NEW ADAPTIVE MIXED FEM FOR  
STATIONARY CONVECTION-DIFFUSION-  
REACTION PROBLEMS

A TREFFITZ DISCONTINUOUS  
GALERKIN METHOD FOR THE TIME-  
HARMONIC WAVE PROPAGATION...

MULTIGRID SOLVERS FOR  
ISOGEOMETRIC DISCRETIZATIONS OF  
BIOT'S EQUATIONS

AN EFFICIENT SOLVER BASED ON  
MULTIGRID METHODS FOR LOGICALLY  
RECTANGULAR MESHES

NUMERICAL SOLUTION OF  
DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEMS  
SLOW-FAST

INVARIANT DOMAIN PRESERVING  
ALE APPROXIMATION OF EULER  
EQUATIONS

CONVOLUTION QUADRATURE FOR  
THE QUASILINEAR SUBDIFFUSION  
EQUATION

SUBDIVISION SCHEMES BASED ON  
LOCAL POLYNOMIAL REGRESSION

## On splitting schemes for coupled PDEs

FLORIN A. RADU

Center for Modeling of Coupled Subsurface Dynamics, University of Bergen, Bergen, Norway  
[florin.radu@uib.no](mailto:florin.radu@uib.no)

**Abstract:** Solving fully coupled partial differential equations (PDEs) is a very common and challenging task nowadays. In this work we will focus on efficient and robust splitting schemes for coupled PDEs. We will begin with a classical splitting scheme, the fixed-stress scheme [4] (the name is coming from applications in poromechanics). We will discuss its optimization, stabilization (convergence) and acceleration [2, 3, 6]. The acceleration will be based on Anderson acceleration [1]. Further, a new family of splitting schemes based on approximate Schur complement will be presented [5]. Finally, non-linear extensions of coupled PDEs will be briefly mentioned.

### References

- [1] D.G. Anderson (1965). Iterative procedures for nonlinear integral equations, *JACM*, 12(4), 547-560.
- [2] J.W. Both, M. Borregales, J.M. Nordbotten, K. Kumar, F.A. Radu (2017). Robust fixed stress splitting for Biot's equation in heterogeneous media. *Applied Math. Letters* 68, 101– 108.
- [3] J.W. Both, K. Kumar, J.M. Nordbotten, F.A. Radu (2019). Anderson accelerated fixedstress splitting schemes for consolidation of unsaturated porous media, *CAMwA* 77, 1479– 1502
- [4] K. Kim, H. Tchelepi, R. Juanes (2011). Stability and convergence of sequential methods for coupled flow and geomechanics: Fixed-stress and fixed-strain splits. *CMAME*, 200, 1591– 1606.
- [5] R. Nuca, E. Storvik, F.A. Radu, M. Icardi (2023). Splitting Schemes for Coupled Differential Equations: Block Schur-Based Approaches and Partial Jacobi Approximation. Submitted (also ArHiv 2212.11111).
- [6] E. Storvik, J. W. Both, K. Kumar, J.M. Nordbotten, F.A. Radu (2019). On the optimization of the fixed-stress splitting for Biot's equations. *IJNME*, 120, 179–194.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 21  
Advanced numerical techniques for the solution of differential problems

ON SPLITTING SCHEMES FOR COUPLED PDES

FIRST-ORDER SPACE-TIME PARALLEL SOLVERS FOR MATHEMATICAL MODELS IN BIOLOGY

MITIGATING THE REDUCTION ON THE CONVERGENCE ORDER IN THE TIME INTEGRATION OF PARABOLIC...

A MULTIPHASE POROUS MODEL OF THE MECHANOCHEMICAL COUPLING IN TUMOR GROWTH

A NEW ADAPTIVE MIXED FEM FOR STATIONARY CONVECTION-DIFFUSION-REACTION PROBLEMS

A TREFFTZ DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR THE TIME-HARMONIC WAVE PROPAGATION...

MULTIGRID SOLVERS FOR ISOGEOMETRIC DISCRETIZATIONS OF BIOT'S EQUATIONS

AN EFFICIENT SOLVER BASED ON MULTIGRID METHODS FOR LOGICALLY RECTANGULAR MESHES

NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEMS SLOW-FAST

INVARIANT DOMAIN PRESERVING ALE APPROXIMATION OF EULER EQUATIONS

CONVOLUTION QUADRATURE FOR THE QUASILINEAR SUBDIFFUSION EQUATION

SUBDIVISION SCHEMES BASED ON LOCAL POLYNOMIAL REGRESSION

## First-order space-time parallel solvers for mathematical models in biology

I. JIMENEZ-CIGA, A. ARRARÁS, F.J. GASPAR, L. PORTERO

Department of Statistics, Computer Science, and Mathematics, Public University of Navarre

[ingo.jimenez@unavarra.es](mailto:ingo.jimenez@unavarra.es)

**Abstract:** In the framework of large and costly integration of differential problems, parallel computing has become a useful strategy, which permits to obtain faster results and avoids the limitations of speed of sequential computation. Concerning time-dependent partial differential equations, space parallelization could be considered as a first approach. However, if a large number of processors is available, space-time parallel methods are significantly more efficient as regards the optimal implementation of parallelization techniques.

In this work, we present four space-time parallel schemes based on the parareal method (cf. [3]). This algorithm considers two propagators, one of them inaccurate and inexpensive that works sequentially, and the other one accurate and expensive, which is implemented in parallel. In particular, we consider splitting techniques for both propagators, which, with a suitable partition of the problem, can be parallelized in space. In this framework, we select two first-order splitting time integrators for the solution of the partitioned problem, namely: the fractional implicit Euler scheme, formulated in [2], and the Douglas-Rachford method, proposed in [1].

We show stability and convergence properties of the resulting methods, together with some applications to reaction-diffusion problems in the context of mathematical biology models which require accurate solution techniques.

### References

- [1] J. Douglas Jr., H.H. Rachford (1956). On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 8(2), 421–439.
- [2] W. Hundsdorfer, J. Verwer (2003). *Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations*. Springer Ser. Comput. Maths., vol. 33, Springer-Verlag.
- [3] J.L. Lions, Y. Maday, G. Turinici (2001). Résolution d'EDP par un schéma en temps "pararéel". *C. R. Acad. Sci. (1) – Math.*, 332(7), 661-668.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

SESIÓN ESPECIAL 21  
Advanced numerical techniques for the solution of differential problems

ON SPLITTING SCHEMES FOR COUPLED PDES

FIRST-ORDER SPACE-TIME PARALLEL SOLVERS FOR MATHEMATICAL MODELS IN BIOLOGY

MITIGATING THE REDUCTION ON THE CONVERGENCE ORDER IN THE TIME INTEGRATION OF PARABOLIC...

A MULTIPHASE POROUS MODEL OF THE MECHANOCHEMICAL COUPLING IN TUMOR GROWTH

A NEW ADAPTIVE MIXED FEM FOR STATIONARY CONVECTION-DIFFUSION-REACTION PROBLEMS

A TREFFITZ DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR THE TIME-HARMONIC WAVE PROPAGATION...

MULTIGRID SOLVERS FOR ISOGEOMETRIC DISCRETIZATIONS OF BIOT'S EQUATIONS

AN EFFICIENT SOLVER BASED ON MULTIGRID METHODS FOR LOGICALLY RECTANGULAR MESHES

NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEMS SLOW-FAST

INVARIANT DOMAIN PRESERVING ALE APPROXIMATION OF EULER EQUATIONS

CONVOLUTION QUADRATURE FOR THE QUASILINEAR SUBDIFFUSION EQUATION

SUBDIVISION SCHEMES BASED ON LOCAL POLYNOMIAL REGRESSION

## Mitigating the reduction on the convergence order in the time integration of parabolic problems with splitting methods

S. GONZÁLEZ-PINTO, D. HERNÁNDEZ-ABREU

Department Análisis Matemático, University La Laguna

[spinto@ull.edu.es](mailto:spinto@ull.edu.es)

**Abstract:** We consider a technique to mitigate the order reduction in the convergence order (PDE-convergence order) of some splitting methods applied to the time integration of multidimensional parabolic problems under time dependent Robin boundary conditions. The splitting considered is directional and the methods of ADI type (alternating directions implicit), in particular we focus on AMF-W-methods. Interesting references on the subject are [1, Chapter IV], [2, 3].

### References

- [1] W. Hundsdorfer, J. G. Verwer (2003, 2007), Numerical solution of time-dependent advection diffusion reaction equations, Springer Ser. Comput. Math. 33, Springer, Berlin.
- [2] S. González Pinto, E. Hairer, D. Hernández-Abreu, S. Pérez-Rodríguez. AMF-type W-methods for parabolic problems with mixed derivatives (2018), Siam J. Sci. Comput., 40, No. 5, pp. A2905–A2929, 2018.
- [3] S. González Pinto, D. Hernández-Abreu, S. Pérez-Rodríguez (Accepted August 2023). Boundary corrections on multi-dimensional PDEs, Numerical Algorithms, [doi.org/10.1007/s11075-023-01655-1](https://doi.org/10.1007/s11075-023-01655-1).

JUEVES, 25 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

SESIÓN ESPECIAL 21  
Advanced numerical techniques for the solution of differential problems

ON SPLITTING SCHEMES FOR COUPLED PDES

FIRST-ORDER SPACE-TIME PARALLEL SOLVERS FOR MATHEMATICAL MODELS IN BIOLOGY

MITIGATING THE REDUCTION ON THE CONVERGENCE ORDER IN THE TIME INTEGRATION OF PARABOLIC...

A MULTIPHASE POROUS MODEL OF THE MECHANOCHEMICAL COUPLING IN TUMOR GROWTH

A NEW ADAPTIVE MIXED FEM FOR STATIONARY CONVECTION-DIFFUSION-REACTION PROBLEMS

A TREFFITZ DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR THE TIME-HARMONIC WAVE PROPAGATION...

MULTIGRID SOLVERS FOR ISOGEOMETRIC DISCRETIZATIONS OF BIOT'S EQUATIONS

AN EFFICIENT SOLVER BASED ON MULTIGRID METHODS FOR LOGICALLY RECTANGULAR MESHES

NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEMS SLOW-FAST

INVARIANT DOMAIN PRESERVING ALE APPROXIMATION OF EULER EQUATIONS

CONVOLUTION QUADRATURE FOR THE QUASILINEAR SUBDIFFUSION EQUATION

SUBDIVISION SCHEMES BASED ON LOCAL POLYNOMIAL REGRESSION

## A multiphase porous model of the mechanochemical coupling in tumor growth

E. JAVIERRE, M.T. SÁNCHEZ, F.J. GASPAS, C. RODRIGO

Department of Applied Mathematics, University of Zaragoza, Zaragoza, Spain

etelvina@unizar.es

**Abstract:** The progression of cancer is characterized by alterations in cellular responses to both chemical and mechanical signals, together with changes in the mechanical properties of the extracellular matrix (ECM) components of the host tissue and the tumor mass [1]. The forces and stresses created during tumor growth compress the blood and lymphatic vessels leading to poor tissue perfusion and resulting in hypoxia and elevated interstitial fluid pressure. This in turn may promote the recruitment of pro-tumor cells, but also impairs the efficacy of drug therapy. In this context, the development of predictive mathematical models are of great importance to help in the understanding of the intricate mechanochemical coupling regulating tumor growth.

In this work, we regard the tissue as a two-dimensional multiphase porous material that consists of the extracellular matrix, tumoral cells, healthy cells and interstitial fluid. The solid matrix is modelled as an elastic material, and the cellular activity is regulated by the solid stress generated by tumor growth and the oxygen availability. We will discuss stable finite element discretizations for the resulting coupled problem, and we will present numerical results that illustrate the growth of tumors under free and constrained conditions.

### References

- [1] J.M. Northcott, I.S. Dean, J.K. Mouw, V.M. Weaver (2018). Feeling Stress: The Mechanics of Cancer Progression and Aggression. *Frontiers in Cell and Developmental Biology*, 6:17.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

SESIÓN ESPECIAL 21  
Advanced numerical techniques for the solution of differential problems

ON SPLITTING SCHEMES FOR COUPLED PDES

FIRST-ORDER SPACE-TIME PARALLEL SOLVERS FOR MATHEMATICAL MODELS IN BIOLOGY

MITIGATING THE REDUCTION ON THE CONVERGENCE ORDER IN THE TIME INTEGRATION OF PARABOLIC...

A MULTIPHASE POROUS MODEL OF THE MECHANO-CHEMICAL COUPLING IN TUMOR GROWTH

A NEW ADAPTIVE MIXED FEM FOR STATIONARY CONVECTION-DIFFUSION-REACTION PROBLEMS

A TREFFITZ DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR THE TIME-HARMONIC WAVE PROPAGATION...

MULTIGRID SOLVERS FOR ISOGEOMETRIC DISCRETIZATIONS OF BIOT'S EQUATIONS

AN EFFICIENT SOLVER BASED ON MULTIGRID METHODS FOR LOGICALLY RECTANGULAR MESHES

NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEMS SLOW-FAST

INVARIANT DOMAIN PRESERVING ALE APPROXIMATION OF EULER EQUATIONS

CONVOLUTION QUADRATURE FOR THE QUASILINEAR SUBDIFFUSION EQUATION

SUBDIVISION SCHEMES BASED ON LOCAL POLYNOMIAL REGRESSION

## A new adaptive mixed FEM for stationary convection-diffusion-reaction problems

MARÍA GONZÁLEZ TABOADA, MARY CHRISSELDA ANTONY OLIVER

Department of Mathematics, University of A Coruña

[maria.gonzalez.taboada@udc.es](mailto:maria.gonzalez.taboada@udc.es)

**Abstract:** We study the approximation of a stationary convection-diffusion-reaction model by a non-stationary problem. We propose a numerical method that combines the method of characteristics with an augmented mixed finite element procedure. We show that this scheme has a unique solution, derive a residual-based a posteriori error indicator, and prove its reliability and local efficiency. Finally, we provide some numerical experiments that illustrate the performance of the adaptive algorithm.

### References

- [1] M.C. Antony Oliver, M. González (2023). Adaptive mixed FEM combined with the method of characteristics for stationary convection–diffusion–reaction problems. *Finite Elements in Analysis and Design*, 227, 104045.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

SESIÓN ESPECIAL 21  
Advanced numerical techniques for the solution of differential problems

ON SPLITTING SCHEMES FOR  
COUPLED PDES

FIRST-ORDER SPACE-TIME PARALLEL  
SOLVERS FOR MATHEMATICAL  
MODELS IN BIOLOGY

MITIGATING THE REDUCTION ON THE  
CONVERGENCE ORDER IN THE TIME  
INTEGRATION OF PARABOLIC...

A MULTIPHASE POROUS MODEL OF  
THE MECHANOCHEMICAL COUPLING  
IN TUMOR GROWTH

A NEW ADAPTIVE MIXED FEM FOR  
STATIONARY CONVECTION-DIFFUSION-  
REACTION PROBLEMS

A TREFFITZ DISCONTINUOUS  
GALERKIN METHOD FOR THE TIME-  
HARMONIC WAVE PROPAGATION...

MULTIGRID SOLVERS FOR  
ISOGOMETRIC DISCRETIZATIONS OF  
BIOT'S EQUATIONS

AN EFFICIENT SOLVER BASED ON  
MULTIGRID METHODS FOR LOGICALLY  
RECTANGULAR MESHES

NUMERICAL SOLUTION OF  
DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEMS  
SLOW-FAST

INVARIANT DOMAIN PRESERVING  
ALE APPROXIMATION OF EULER  
EQUATIONS

CONVOLUTION QUADRATURE FOR  
THE QUASILINEAR SUBDIFFUSION  
EQUATION

SUBDIVISION SCHEMES BASED ON  
LOCAL POLYNOMIAL REGRESSION

## A Trefftz Discontinuous Galerkin method for the time-harmonic wave propagation in a waveguide

V. SELGAS, M. PENA, P. MONK

Department of Mathematics, University of Oviedo

[selgasvirginia@uniovi.es](mailto:selgasvirginia@uniovi.es)

**Abstract:** We investigate numerically the propagation of time-harmonic waves along an unbounded waveguide for medium and large piecewise constant wavenumbers. We do so based on a Trefftz Discontinuous Galerkin (TDG) formulation which we discretize with the superposition of travelling plane waves.

We first rewrite the problem on a bounded computational domain by using the Neumann-to-Dirichlet map on the artificial walls. This truncated problem is formulated variationally in a DG way, that is, the interelement continuity is imposed weakly within the variational formulation by introducing suitable numerical fluxes. We choose standard numerical fluxes for internal faces and some more exotic numerical fluxes for faces on the truncation boundary. We then get a consistent and coercive formulation which achieves quasi-optimal convergence when discretized with Trefftz elements. We also provide a priori error bounds for the discretization based on plane waves.

The behavior of the numerical solutions and their order of convergence is verified and illustrated in two dimensions with numerical experiments, including for the special case of the Ultra Weak Variational Formulation (UWVF). In particular, these experiments allow us to investigate the instability and ill-conditioning inherent in plane wave-based Trefftz methods, and if this issue can be overcome in practice with suitable regularization techniques.

### References

- [1] S. Kapitani, P. Monk, V. Selgas (2020). A Trefftz Discontinuous Galerkin method for time-harmonic waves with a generalized impedance boundary condition. *Applicable Analysis*, 99(3), 379-406.
- [2] A. Moiola, R. Hiptmair, I. Perugia (2011). Plane wave approximation of homogeneous Helmholtz solutions, *Z. Angew. Math. Phys.*, 62(5), 809-837.
- [3] P. Monk, D.Q. Wang (1999). A least-squares method for the Helmholtz equation. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 175, 121-136.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 21  
Advanced numerical techniques for the solution of differential problems

ON SPLITTING SCHEMES FOR COUPLED PDES

FIRST-ORDER SPACE-TIME PARALLEL SOLVERS FOR MATHEMATICAL MODELS IN BIOLOGY

MITIGATING THE REDUCTION ON THE CONVERGENCE ORDER IN THE TIME INTEGRATION OF PARABOLIC...

A MULTIPHASE POROUS MODEL OF THE MECHANOCHEMICAL COUPLING IN TUMOR GROWTH

A NEW ADAPTIVE MIXED FEM FOR STATIONARY CONVECTION-DIFFUSION-REACTION PROBLEMS

A TREFFTZ DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR THE TIME-HARMONIC WAVE PROPAGATION...

MULTIGRID SOLVERS FOR ISOGEOMETRIC DISCRETIZATIONS OF BIOT'S EQUATIONS

AN EFFICIENT SOLVER BASED ON MULTIGRID METHODS FOR LOGICALLY RECTANGULAR MESHES

NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEMS SLOW-FAST

INVARIANT DOMAIN PRESERVING ALE APPROXIMATION OF EULER EQUATIONS

CONVOLUTION QUADRATURE FOR THE QUASILINEAR SUBDIFFUSION EQUATION

SUBDIVISION SCHEMES BASED ON LOCAL POLYNOMIAL REGRESSION

## Multigrid solvers for isogeometric discretizations of Biot's equations

ÁLVARO PÉ DE LA RIVA, CARMEN RODRIGO CARDIEL, FRANCISCO J. GASPAR LORENZ

Department of Applied Mathematics, University of Zaragoza  
apedelariva@unizar.es, carmenr@unizar.es, fjpgaspar@unizar.es

**Abstract:** Isogeometric analysis (IGA) is a numerical technique based on applying spline-type basis functions for both discretization of partial differential equations (PDEs) and the construction of computational domains. Thus, we propose the use of IGA for discretization of the poroelastic Biot's equations that model the soil consolidation process. Given that large-sparse linear systems arise from the discretization of Biot's equations, it is a key point to apply efficient solvers with a desirable robust convergent behavior such as multigrid methods. Indeed, these methods are among the fastest algorithms for the numerical solution of PDEs. At this point, Biot's equations can be solved via coupled or decoupled solvers. In this work, we are interested in the performance of multigrid methods when they are applied as coupled solvers. Hence, we propose the use of monolithic multigrid methods based on coupled and decoupled smoothers. For the latter approach, we will apply an inexact version of the fixed-stress split method as decoupled smoother based on additive Schwarz methods.

### References

- [1] J. Austin Cottrell, T. J.R. Hughes, Y. Bazilevs (2009). *Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA*. 1st. Wiley Publishing. ISBN: 0470748737.
- [2] F. J. Gaspar, C. Rodrigo (2017). On the fixed-stress split scheme as smoother in multigrid methods for coupling flow and geomechanics. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 326, pp. 526–540. ISSN: 0045-7825. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.08.025>.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 21  
Advanced numerical techniques for the solution of differential problems

ON SPLITTING SCHEMES FOR  
COUPLED PDES

FIRST-ORDER SPACE-TIME PARALLEL  
SOLVERS FOR MATHEMATICAL  
MODELS IN BIOLOGY

MITIGATING THE REDUCTION ON THE  
CONVERGENCE ORDER IN THE TIME  
INTEGRATION OF PARABOLIC...

A MULTIPHASE POROUS MODEL OF  
THE MECHANOCHEMICAL COUPLING  
IN TUMOR GROWTH

A NEW ADAPTIVE MIXED FEM FOR  
STATIONARY CONVECTION-DIFFUSION-  
REACTION PROBLEMS

A TREFFTZ DISCONTINUOUS  
GALERKIN METHOD FOR THE TIME-  
HARMONIC WAVE PROPAGATION...

MULTIGRID SOLVERS FOR  
ISOGEOMETRIC DISCRETIZATIONS OF  
BIOT'S EQUATIONS

AN EFFICIENT SOLVER BASED ON  
MULTIGRID METHODS FOR LOGICALLY  
RECTANGULAR MESHES

NUMERICAL SOLUTION OF  
DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEMS  
SLOW-FAST

INVARIANT DOMAIN PRESERVING  
ALE APPROXIMATION OF EULER  
EQUATIONS

CONVOLUTION QUADRATURE FOR  
THE QUASILINEAR SUBDIFFUSION  
EQUATION

SUBDIVISION SCHEMES BASED ON  
LOCAL POLYNOMIAL REGRESSION



## An efficient solver based on multigrid methods for logically rectangular meshes

JAVIER ZARATIEGUI, CARMEN RODRIGO, ANDRÉS ARRARÁS, LAURA PORTERO

Department of Applied Mathematics & IUMA, University of Zaragoza

[javierzu@unizar.es](mailto:javierzu@unizar.es)

**Abstract:** Multigrid methods are efficient and powerful techniques to solve the large sparse linear systems of equations arising from the discretization of partial differential equations. The reason relies on the fact that they take advantage of two important properties. On one hand, when properly applied to discrete elliptic problems, classical iterative methods have a smoothing effect on the error of the approximate solution after a few iterations. On the other hand, such a smooth error can be well approximated on a coarse grid. Thus, it becomes computationally less expensive to solve the error equation on the coarse grid and then interpolate the solution to the fine mesh in order to correct the original approximation (cf. [3]). In this context, the application of monolithic multigrid methods for problems where logically rectangular meshes are considered plays an important role. This is due to the fact that this type of meshes can take advantage of recent computer architectures that achieve their best performance when structured data are used. In this work, we propose a multigrid solver based on logically rectangular meshes for different problems: multipoint flux approximations of the Darcy problem for single-phase flow in single and double porosity rigid porous media (cf. [1]), and a multipoint stress approximation of the elasticity problem (cf. [2]). Finally, the robustness of the proposed solver is illustrated through a collection of numerical experiments for the aforementioned problems.

### References

- [1] A. Arrarás, F.J. Gaspar, L. Portero, C. Rodrigo (2021). Multigrid solvers for multipoint flux approximations of the Darcy problem on rough quadrilateral grids. *Comput. Geosci.*, 25, 715-730.
- [2] I. Ambartsumyan, E. Khattatov, J.M.Nordbotten, I. Yotov (2021). A multipoint stress mixed finite element method for elasticity on quadrilateral grids. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 37, 1886-1915.
- [3] U. Trottenberg, C.W. Oosterlee, A. Schüller (2001). *Multigrid*. Academic Press, San Diego.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

SESIÓN ESPECIAL 21  
Advanced numerical techniques for the solution of differential problems

ON SPLITTING SCHEMES FOR COUPLED PDES

FIRST-ORDER SPACE-TIME PARALLEL SOLVERS FOR MATHEMATICAL MODELS IN BIOLOGY

MITIGATING THE REDUCTION ON THE CONVERGENCE ORDER IN THE TIME INTEGRATION OF PARABOLIC...

A MULTIPHASE POROUS MODEL OF THE MECHANOCHEMICAL COUPLING IN TUMOR GROWTH

A NEW ADAPTIVE MIXED FEM FOR STATIONARY CONVECTION-DIFFUSION-REACTION PROBLEMS

A TREFFITZ DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR THE TIME-HARMONIC WAVE PROPAGATION...

MULTIGRID SOLVERS FOR ISOGEOMETRIC DISCRETIZATIONS OF BIOT'S EQUATIONS

AN EFFICIENT SOLVER BASED ON MULTIGRID METHODS FOR LOGICALLY RECTANGULAR MESHES

NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEMS SLOW-FAST

INVARIANT DOMAIN PRESERVING ALE APPROXIMATION OF EULER EQUATIONS

CONVOLUTION QUADRATURE FOR THE QUASILINEAR SUBDIFFUSION EQUATION

SUBDIVISION SCHEMES BASED ON LOCAL POLYNOMIAL REGRESSION

## Numerical Solution of Differential Equations Systems Slow-Fast

MACARENA GÓMEZ MÁRMOL, A. BANDERA MORENO, L. BONAVENTURA,  
S. FERNÁNDEZ GARCÍA

Department Differential Equations and Numerical Analysis, University of Seville  
[macarena@us.es](mailto:macarena@us.es)

**Abstract:** In different fields of science such as biology, engineering, medicine, etc., phenomena appear that involve several variables whose dynamics occur at different time scales. These phenomena can be modelled using systems of differential equations, where the characteristic times of the variables are different. These systems are known as slow-fast systems.

Most of these systems are quite complex and can contain a large number of equations, making analytical solutions unfeasible. From the point of view of mathematical analysis, a whole theory relating to this type of systems has been studied for some decades, specifically studying systems of a dynamic type and carrying out a study of possible bifurcations, invariants, etc.

We are interested in calculating numerical approximations of the solutions of such problems. From the point of view of numerical analysis, these problems present a number of important difficulties. The fact that they have very different time scales leads us to solve stiff problems, which requires the use of specific methods for this type of problem. Usually, these methods are coupled with conditions on the time step that can be used to maintain stability, i.e. the time step must be chosen to make the scheme stable and not for reasons of accuracy. Therefore, it is necessary to use specific methods designed for this type of problem.

On the other hand, the large number of equations that the system has, leads us to use techniques that reduce the effective calculation in the simulation in order to obtain approximations in reasonable times, in our case we will use reduced order method techniques.

### References

- [1] A. Bandera, S. Fernández-García, M. Gómez Mármol, A. Vidal (2022). A multiple timescale network model of intracellular calcium concentrations in coupled neurons: insights from ROM simulations. *Math. Model, Nat. Phenom.*, 17, Paper No. 11, 26 pp.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 21  
Advanced numerical techniques for the solution of differential problems

ON SPLITTING SCHEMES FOR COUPLED PDES

FIRST-ORDER SPACE-TIME PARALLEL SOLVERS FOR MATHEMATICAL MODELS IN BIOLOGY

MITIGATING THE REDUCTION ON THE CONVERGENCE ORDER IN THE TIME INTEGRATION OF PARABOLIC...

A MULTIPHASE POROUS MODEL OF THE MECHANOCHEMICAL COUPLING IN TUMOR GROWTH

A NEW ADAPTIVE MIXED FEM FOR STATIONARY CONVECTION-DIFFUSION-REACTION PROBLEMS

A TREFFTZ DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR THE TIME-HARMONIC WAVE PROPAGATION...

MULTIGRID SOLVERS FOR ISOGEOMETRIC DISCRETIZATIONS OF BIOT'S EQUATIONS

AN EFFICIENT SOLVER BASED ON MULTIGRID METHODS FOR LOGICALLY RECTANGULAR MESHES

NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEMS SLOW-FAST

INVARIANT DOMAIN PRESERVING ALE APPROXIMATION OF EULER EQUATIONS

CONVOLUTION QUADRATURE FOR THE QUASILINEAR SUBDIFFUSION EQUATION

SUBDIVISION SCHEMES BASED ON LOCAL POLYNOMIAL REGRESSION

## Invariant domain preserving ALE approximation of Euler equations

L. SAAVEDRA, B. CLAYTON, J.-L. GUERMOND, B. POPOV

Dpto. de Matemática Aplicada a la Ingeniería Aeroespacial, Universidad Politécnica de Madrid  
[laura.saavedra@upm.es](mailto:laura.saavedra@upm.es)

**Abstract:** Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) techniques mix the advantages of classical Lagrangian hydrodynamics methods while minimizing their shortcomings. We have developed ALE methods (see [1, 2, 3]) to solve nonlinear hyperbolic systems while preserving invariant domains. Our ALE methods are based on continuous finite elements and explicit time stepping and are stabilized by means of graph-based artificial viscosity. First, we propose a first-order artificial viscosity that does not require any ad hoc parameters and results in precise invariant domain properties and entropy inequalities. Second, we describe a high-order method that preserves the invariant domains by combining the first-order method with an entropy-consistent high-order method via a convex limiting process.

Building upon the previously established discretization framework, I will introduce an explicit Lagrangian approximation technique for the compressible Euler equations. I will illustrate numerically the robustness of those methods on various benchmark problems.

### References

- [1] J.-L. Guermond, B. Popov, L. Saavedra, Y. Yang (2017). Invariant domains preserving arbitrary Lagrangian Eulerian approximation of hyperbolic systems with continuous finite elements. *SIAM J. Sci. Comput.*, 39(2):A385-A414.
- [2] J.-L. Guermond, B. Popov, L. Saavedra (2020). Second-order invariant domain preserving ale approximation of hyperbolic systems. *J. Comput. Phys.*, 401:108927.
- [3] J.-L. Guermond, B. Popov, L. Saavedra (2021). Second-Order Invariant Domain Preserving ALE Approximation of Euler Equations. *Commun. Appl. Math. Comput.*

VIERNES, 26 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

SESIÓN ESPECIAL 21  
Advanced numerical techniques for the solution of differential problems

ON SPLITTING SCHEMES FOR COUPLED PDES

FIRST-ORDER SPACE-TIME PARALLEL SOLVERS FOR MATHEMATICAL MODELS IN BIOLOGY

MITIGATING THE REDUCTION ON THE CONVERGENCE ORDER IN THE TIME INTEGRATION OF PARABOLIC...

A MULTIPHASE POROUS MODEL OF THE MECHANOCHEMICAL COUPLING IN TUMOR GROWTH

A NEW ADAPTIVE MIXED FEM FOR STATIONARY CONVECTION-DIFFUSION-REACTION PROBLEMS

A TREFFTZ DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR THE TIME-HARMONIC WAVE PROPAGATION...

MULTIGRID SOLVERS FOR ISOGEOMETRIC DISCRETIZATIONS OF BIOT'S EQUATIONS

AN EFFICIENT SOLVER BASED ON MULTIGRID METHODS FOR LOGICALLY RECTANGULAR MESHES

NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEMS SLOW-FAST

INVARIANT DOMAIN PRESERVING ALE APPROXIMATION OF EULER EQUATIONS

CONVOLUTION QUADRATURE FOR THE QUASILINEAR SUBDIFFUSION EQUATION

SUBDIVISION SCHEMES BASED ON LOCAL POLYNOMIAL REGRESSION

## Convolution Quadrature for the quasilinear subdiffusion equation

M. LOPEZ-FERNANDEZ, L. PLOCINICZAK

Department of Mathematical Analysis, Statistics and O.R., and Applied Mathematics,  
University of Malaga  
[maria.lopezf@uma.es](mailto:maria.lopezf@uma.es)

**Abstract:** We construct a Convolution Quadrature (CQ) scheme for the quasilinear subdiffusion equation and supply it with the fast and oblivious implementation. We find a condition for the CQ to be admissible and discretize the spatial part of the equation with the Finite Element Method. We prove the unconditional stability and convergence of the scheme and find a bound on the error. As a passing result, we also obtain a discrete Grönwall inequality for the CQ, which is a crucial ingredient of our convergence proof based on the energy method. We show numerical results which verify our convergence theory and show computational time reduction when using fast and oblivious quadrature.

**Acknowledgments:** Proyecto realizado con la Beca Leonardo a Investigadores y Creadores Culturales 2022 de la Fundación BBVA.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

SESIÓN ESPECIAL 21  
Advanced numerical techniques for  
the solution of differential problems

ON SPLITTING SCHEMES FOR  
COUPLED PDES

FIRST-ORDER SPACE-TIME PARALLEL  
SOLVERS FOR MATHEMATICAL  
MODELS IN BIOLOGY

MITIGATING THE REDUCTION ON THE  
CONVERGENCE ORDER IN THE TIME  
INTEGRATION OF PARABOLIC...

A MULTIPHASE POROUS MODEL OF  
THE MECHANOCHEMICAL COUPLING  
IN TUMOR GROWTH

A NEW ADAPTIVE MIXED FEM FOR  
STATIONARY CONVECTION-DIFFUSION-  
REACTION PROBLEMS

A TREFFITZ DISCONTINUOUS  
GALERKIN METHOD FOR THE TIME-  
HARMONIC WAVE PROPAGATION...

MULTIGRID SOLVERS FOR  
ISOGEOMETRIC DISCRETIZATIONS OF  
BIOT'S EQUATIONS

AN EFFICIENT SOLVER BASED ON  
MULTIGRID METHODS FOR LOGICALLY  
RECTANGULAR MESHES

NUMERICAL SOLUTION OF  
DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEMS  
SLOW-FAST

INVARIANT DOMAIN PRESERVING  
ALE APPROXIMATION OF EULER  
EQUATIONS

CONVOLUTION QUADRATURE FOR  
THE QUASILINEAR SUBDIFFUSION  
EQUATION

SUBDIVISION SCHEMES BASED ON  
LOCAL POLYNOMIAL REGRESSION

## Subdivision schemes based on local polynomial regression

DIONISIO F. YAÑEZ, SERGIO LÓPEZ-UREÑA

Departamento de Matemáticas, Universidad de Valencia

[dionisio.yanez@uv.es](mailto:dionisio.yanez@uv.es)

**Abstract:** The generation of curves and surfaces from given data is a well-known problem in Computer-Aided Design that can be solved by means of subdivision schemes. They are a powerful tool that allows obtaining new data from the initial one using simple calculations. In some real applications, the initial data are given with noise and interpolatory schemes are not adequate to process them. In this talk, we present some new families of binary univariate linear subdivision schemes using weighted local polynomial regression. We study their properties, such as convergence, monotonicity and polynomial reproduction and show some examples.

**Acknowledgments:** This research has been supported by project CIAICO/2021/227 (funded by Conselleria de Innovación, Universidades, Ciencia y Sociedad digital, Generalitat Valenciana) and by grant PID2020-117211GB-I00 (funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033).

VIERNES, 26 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

SESIÓN ESPECIAL 21  
Advanced numerical techniques for  
the solution of differential problems

ON SPLITTING SCHEMES FOR  
COUPLED PDES

FIRST-ORDER SPACE-TIME PARALLEL  
SOLVERS FOR MATHEMATICAL  
MODELS IN BIOLOGY

MITIGATING THE REDUCTION ON THE  
CONVERGENCE ORDER IN THE TIME  
INTEGRATION OF PARABOLIC...

A MULTIPHASE POROUS MODEL OF  
THE MECHANOCHEMICAL COUPLING  
IN TUMOR GROWTH

A NEW ADAPTIVE MIXED FEM FOR  
STATIONARY CONVECTION-DIFFUSION-  
REACTION PROBLEMS

A TREFFTZ DISCONTINUOUS  
GALERKIN METHOD FOR THE TIME-  
HARMONIC WAVE PROPAGATION...

MULTIGRID SOLVERS FOR  
ISOGOMETRIC DISCRETIZATIONS OF  
BIOT'S EQUATIONS

AN EFFICIENT SOLVER BASED ON  
MULTIGRID METHODS FOR LOGICALLY  
RECTANGULAR MESHES

NUMERICAL SOLUTION OF  
DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEMS  
SLOW-FAST

INVARIANT DOMAIN PRESERVING  
ALE APPROXIMATION OF EULER  
EQUATIONS

CONVOLUTION QUADRATURE FOR  
THE QUASILINEAR SUBDIFFUSION  
EQUATION

SUBDIVISION SCHEMES BASED ON  
LOCAL POLYNOMIAL REGRESSION

## SESIÓN ESPECIAL 22 Fair & Trustworthy Machine Learning

### Organizers:

PAULA GORDALIZA  
(Universidad Pública de Navarra)

JESÚS F. LÓPEZ-FIDALGO  
(Universidad de Navarra)

### Description:

The aim of this session is to bring together researchers who are making valuable contributions to the field of Fair and Trustworthy Machine Learning from different perspectives: optimisation, counterfactual explanations, causality, optimal transport, trimming, bayesian approach, etc.

SESIÓN ESPECIAL 22  
Fair & Trustworthy Machine Learning

FAIRNESS FOR DEEP NEURAL  
NETWORK USING OPTIMAL  
TRANSPORT

EXPANDING FAIRNESS HORIZONS:  
ENHANCING CLASSIFIER FAIRNESS  
VIA MODIFIED RISK...

ENHANCING FAIR LEARNING VIA AN  
EXTENDED TOTAL REPAIR TRANSPORT  
APPROACH

IMPACT OF NURSING HOME STATUS  
ON HEALTHCARE OUTCOMES: THE  
BASQUE COUNTRY'S...

FAIR ML STRATEGIES AND MULTI-  
SENSITIVE VARIABLES IN PRACTICE

BEYOND DEMOGRAPHIC PARITY:  
REDEFINING EQUAL TREATMENT

CUANDO LA IA SALE MAL, SESGOS  
Y DISCRIMINACIÓN

CONTRIBUTIONS OF SURROGATE  
MODELS TO MARKETPLACE PRICING  
AUDITS

## Fairness for Deep Neural Network using Optimal Transport

JEAN-MICHEL LOUBES

IMT, ANITI

[loubes@math.univ-toulouse.fr](mailto:loubes@math.univ-toulouse.fr)

**Abstract:** The increasingly common use of neural network classifiers in industrial and social applications of image analysis has allowed impressive progress these last years. Such methods are, however, sensitive to algorithmic bias, i.e., to an under- or an over-representation of positive predictions or to higher prediction errors in specific subgroups of images. We then introduce in this paper a new method to temper the algorithmic bias in Neural-Network-based classifiers. Our method is Neural-Network architecture agnostic and scales well to massive training sets of images. It indeed only overloads the loss function with a Wasserstein-2-based regularization term for which we back-propagate the impact of specific output predictions using a new model, based on the Gâteaux derivatives of the predictions distribution. This model is algorithmically reasonable and makes it possible to use our regularized loss with standard models. We apply it to bias mitigation in image and text analysis.

SESIÓN ESPECIAL 22  
Fair & Trustworthy Machine Learning

FAIRNESS FOR DEEP NEURAL NETWORK USING OPTIMAL TRANSPORT

EXPANDING FAIRNESS HORIZONS: ENHANCING CLASSIFIER FAIRNESS VIA MODIFIED RISK...

ENHANCING FAIR LEARNING VIA AN EXTENDED TOTAL REPAIR TRANSPORT APPROACH

IMPACT OF NURSING HOME STATUS ON HEALTHCARE OUTCOMES: THE BASQUE COUNTRY'S...

FAIR ML STRATEGIES AND MULTI-SENSITIVE VARIABLES IN PRACTICE

BEYOND DEMOGRAPHIC PARITY: REDEFINING EQUAL TREATMENT

CUANDO LA IA SALE MAL, SESGOS Y DISCRIMINACIÓN

CONTRIBUTIONS OF SURROGATE MODELS TO MARKETPLACE PRICING AUDITS

JUEVES, 25 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

## Expanding Fairness Horizons: Enhancing Classifier Fairness via Modified Uncertainty Sets in Robust Risk Minimization

AINHIZE BARRAIUNKUA, PAULA GORDALIZA, NOVI QUADRIANTO,  
JOSÉ ANTONIO LOZANO  
Basque Center for Applied Mathematics  
[abarrainkua@bcamath.org](mailto:abarrainkua@bcamath.org)

**Abstract:** In recent years, fairness in machine learning has become a focal point of research and practice due to the realization that algorithms can propagate biased decision-making when trained on data reflecting societal inequalities. This study presents a novel approach to enhance fairness assurances within Minimax Risk Classifiers by adapting the uncertainty set, contrasting with conventional methods that typically redefine the loss function. This innovative formulation significantly reduces the requirement for sensitive information, necessitating access to just a few instances. Notably, our empirical observations reveal that Minimax Risk Classifiers offer robust fairness guarantees, even when sensitive information remains inaccessible. This makes them a fitting choice for scenarios where the collection of such data might be illegal or individuals opt to withhold it due to privacy concerns. These findings underscore the appeal of Minimax Risk Classifiers in situations constrained by data privacy considerations.

**Acknowledgments:** This research was supported by a European Research Council (ERC) Starting Grant for the project “Bayesian Models and Algorithms for Fairness and Transparency”, funded under the European Union’s Horizon 2020 Framework Programme (grant agreement no. 851538); by the Basque Government under grant IT1504-22 and through the BERC 2022-2025 program; by the Spanish Ministry of Science and Innovation under the grants PID2022-137442NB-I00 and PID2021-128314NB-I00, and through BCAM Severo Ochoa accreditation CEX2021-001142-S/MICIN/AEI/10.13039/501100011033.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

SESIÓN ESPECIAL 22  
Fair & Trustworthy Machine Learning

FAIRNESS FOR DEEP NEURAL NETWORK USING OPTIMAL TRANSPORT

EXPANDING FAIRNESS HORIZONS: ENHANCING CLASSIFIER FAIRNESS VIA MODIFIED RISK...

ENHANCING FAIR LEARNING VIA AN EXTENDED TOTAL REPAIR TRANSPORT APPROACH

IMPACT OF NURSING HOME STATUS ON HEALTHCARE OUTCOMES: THE BASQUE COUNTRY'S...

FAIR ML STRATEGIES AND MULTI-SENSITIVE VARIABLES IN PRACTICE

BEYOND DEMOGRAPHIC PARITY: REDEFINING EQUAL TREATMENT

CUANDO LA IA SALE MAL, SESGOS Y DISCRIMINACIÓN

CONTRIBUTIONS OF SURROGATE MODELS TO MARKETPLACE PRICING AUDITS



## Enhancing Fair Learning via an extended total repair transport approach

ELENA M. DE-DIEGO, PAULA GORDALIZA, JESÚS LÓPEZ-FIDALGO

DataI, Institute of Data Science and Artificial Intelligence,  
University of Navarra TECNUN School of Engineering, University of Navarra  
[emartindedi@unav.es](mailto:emartindedi@unav.es)

**Abstract:** Automated decision-making systems are increasingly being employed in various domains such as healthcare, recruitment, and criminal justice. This has made the intersection of artificial intelligence (AI) and ethics a crucial issue in recent years. Fair learning has established itself as a very active area of research which tries to ensure that predictive algorithms are not discriminatory towards any individual at individual or group level, based on demographic characteristics. Total repair is a recent statistical method that mitigates bias by transforming original characteristics while maintaining conditional distributions with respect to the protected attribute (e.g., age). This adjustment is achieved by mapping the conditional distributions of each sensitive group to their respective Wasserstein barycenter using discrete optimal transport plans, which establish one-to-one correspondences. This fact imposes a limitation: the previously computed optimal transport maps cannot be applied to new samples. We study a computationally efficient method designed to extend the optimal transport plan between two probability distributions over Euclidean space ( $R^d$ ) to incorporate new observations without requiring a complete re-computation of the discrete optimal transport plan. Our approach leverages the concept of the auction algorithm, enabling us to establish that the computational burden associated with the minimum cycle mean problem - a pivotal step in the creation of a consistent estimation - is considerably reduced when compared to the conventional methodology employing Karp's algorithm.

**Acknowledgments:** This work was supported by the Gobierno de Navarra through the MRR Investigo 2023 program (grant no. 0011-4001-2023-000071) and by the Spanish Ministry of Science and Innovation under the grant PID2021-128314NB-I00.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

SESIÓN ESPECIAL 22  
Fair & Trustworthy Machine Learning

FAIRNESS FOR DEEP NEURAL  
NETWORK USING OPTIMAL  
TRANSPORT

EXPANDING FAIRNESS HORIZONS:  
ENHANCING CLASSIFIER FAIRNESS  
VIA MODIFIED RISK...

ENHANCING FAIR LEARNING VIA AN  
EXTENDED TOTAL REPAIR TRANSPORT  
APPROACH

IMPACT OF NURSING HOME STATUS  
ON HEALTHCARE OUTCOMES: THE  
BASQUE COUNTRY'S...

FAIR ML STRATEGIES AND MULTI-  
SENSITIVE VARIABLES IN PRACTICE

BEYOND DEMOGRAPHIC PARITY:  
REDEFINING EQUAL TREATMENT

CUANDO LA IA SALE MAL, SESGOS  
Y DISCRIMINACIÓN

CONTRIBUTIONS OF SURROGATE  
MODELS TO MARKETPLACE PRICING  
AUDITS

## Impact of nursing home status on healthcare outcomes: the Basque Country's case during the COVID-19 pandemic

HRISTO INOUZHE, IRANTZU BARRIO, PAULA GORDALIZA,  
MARÍA XOSÉ RODRÍGUEZ-ÁLVAREZ, ITXASO BENGOCHEA, JOSÉ M. QUINTANA  
Universidad Autónoma de Madrid  
[hristo.inouze@uam.es](mailto:hristo.inouze@uam.es)

**Abstract:** We explore the impact of nursing home status on healthcare outcomes such as hospitalisation, mortality and in-hospital mortality during the COVID-19 pandemic. There have been some public claims on restrictions on access to hospitals and treatments for nursing home residents during the beginning of the pandemic in some areas of Spain, which raised a public outcry about the fairness of such measures. In this work, the case of the Basque Country is studied under a rigorous statistical approach and physician's perspective. As fairness/unfairness is hard to model mathematically and has strong real-world implications, this work concentrates on the following simplification: evaluating if nursing home status had a direct effect on healthcare outcomes once accounted for other meaningful patients' information such as age, health status and period of the pandemic, among others. The methods followed here are a combination of established statistical techniques as well as new proposals from the fields of causality and fair learning. The results suggest that as a group, people in nursing homes were significantly less likely to be hospitalised, and considerably more likely to die, even in hospitals, compared to their non-residents counterparts during most of the pandemic. Further data collection and analysis are needed to guarantee that this is solely/mainly due to nursing home status.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

SESIÓN ESPECIAL 22  
Fair & Trustworthy Machine Learning

FAIRNESS FOR DEEP NEURAL  
NETWORK USING OPTIMAL  
TRANSPORT

EXPANDING FAIRNESS HORIZONS:  
ENHANCING CLASSIFIER FAIRNESS  
VIA MODIFIED RISK...

ENHANCING FAIR LEARNING VIA AN  
EXTENDED TOTAL REPAIR TRANSPORT  
APPROACH

IMPACT OF NURSING HOME STATUS  
ON HEALTHCARE OUTCOMES: THE  
BASQUE COUNTRY'S...

FAIR ML STRATEGIES AND MULTI-  
SENSITIVE VARIABLES IN PRACTICE

BEYOND DEMOGRAPHIC PARITY:  
REDEFINING EQUAL TREATMENT

CUANDO LA IA SALE MAL, SESGOS  
Y DISCRIMINACIÓN

CONTRIBUTIONS OF SURROGATE  
MODELS TO MARKETPLACE PRICING  
AUDITS

## Fair ML strategies and Multi-Sensitive variables in practice

ÁLVARO MÉNDEZ CIVIETA

Universidad Carlos III

[alvaro.mendez@uc3m.es](mailto:alvaro.mendez@uc3m.es)

**Abstract:** This presentation encompasses a comprehensive exploration of fairness in machine learning, encapsulating a detailed literature review of various fairness metric definitions and algorithmic implementations. Our research systematically assesses ten machine learning algorithms tailored for addressing bias in models when considering a single sensitive variable. Additionally, we propose a straightforward yet effective approach to extend these algorithms to accommodate multiple sensitive variables concurrently, facilitating the application of fairness in real-world scenarios.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

SESIÓN ESPECIAL 22  
Fair & Trustworthy Machine Learning

FAIRNESS FOR DEEP NEURAL  
NETWORK USING OPTIMAL  
TRANSPORT

EXPANDING FAIRNESS HORIZONS:  
ENHANCING CLASSIFIER FAIRNESS  
VIA MODIFIED RISK...

ENHANCING FAIR LEARNING VIA AN  
EXTENDED TOTAL REPAIR TRANSPORT  
APPROACH

IMPACT OF NURSING HOME STATUS  
ON HEALTHCARE OUTCOMES: THE  
BASQUE COUNTRY'S...

FAIR ML STRATEGIES AND MULTI-  
SENSITIVE VARIABLES IN PRACTICE

BEYOND DEMOGRAPHIC PARITY:  
REDEFINING EQUAL TREATMENT

CUANDO LA IA SALE MAL, SESGOS  
Y DISCRIMINACIÓN

CONTRIBUTIONS OF SURROGATE  
MODELS TO MARKETPLACE PRICING  
AUDITS

## Beyond Demographic Parity: Redefining Equal Treatment

CARLOS MOUGAN, LAURA STATE, ANTONIO FERRARA, SALVATORE RUGGIERI,  
STEFFEN STAAB  
University of Southampton  
[carmougan@gmail.com](mailto:carmougan@gmail.com)

**Abstract:** Liberalism-oriented political philosophy reasons that all individuals should be treated equally independently of their protected characteristics. Related work in machine learning has translated the concept of equal treatment into terms of equal outcome and measured it as demographic parity (also called statistical parity). Our analysis reveals that the two concepts of equal outcome and equal treatment diverge; therefore, demographic parity does not faithfully represent the notion of equal treatment. We propose a new formalization for equal treatment by (i) considering the influence of feature values on predictions, such as computed by Shapley values decomposing predictions across its features, (ii) defining distributions of explanations, and (iii) comparing explanation distributions between populations with different protected characteristics. We show the theoretical properties of our notion of equal treatment and devise a classifier two-sample test based on the AUC of an equal treatment inspector. We study our formalization of equal treatment on synthetic and natural data. We release explanationSpace, an open-source Python package with methods and tutorials.

**Acknowledgments:** This work was supported by Horizon 2020 funding from the European Union through the Marie Sk-lodowska-Curie Actions (860630) for the "No-BIAS" project.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 22  
Fair & Trustworthy Machine Learning

FAIRNESS FOR DEEP NEURAL  
NETWORK USING OPTIMAL  
TRANSPORT

EXPANDING FAIRNESS HORIZONS:  
ENHANCING CLASSIFIER FAIRNESS  
VIA MODIFIED RISK...

ENHANCING FAIR LEARNING VIA AN  
EXTENDED TOTAL REPAIR TRANSPORT  
APPROACH

IMPACT OF NURSING HOME STATUS  
ON HEALTHCARE OUTCOMES: THE  
BASQUE COUNTRY'S...

FAIR ML STRATEGIES AND MULTI-  
SENSITIVE VARIABLES IN PRACTICE

BEYOND DEMOGRAPHIC PARITY:  
REDEFINING EQUAL TREATMENT

CUANDO LA IA SALE MAL, SESGOS  
Y DISCRIMINACIÓN

CONTRIBUTIONS OF SURROGATE  
MODELS TO MARKETPLACE PRICING  
AUDITS

## Cuando la IA sale mal, sesgos y discriminación

IRIS DOMÍNGUEZ, DANIEL PATERNAIN DALLO, MIKEL GALAR IDOATE

Universidad Pública de Navarra

[iris.dominguez@unavarra.es](mailto:iris.dominguez@unavarra.es)

**Resumen:** Con el continuo despliegue de nuevas aplicaciones de Inteligencia Artificial, los problemas éticos asociados se vuelven cada vez más importantes. En esta charla revisaremos los conceptos de sesgo y discriminación desde la perspectiva de la inteligencia artificial, así como las formulaciones matemáticas y metodologías que nos permiten operativizarlos. En particular, nos centramos en la caracterización de los sesgos presentes en los datasets usados para el entrenamiento en problemas de Deep Learning, y de qué formas afectan a las predicciones de estos modelos.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

### SESIÓN ESPECIAL 22

Fair & Trustworthy Machine Learning

FAIRNESS FOR DEEP NEURAL NETWORK USING OPTIMAL TRANSPORT

EXPANDING FAIRNESS HORIZONS: ENHANCING CLASSIFIER FAIRNESS VIA MODIFIED RISK...

ENHANCING FAIR LEARNING VIA AN EXTENDED TOTAL REPAIR TRANSPORT APPROACH

IMPACT OF NURSING HOME STATUS ON HEALTHCARE OUTCOMES: THE BASQUE COUNTRY'S...

FAIR ML STRATEGIES AND MULTI-SENSITIVE VARIABLES IN PRACTICE

BEYOND DEMOGRAPHIC PARITY: REDEFINING EQUAL TREATMENT

CUANDO LA IA SALE MAL, SESGOS Y DISCRIMINACIÓN

CONTRIBUTIONS OF SURROGATE MODELS TO MARKETPLACE PRICING AUDITS

## Contributions of surrogate models to marketplace pricing audits

BENOIT ROTTEMBOURG, JEANNE MOUTON  
INRIA

[benoit.rottembourg@inria.fr](mailto:benoit.rottembourg@inria.fr)

**Abstract:** In a global context where competition authorities are investigating and sanctioning Amazon marketplace for practices of self-preferencing at the expense of their business users and consumers (Italian AGCM 2021, EU Commission 2022, UK CMA on-going since 2022, US FTC on-going since 2023), we observe a trend of imposing remedies on dominant players in digital markets. In addition, the Digital Market Act, shifting from an ex-post enforcement approach to ex-ante obligations on designated gatekeepers, is strengthening auditing power over these gatekeepers, which risk heavier penalties in the event of non-compliance. Therefore, competition authorities and regulators need tools to audit the compliance of these dominant players in the e-commerce sector over the obligations and remedies they are imposing on dynamic, and personalized algorithms. Most of these algorithms embed Machine-Learning components, introducing opacity and potentially biases in the decision-making process. The aim of our presentation is to explore the benefits of using black-box auditing techniques to provide insights into the behavior of these online algorithms. We anchor our research in the literature of product preeminence from vertically integrated players, of choice ranking, and of the specific literature related to Amazon search ranking, automatic pricing and Buy Box's algorithms. Through a study of the pricing and ranking of several thousand products on Amazon, from 2017 to 2023, we will illustrate the potential of surrogate models and the decision-support elements they might provide. We seek to outline the limits of such models, their role in guiding the auditor, and raise the question of their probative value in the DMA context.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

SESIÓN ESPECIAL 22  
Fair & Trustworthy Machine Learning

FAIRNESS FOR DEEP NEURAL  
NETWORK USING OPTIMAL  
TRANSPORT

EXPANDING FAIRNESS HORIZONS:  
ENHANCING CLASSIFIER FAIRNESS  
VIA MODIFIED RISK...

ENHANCING FAIR LEARNING VIA AN  
EXTENDED TOTAL REPAIR TRANSPORT  
APPROACH

IMPACT OF NURSING HOME STATUS  
ON HEALTHCARE OUTCOMES: THE  
BASQUE COUNTRY'S...

FAIR ML STRATEGIES AND MULTI-  
SENSITIVE VARIABLES IN PRACTICE

BEYOND DEMOGRAPHIC PARITY:  
REDEFINING EQUAL TREATMENT

CUANDO LA IA SALE MAL, SESGOS  
Y DISCRIMINACIÓN

CONTRIBUTIONS OF SURROGATE  
MODELS TO MARKETPLACE PRICING  
AUDITS

## SESIÓN ESPECIAL 23 **Mathematical Optimization: Methods and Applications**

**Organizadores:**

**VÍCTOR BLANCO**  
 (Universidad de Granada)

**MIGUEL A. POZO**  
 (Universidad de Sevilla)

**Summary:**

Mathematical Optimization deals with the minimization or maximization of one or more functions on a given feasible region. The increasing need of making decisions with large and complex datasets makes it necessary to develop new models and techniques able to deal with that information. In this session we will provide an overview of some of the recent advances in the analysis and design of mathematical models and algorithms to solve challenging problems in different fields, from logistics and transportation to machine learning.

SESIÓN ESPECIAL 23  
 Mathematical Optimization:  
 Methods and Applications

THE COOPERATIVE MAXIMUM  
 CAPTURE FACILITY LOCATION  
 PROBLEM

EFFECT OF CAPACITY CONSTRAINTS  
 AND PACKING ON THE VERTEX  
 SEPARATOR PROBLEM

CONEXIONES CON PRECIOS ÓPTIMOS

THE BI-OBJECTIVE MINIMUM-COST  
 PERFECT MATCHING PROBLEM AND  
 CHINESE POSTMAN PROBLEM

CONIC LINEAR PROGRAMMING  
 GAMES

A BILEVEL OPTIMISATION MODEL  
 FOR THE RANK PRICING PROBLEM  
 WITH TIES

A FRESH VIEW ON THE MINIMUM  
 NORMALIZED CUTS PROBLEM

THE MINIMUM CARDINALITY  
 $\Lambda$ -MEDIATED GRAPH PROBLEM

## The Cooperative Maximum Capture Facility Location Problem

RICARDO GÁZQUEZ, CONCEPCIÓN DOMÍNGUEZ, JUAN MIGUEL MORALES,

SALVADOR PINEDA

Dpto. de Estadística, Universidad Carlos III de Madrid

[ricardo.gazquez@uc3m.es](mailto:ricardo.gazquez@uc3m.es)

**Abstract:** In the Maximum Capture Facility Location (MCFL) problem with a binary choice rule, a company intends to locate a series of facilities to maximize the captured demand, and customers patronize the facility that maximizes their utility. In this talk, we generalize the MCFL problem assuming that the facilities of the decision maker act cooperatively to increase the customers' utility over the company. We propose a utility maximization rule between the captured utility of the decision maker and the opt-out utility of a competitor already installed in the market. Furthermore, we model the captured utility by means of an Ordered Median function (OMf) of the partial utilities of newly open facilities. We name this problem “the Cooperative Maximum Capture Facility Location problem” (CMCFL). The OMf serves as a means to compute the utility of each customer towards the company as an aggregation of ordered partial utilities, and constitutes a unifying framework for CMCFL models. We introduce a multiperiod non-linear bilevel formulation for the CMCFL with an embedded assignment problem characterizing the captured utilities. For this model, two exact resolution approaches are presented: a MILP reformulation with valid inequalities and an effective approach based on Benders' decomposition. Extensive computational experiments are provided to test our results with randomly generated data and an application to the location of charging stations for electric vehicles in the city of Trois-Rivières, Quèbec, is addressed.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

SESIÓN ESPECIAL 23  
Mathematical Optimization:  
Methods and Applications

THE COOPERATIVE MAXIMUM  
CAPTURE FACILITY LOCATION  
PROBLEM

EFFECT OF CAPACITY CONSTRAINTS  
AND PACKING ON THE VERTEX  
SEPARATOR PROBLEM

CONEXIONES CON PRECIOS ÓPTIMOS

THE BI-OBJECTIVE MINIMUM-COST  
PERFECT MATCHING PROBLEM AND  
CHINESE POSTMAN PROBLEM

CONIC LINEAR PROGRAMMING  
GAMES

A BILEVEL OPTIMISATION MODEL  
FOR THE RANK PRICING PROBLEM  
WITH TIES

A FRESH VIEW ON THE MINIMUM  
NORMALIZED CUTS PROBLEM

THE MINIMUM CARDINALITY  
 $\Lambda$ -MEDIATED GRAPH PROBLEM



## Effect of capacity constraints and packing on the vertex separator problem

SERGIO ANGLADA, CARMEN GALÉ, JUAN JOSÉ SALAZAR

Departamento de Métodos Estadísticos, Universidad de Zaragoza

[sanglada@unizar.es](mailto:sanglada@unizar.es)

**Abstract:** Graph disconnection problems are well known optimization problems in the literature and there exist multiple variants of them. Given an undirected connected graph, the Vertex Separator Problem (VSP) looks for the smallest subset of vertices, called *separator*, whose removal disconnects the graph into two connected components of roughly equal size. In this work we focus on the study of two variants of the VSP with capacity constraints.

The first variant consists of finding the smallest separator such that the number of *connected components* in the subgraph generated after the vertex removal is limited, and the cardinality of each connected component cannot be greater than a fixed bound. This variant motivates a second VSP variant where we consider the packing of the connected components into a limited number of bins (called *shores*) with a known capacity. This second VRP variant has been introduced by Furini et al. [1].

We introduce a new single-level mathematical formulation for each of these VSP variants, and discuss a computational experience using benchmark graphs. The main purpose is to analyze how the two capacity constraints impact on solving the two VSP variants.

### References

- [1] F. Furini, I. Ljubic, E. Malaguti, P. Paronuzzi (2021). Casting Light on the Hidden Bilevel Combinatorial Structure of the Capacitated Vertex Separator Problem. *Operations Research*, 70(4), 2399-2420.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 23  
Mathematical Optimization:  
Methods and Applications

THE COOPERATIVE MAXIMUM  
CAPTURE FACILITY LOCATION  
PROBLEM

EFFECT OF CAPACITY CONSTRAINTS  
AND PACKING ON THE VERTEX  
SEPARATOR PROBLEM

CONEXIONES CON PRECIOS ÓPTIMOS

THE BI-OBJECTIVE MINIMUM-COST  
PERFECT MATCHING PROBLEM AND  
CHINESE POSTMAN PROBLEM

CONIC LINEAR PROGRAMMING  
GAMES

A BILEVEL OPTIMISATION MODEL  
FOR THE RANK PRICING PROBLEM  
WITH TIES

A FRESH VIEW ON THE MINIMUM  
NORMALIZED CUTS PROBLEM

THE MINIMUM CARDINALITY  
 $\Lambda$ -MEDIATED GRAPH PROBLEM

## Conexiones con precios óptimos

ALBERTO TORREJÓN, MARTINE LABBÉ, MIGUEL A. POZO, JUSTO PUERTO

Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Sevilla.

Instituto de Matemáticas de la Universidad de Sevilla.

[atorrejon@us.es](mailto:atorrejon@us.es)

**Resumen:** En una red dada, las conexiones entre puntos pueden poseerse y, por tanto, venderse. Esta situación abre un amplio abanico de problemas combinatorios. Sea  $G = (V, E)$  un grafo dado cuyo conjunto de aristas está particionado en un conjunto  $R$  de aristas rojas y un conjunto  $B$  de aristas azules, y supongamos que las aristas rojas están ponderadas y contienen un árbol de spanning de  $G$ . El juego del árbol de spanning mínimo de Stackelberg (StackMST) es el de poner precio a las aristas azules de tal forma que se maximice el peso total de las aristas azules seleccionadas en un árbol de spanning mínimo del grafo resultante. En esta charla presentamos diferentes mejoras del estado del arte para el StackMST basadas en las propiedades del Problema del Árbol Mínimo de Expansión y la optimización binivel. Establecemos una comparación teórica y empírica entre estas nuevas formulaciones.

**Agradecimientos:** Esta investigación ha sido apoyada por el proyecto "Retos de la optimización combinatoria en los nuevos modelos de redes complejas y ciencia de datos" (Proyecto I+D+i Junta de Andalucía, referencia P18-FR-1422) "Nuevos resultados sobre problemas de diseño y optimización en redes complejas: Aplicaciones al diseño de ciudades inteligentes" (Proyecto I+D+i FEDER Andalucía, referencia US-1256951) y "Optimización en problemas de ciencia de datos y diseño de redes: Large scale network models meet optimization and data science tools" (Plan Estatal 2017-2020 Generación Conocimiento – Proyectos I+D+i, referencia PID2020-114594GB-C21). Se agradece este apoyo.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 23  
Mathematical Optimization:  
Methods and Applications

THE COOPERATIVE MAXIMUM  
CAPTURE FACILITY LOCATION  
PROBLEM

EFFECT OF CAPACITY CONSTRAINTS  
AND PACKING ON THE VERTEX  
SEPARATOR PROBLEM

CONEXIONES CON PRECIOS ÓPTIMOS

THE BI-OBJECTIVE MINIMUM-COST  
PERFECT MATCHING PROBLEM AND  
CHINESE POSTMAN PROBLEM

CONIC LINEAR PROGRAMMING  
GAMES

A BILEVEL OPTIMISATION MODEL  
FOR THE RANK PRICING PROBLEM  
WITH TIES

A FRESH VIEW ON THE MINIMUM  
NORMALIZED CUTS PROBLEM

THE MINIMUM CARDINALITY  
 $\Lambda$ -MEDIATED GRAPH PROBLEM

# The biobjective minimum-cost perfect matching problem and Chinese postman problem

MIGUEL A. POZO, JUSTO PUERTO, IGNACIO ROLDÁN

Departamento de Estadística e Investigación Operativa – Universidad de Sevilla

[miguelpozo@us.es](mailto:miguelpozo@us.es)

**Abstract:** In this paper, we address the biobjective versions of the perfect matching problem (PMP) and the Chinese postman problem (CPP). Both problems are solved by means of integer formulations or separating blossom inequalities, exploiting the PMP relationship with the CPP. In both cases, we first find the set of supported nondominated solutions and then we use them to obtain the nonsupported ones. The set of supported nondominated solutions are obtained solving scalarized integer formulations. To obtain the sets of nonsupported solutions, we resort to solving lexicographic problems based on adding additional linear constraints to the original problems. For this reason, we also characterize the combinatorial structure of the PMP vertices with one or two additional constraints. We also investigate when it is possible to use the PMP to solve CPP in the biobjective case. We report computational experiments comparing the different approaches and formulations based on different types of graphs with up to 700 nodes.

## References

- [1] Pozo, M.A., Puerto, J. and Roldán, I. (2023), The biobjective minimum-cost perfect matching problem and Chinese postman problem. *Intl. Trans. in Op. Res.* <https://doi.org/10.1111/itor.13363>

**Acknowledgments:** The authors of this research acknowledge financial support by the Spanish Ministerio de Ciencia y Tecnología, Agencia Estatal de Investigación and Fondos Europeos de Desarrollo Regional (FEDER) via project PID2020-114594GB-C21. The authors also acknowledge partial support from projects FEDER-US-1256951, Junta de Andalucía P18-FR-1422, CEI-3-FQM331, B-FQM-322-UGR20, NetmeetData: Ayudas Fundación BBVA a equipos de investigación científica 2019, and Contratación de Personal Investigador Doctor (Convocatoria 2019) 43 Contratos Capital Humano Línea 2. Paidi 2020, supported by the European Social Fund and Junta de Andalucía.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

SESIÓN ESPECIAL 23  
Mathematical Optimization:  
Methods and Applications

THE COOPERATIVE MAXIMUM  
CAPTURE FACILITY LOCATION  
PROBLEM

EFFECT OF CAPACITY CONSTRAINTS  
AND PACKING ON THE VERTEX  
SEPARATOR PROBLEM

CONEXIONES CON PRECIOS ÓPTIMOS

THE BIOBJECTIVE MINIMUM-COST  
PERFECT MATCHING PROBLEM AND  
CHINESE POSTMAN PROBLEM

CONIC LINEAR PROGRAMMING  
GAMES

A BILEVEL OPTIMISATION MODEL  
FOR THE RANK PRICING PROBLEM  
WITH TIES

A FRESH VIEW ON THE MINIMUM  
NORMALIZED CUTS PROBLEM

THE MINIMUM CARDINALITY  
 $\Lambda$ -MEDIATED GRAPH PROBLEM

## Conic linear programming games

JUSTO PUERTO

IMUS, Universidad de Sevilla

[puerto@us.es](mailto:puerto@us.es)

**Abstract:** In this paper we consider allocation problems derived from conic optimization problems that arise analyzing cooperation in several situations. Specifically, we prove that cooperation can be enforced in situations where individual decision-makers define its worth as the optimal solution of a conic linear program. We construct a generic cooperative game with characteristic function induced by the optimal value of those programs and prove that the game is superadditive and balanced. Then, we apply this framework to two challenging situations: Markowitz model of portfolio selection and generic mixed binary non-convex quadratic minimization problems. In the former case, we give sufficient conditions ensuring cooperation among investors and in the latter, we prove, under mild conditions, balancedness of the corresponding cooperative game providing explicitly core allocations. This last model includes as particular instances several well-known combinatorial optimization games as location, covering and traveling salesman games.

**Acknowledgments:** This research has been partially supported by the Agencia Estatal de Investigación (AEI) and the European Regional Development's fund (ERDF): PID2020-114594GB-C21; Regional Government of Andalusia: projects FEDER-US-1256951.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 23  
Mathematical Optimization:  
Methods and Applications

THE COOPERATIVE MAXIMUM  
CAPTURE FACILITY LOCATION  
PROBLEM

EFFECT OF CAPACITY CONSTRAINTS  
AND PACKING ON THE VERTEX  
SEPARATOR PROBLEM

CONEXIONES CON PRECIOS ÓPTIMOS

THE BI-OBJECTIVE MINIMUM-COST  
PERFECT MATCHING PROBLEM AND  
CHINESE POSTMAN PROBLEM

CONIC LINEAR PROGRAMMING  
GAMES

A BILEVEL OPTIMISATION MODEL  
FOR THE RANK PRICING PROBLEM  
WITH TIES

A FRESH VIEW ON THE MINIMUM  
NORMALIZED CUTS PROBLEM

THE MINIMUM CARDINALITY  
 $\Lambda$ -MEDIATED GRAPH PROBLEM

## A bilevel optimisation model for the Rank Pricing Problem with Ties

AITOR HERNÁNDEZ, HERMINIA I. CALVETE, CARMEN GALÉ, JOSÉ A. IRANZO

Departamento de Métodos Estadísticos, Universidad de Zaragoza

[aitor.hernandez@unizar.es](mailto:aitor.hernandez@unizar.es)

**Abstract:** The Rank Pricing Problem with Ties (RPPT) arises from the need to determine the prices of a set of products offered by a company to a set of customers in order to maximize its revenue. Every customer has a budget and is interested in a subset of products which are ranked by preference. In the RPPT customers are allowed to express indifference in terms of preference among products, leading to ties in customer preference lists. Once the prices have been set, each customer will purchase the cheapest product among those they can afford (if any) and satisfy them the most. The RPPT can be modelled from a bilevel optimisation perspective. Bilevel optimisation models involve two decision makers within a hierarchical framework. In the case of the RPPT, at the upper level of the hierarchy, the company establishes the prices of the products and, at the lower level, the customers decide on the product they purchase. To ensure that a bilevel optimisation model is well posed, uniqueness of the optimal solution of the lower level problem is needed. If this is not the case, it is necessary to establish criteria in order to choose one of the optimal solutions. Several approaches may be considered. The optimistic approach consists of choosing the optimal solution that benefits the most the upper level. On the contrary, the pessimistic approach consists of choosing the optimal solution that benefits the least the upper level. The latter is the appropriate approach when the RPPT is modelled from a bilevel optimisation perspective. In order to address the pessimistic approach, a biobjective function is included in the lower level problem. The multiobjective treatment of this problem results in an exact procedure for solving the RPPT, different from the ones that have been proposed in the literature so far. Extensive computational experiments have been performed to illustrate the competitiveness of this approach.

### References

- [1] H.I. Calvete, C. Domínguez, C. Galé, M. Labbé, A. Marín (2019). The rank pricing problem: Models and branch-and-cut algorithms. *Computers and Operations Research*, 105, 12-31.
- [2] C. Domínguez, M. Labbé, A. Marín (2021). The rank pricing problem with ties. *European Journal of Operations Research*, 294, 492-506.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

SESIÓN ESPECIAL 23  
Mathematical Optimization:  
Methods and Applications

THE COOPERATIVE MAXIMUM  
CAPTURE FACILITY LOCATION  
PROBLEM

EFFECT OF CAPACITY CONSTRAINTS  
AND PACKING ON THE VERTEX  
SEPARATOR PROBLEM

CONEXIONES CON PRECIOS ÓPTIMOS

THE BI-OBJECTIVE MINIMUM-COST  
PERFECT MATCHING PROBLEM AND  
CHINESE POSTMAN PROBLEM

CONIC LINEAR PROGRAMMING  
GAMES

A BILEVEL OPTIMISATION MODEL  
FOR THE RANK PRICING PROBLEM  
WITH TIES

A FRESH VIEW ON THE MINIMUM  
NORMALIZED CUTS PROBLEM

THE MINIMUM CARDINALITY  
 $\Lambda$ -MEDIATED GRAPH PROBLEM

## A fresh view on the Minimum Normalized Cuts Problem

F. TEMPRANO, D. PONCE, J. PUERTO

Departamento Estadística e Investigación Operativa, Universidad Sevilla  
[ftgarcia@us.es](mailto:ftgarcia@us.es)

**Abstract:** This paper deals with the k-way normalized cut problem in networks. The normalized cut function was defined to solve some issues concerning the interpretability of the minimum cut problem, which is a classical problem in graph theory whose aim is to provide the bipartition that minimizes the number of edges between nodes from different subsets, applied to partitioning and districting problems. Instead of considering just the number of external edges of each subset, the minimum k-way normalized cut problem tries to minimize the external edge density of each subset of a k-partition, also considering the number of internal edges. In addition, the problem can be extended to a weighted graph in order to minimize the sum of external weight density of the subsets. The minimum k-way normalized cut allows us to locate groups of nodes that accumulate a high internal weight density. Considering that these weights can represent a large number of different interesting parameters, this organization is really useful as facility location planning in order to locate in each of the clusters a facility that accumulates a high weight density. We show several applications of the minimum k-way normalized problem to facility location. We present a methodology using mathematical optimization to provide mixed integer linear programming formulations for the problem. The paper also develops a branch-and-price algorithm for the above mentioned problem which scales better than the compact formulations. Extensive computational experiments assess the usefulness of these methods to solve the k-way normalized cut problem over different location problems on large graphs and random graphs. In addition, all methods have been analysed and studied in order to try to improve them as much as possible.

### References

- [1] Shi, J. and Malik, J. (2000). Normalized Cuts and Image Segmentation. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 22(8), 888–905.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

SESIÓN ESPECIAL 23  
Mathematical Optimization:  
Methods and Applications

THE COOPERATIVE MAXIMUM  
CAPTURE FACILITY LOCATION  
PROBLEM

EFFECT OF CAPACITY CONSTRAINTS  
AND PACKING ON THE VERTEX  
SEPARATOR PROBLEM

CONEXIONES CON PRECIOS ÓPTIMOS

THE BI-OBJECTIVE MINIMUM-COST  
PERFECT MATCHING PROBLEM AND  
CHINESE POSTMAN PROBLEM

CONIC LINEAR PROGRAMMING  
GAMES

A BILEVEL OPTIMISATION MODEL  
FOR THE RANK PRICING PROBLEM  
WITH TIES

A FRESH VIEW ON THE MINIMUM  
NORMALIZED CUTS PROBLEM

THE MINIMUM CARDINALITY  
 $\Lambda$ -MEDIATED GRAPH PROBLEM

## The Minimum Cardinality $\alpha$ -Mediated Graph Problem

VÍCTOR BLANCO, MIGUEL MARTÍNEZ-ANTÓN

Institute of Mathematics (IMAG) and Dep. Quantitative Methods for Economics & Business,  
Universidad de Granada  
[vblanco@ugr.es](mailto:vblanco@ugr.es)

**Abstract:** The use of conic structures in mathematical optimization problems has been widely recognized within the last few years. The development of interior point methods with specialized barriers has allowed to efficiently solve problems involving cones with a high practical interest. This is the case of facility location, power flow, radiotherapy, or supervised classification, among many others. In this work, we analyze suitable representations of the  $(p, \alpha)$ -cone by simpler cones. Apart from providing constructive approaches to simply represent this type of cones, we derive a novel approach to construct minimal representations of the cone as simpler second order cones (which can be efficiently handled by most off-the-shelf optimization solvers). The main structures that we use for this construction are the so-called *mediated graphs* (see e.g., [1, 2]). We prove the one-to-one correspondence between extended representation of a cone and certain mediated graphs, and derive a mathematical optimization formulation to construct minimal representations, the so-called Minimum Cardinality  $\alpha$ -Mediated Graph Problem. We report the results of some experiments that we run to test our approach. both in terms of its computational complexity and in a new problem that arises in continuous facility location with attraction.

### References

- [1] B. Reznick (1989). Forms derived from the arithmetic-geometric inequality. *Mathematische Annalen*, 283(3), 431-464.
- [2] J. Wang (2022). Weighted geometric mean, minimum mediated set, and optimal secondorder cone representation. arXiv preprint arXiv:2206.05924.

**Acknowledgments:** This research has been partially supported by Spanish Ministerio de Ciencia e Innovación, AEI/FEDER grant number PID 2020-114594GBC21, RED2022-134149-T (Thematic Network on Location Science and Related Problems), Junta de Andalucía projects B-FQM-322-UGR20, and the IMAG-Maria de Maeztu grant CEX2020-001105-M/AEI/10.13039/501100011033.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

SESIÓN ESPECIAL 23  
Mathematical Optimization:  
Methods and Applications

THE COOPERATIVE MAXIMUM  
CAPTURE FACILITY LOCATION  
PROBLEM

EFFECT OF CAPACITY CONSTRAINTS  
AND PACKING ON THE VERTEX  
SEPARATOR PROBLEM

CONEXIONES CON PRECIOS ÓPTIMOS

THE BI-OBJECTIVE MINIMUM-COST  
PERFECT MATCHING PROBLEM AND  
CHINESE POSTMAN PROBLEM

CONIC LINEAR PROGRAMMING  
GAMES

A BILEVEL OPTIMISATION MODEL  
FOR THE RANK PRICING PROBLEM  
WITH TIES

A FRESH VIEW ON THE MINIMUM  
NORMALIZED CUTS PROBLEM

THE MINIMUM CARDINALITY  
 $\Lambda$ -MEDIATED GRAPH PROBLEM

## SESIÓN ESPECIAL 24

### New trends in Linear Algebra and Matrix Analysis

#### Organizadores:

ÁNGELES CARMONA  
 (Universitat Politècnica de Catalunya)

CARLOS MARIJUÁN  
 (Universidad de Valladolid)

ALICIA ROCA  
 (Universidad de Valencia)

#### Descripción:

La sesión presentará una amplia gama de trabajos actuales y desarrollos emergentes en el ámbito del álgebra lineal, análisis matricial y sus aplicaciones. Entre los temas que abordaremos en esta sesión, se incluyen, aunque no se limitan a ellos: Formas compañeras, problemas espectrales inversos, matrices estructuradas, resolución de grandes sistemas (métodos iterativos, preconditionamiento, etc.), inversas generalizadas, teoría de control, matrices racionales, matrices polinomiales, ecuaciones matriciales, teoría espectral de matrices, pseudoespectros, teoría del potencial discreto o desarrollo de software.

SESIÓN ESPECIAL 24  
 New trends in Linear Algebra  
 and Matrix Analysis

REALIZABILITY AND UNIVERSAL  
 REALIZABILITY OF NONREAL SPECTRA  
 OF SIZE 6 AND TRACE ZERO

STRUCTURED PERTURBATION OF  
 JACOBI MATRICES WITH PERIODIC  
 HAMILTONIAN MATRICES

ON THE SPECTRUM OF BISYMMETRIC  
 JACOBI MATRICES WITH PERIODIC  
 COEFFICIENTS

NIEP, DIAGONALLY DOMINANT  
 MATRICES, AND WEIGHTED DIGRAPHS

IMPROVING ELECTRICAL IMPEDANCE  
 TOMOGRAPHY DISCRETE TECHNIQUES

PRECONDITIONING LINEAR SYSTEMS  
 WITH V-AISM

ACCURATE BIDIAGONAL  
 DECOMPOSITIONS OF SOME  
 STRUCTURED TOTALLY POSITIVE...

ON OPTIMAL PROPERTIES RELATED  
 TO TOTAL POSITIVITY

ON THE CONSISTENCY OF THE MATRIX  
 EQUATION  $XA = B$  WHEN  $B$  IS  
 EITHER SYMMETRIC...

FILTERS CONNECTING DYNAMICAL  
 SYSTEMS

APPROXIMATION OF PSEUDOSPECTRA  
 OF BLOCK TRIANGULAR MATRICES

EXISTENCE OF POLYNOMIAL  
 MATRICES WITH SOME PRESCRIBED  
 ROWS, DEGREE...



## Realizability and universal realizability of nonreal spectra of size 6 and trace zero

CARLOS MARIJUÁN

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Valladolid

[cmarijuan@uva.es](mailto:cmarijuan@uva.es)

**Abstract:** The *Nonnegative Inverse Eigenvalue Problem* (NIEP) consists of the characterization of the lists of complex numbers that are spectra of nonnegative matrices. We say that a list  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  is *realizable* if it is the spectrum of a nonnegative matrix. We say that the realizable list  $\Lambda$  is *universally realizable* if, for every possible Jordan canonical form allowed by  $\Lambda$ , there is a nonnegative matrix with spectrum  $\Lambda$ . The *Universal Realizability Problem* (URP) consists of the characterization of the lists that are universally realizable.

In terms of  $n$ , the NIEP is completely solved only for  $n \leq 4$ , and for  $n = 5$  with trace zero. It is clear that for  $n \leq 3$  the concepts of universally realizable and realizable are equivalent. The URP is also completely solved for  $n \leq 4$  and for  $n = 5$  with trace zero in the real case, and partially solved for  $n = 5$  with trace zero in the nonreal case. These solutions are different to the NIEP. In this talk we study the realizability and the universal realizability of nonreal spectra of size 6 and trace zero. We use techniques from Graph Theory and Linear Algebra.

### References

- [1] J. Torre-Mayo, M.R. Abril-Raymundo, E. Alarcia-Estévez, C. Marijuán, M. Pisonero (2007). The nonnegative inverse eigenvalue problem from the coefficients of the characteristic polynomial. EBL digraphs. *Linear Algebra Appl.* 426, 729–773.
- [2] A.I. Julio, C. Marijuán, M. Pisonero, R.L. Soto (2019). On universal realizability of spectra. *Linear Algebra Appl.*, 563, 353–372.
- [3] A.I. Julio, C. Marijuán, M. Pisonero, R.L. Soto (2021). Universal realizability in low dimension. *Linear Algebra Appl.*, 619, 107–136.
- [4] C. Marijuán (2023). Universal realizability of nonreal spectra of size 5 and trace zero on the border. Submitted.

**Acknowledgments:** Work partially supported by grant PID2022-138906NB-C21 funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and by “ERDF A way of making Europe”, by the “European Union”.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 24  
New trends in Linear Algebra  
and Matrix Analysis

REALIZABILITY AND UNIVERSAL  
REALIZABILITY OF NONREAL SPECTRA  
OF SIZE 6 AND TRACE ZERO

STRUCTURED PERTURBATION OF  
EIGENVALUES OF SYMPLECTIC AND  
HAMILTONIAN MATRICES

ON THE SPECTRUM OF BISYMMETRIC  
JACOBI MATRICES WITH PERIODIC  
COEFFICIENTS

NIEP, DIAGONALLY DOMINANT  
MATRICES, AND WEIGHTED DIGRAPHS

IMPROVING ELECTRICAL IMPEDANCE  
TOMOGRAPHY DISCRETE TECHNIQUES

PRECONDITIONING LINEAR SYSTEMS  
WITH V-AISM

ACCURATE BIDIAGONAL  
DECOMPOSITIONS OF SOME  
STRUCTURED TOTALLY POSITIVE...

ON OPTIMAL PROPERTIES RELATED  
TO TOTAL POSITIVITY

ON THE CONSISTENCY OF THE MATRIX  
EQUATION  $XA^kX = B$  WHEN  $B$  IS  
EITHER SYMMETRIC...

FILTERS CONNECTING DYNAMICAL  
SYSTEMS

APPROXIMATION OF PSEUDOSPECTRA  
OF BLOCK TRIANGULAR MATRICES

EXISTENCE OF POLYNOMIAL  
MATRICES WITH SOME PRESCRIBED  
ROWS, DEGREE...

## Structured perturbation of eigenvalues of symplectic and Hamiltonian matrices

J. MORO, F. SOSA, C. MEHL

Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid

[jmoro@math.uc3m.es](mailto:jmoro@math.uc3m.es)

**Abstract:** For certain matrix structures, perturbations which preserve that structure modify eigenvalues very differently from how arbitrary perturbations do. Two such families of matrices are symplectic and Hamiltonian ones. In this talk a detailed first-order structured perturbation analysis is presented for both classes. One of the main features of the analysis is framing symplectic perturbations in a multiplicative, instead of additive, way. Expansions for Hamiltonian perturbations are then derived from symplectic ones via the Cayley transform.

SESIÓN ESPECIAL 24  
New trends in Linear Algebra  
and Matrix Analysis

REALIZABILITY AND UNIVERSAL  
REALIZABILITY OF NONREAL SPECTRA  
OF SIZE 6 AND TRACE ZERO

STRUCTURED PERTURBATION OF  
EIGENVALUES OF SYMPLECTIC AND  
HAMILTONIAN MATRICES

ON THE SPECTRUM OF BISYMMETRIC  
JACOBI MATRICES WITH PERIODIC  
COEFFICIENTS

NIEP, DIAGONALLY DOMINANT  
MATRICES, AND WEIGHTED DIGRAPHS

IMPROVING ELECTRICAL IMPEDANCE  
TOMOGRAPHY DISCRETE TECHNIQUES

PRECONDITIONING LINEAR SYSTEMS  
WITH V-AISM

ACCURATE BIDIAGONAL  
DECOMPOSITIONS OF SOME  
STRUCTURED TOTALLY POSITIVE...

ON OPTIMAL PROPERTIES RELATED  
TO TOTAL POSITIVITY

ON THE CONSISTENCY OF THE MATRIX  
EQUATION  $XTAX = B$  WHEN  $B$  IS  
EITHER SYMMETRIC...

FILTERS CONNECTING DYNAMICAL  
SYSTEMS

APPROXIMATION OF PSEUDOSPECTRA  
OF BLOCK TRIANGULAR MATRICES

EXISTENCE OF POLYNOMIAL  
MATRICES WITH SOME PRESCRIBED  
ROWS, DEGREE...

JUEVES, 25 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

## On the spectrum of bisymmetric Jacobi matrices with periodic coefficients

A.M. ENCINAS, M.J. JIMÉNEZ, S.MONDAL  
 Departament de Matemàtiques, BarcelonaTech-UPC, Spain  
[andres.marcos.encinas@upc.edu](mailto:andres.marcos.encinas@upc.edu)

**Abstract:** The inverse eigenvalue problem for symmetric matrices consists of determining whether for an ordered list of  $n$  real numbers there exists a symmetric and irreducible matrix of order  $n$  whose spectrum coincides with the given list. Within this general problem, the case of bisymmetric Jacobi matrices occupies a central place, since for each strictly monotone list, there is a unique bisymmetric Jacobi matrix that realizes it. Regardless of their interest in fields such as mechanics or statistics, families of this type of matrices whose spectrum is known are often used as tests for different recovery algorithms of the coefficients of the matrices from spectral data.

Unfortunately, there are very few families of bisymmetric Jacobi matrices whose spectrum is known. Recently, bisymmetric Jacobi matrices whose eigenvalues form a linear or quadratic progression have been characterized, thus unifying many different works over the last hundred years.

In the case of periodic coefficients, very little is known, reduced to small variations of the constant coefficients case (period 1) and to some very specific situations for period 2. In this communication we are concerned with obtaining expressions for the spectrum of bisymmetric Jacobi matrices with periodic coefficients, for periods lower or equal to 3. In all cases, our technique is based on the analysis of difference equations with periodic coefficients and the boundary problems associated with them.

**Acknowledgments:** This work has been partly supported by the Spanish Research Council (Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología,) under project PID2021-122501NB-I00 and by the Universitat Politècnica de Catalunya under funds AGRUPS-2022 and AGRUPS-2023. Samir Mondal acknowledges funding received from the Prime Minister's Research Fellowship (PMRF), Ministry of Education, Government of India, for carrying out this work.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

SESIÓN ESPECIAL 24  
New trends in Linear Algebra  
and Matrix Analysis

REALIZABILITY AND UNIVERSAL  
REALIZABILITY OF NONREAL SPECTRA  
OF SIZE 6 AND TRACE ZERO

STRUCTURED PERTURBATION OF  
EIGENVALUES OF SYMPLECTIC AND  
HAMILTONIAN MATRICES

ON THE SPECTRUM OF BISYMMETRIC  
JACOBI MATRICES WITH PERIODIC  
COEFFICIENTS

NIEP, DIAGONALLY DOMINANT  
MATRICES, AND WEIGHTED DIGRAPHS

IMPROVING ELECTRICAL IMPEDANCE  
TOMOGRAPHY DISCRETE TECHNIQUES

PRECONDITIONING LINEAR SYSTEMS  
WITH V-AISM

ACCURATE BIDIAGONAL  
DECOMPOSITIONS OF SOME  
STRUCTURED TOTALLY POSITIVE...

ON OPTIMAL PROPERTIES RELATED  
TO TOTAL POSITIVITY

ON THE CONSISTENCY OF THE MATRIX  
EQUATION  $XTAX = B$  WHEN  $B$  IS  
EITHER SYMMETRIC...

FILTERS CONNECTING DYNAMICAL  
SYSTEMS

APPROXIMATION OF PSEUDOSPECTRA  
OF BLOCK TRIANGULAR MATRICES

EXISTENCE OF POLYNOMIAL  
MATRICES WITH SOME PRESCRIBED  
ROWS, DEGREE...

## NIEP, diagonally dominant matrices, and weighed digraphs

MIRIAM PISONERO

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Valladolid

[mpisonero@uva.es](mailto:mpisonero@uva.es)

**Abstract:** NIEP stands for the acronym in English for Nonnegative Inverse Eigenvalue Problem. This problem involves characterizing the spectra of nonnegative matrices. In this talk, we will take a brief look at what is known about this problem and its variants, showing its interpretation for weighted digraphs. Note that a nonnegative matrix can be viewed as the adjacency matrix of a weighted digraph. This implies that the NIEP is equivalent to characterizing the spectra of weighted digraphs. Finally, we will describe, in terms of combinatorial structure and sign patterns, when a weakly diagonally dominant matrix is invertible.

### References

- [1] C. R. Johnson, C. Marijuán, M. Pisonero (2023). Diagonal dominance and invertibility of matrices. *Special Matrices* 11: 20220181.
- [2] A. I. Julio, C. Marijuán, M. Pisonero, R. L. Soto (2021). Universal Realizability in Low Dimension. *Linear Algebra and Appl.* 619: 107–1366.

**Acknowledgments:** Work (partially) supported by PID2021-122501NB-I00.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

SESIÓN ESPECIAL 24  
New trends in Linear Algebra  
and Matrix Analysis

REALIZABILITY AND UNIVERSAL  
REALIZABILITY OF NONREAL SPECTRA  
OF SIZE 6 AND TRACE ZERO

STRUCTURED PERTURBATION OF  
EIGENVALUES OF SYMPLECTIC AND  
HAMILTONIAN MATRICES

ON THE SPECTRUM OF BISYMMETRIC  
JACOBI MATRICES WITH PERIODIC  
COEFFICIENTS

NIEP, DIAGONALLY DOMINANT  
MATRICES, AND WEIGHED DIGRAPHS

IMPROVING ELECTRICAL IMPEDANCE  
TOMOGRAPHY DISCRETE TECHNIQUES

PRECONDITIONING LINEAR SYSTEMS  
WITH V-AISM

ACCURATE BIDIAGONAL  
DECOMPOSITIONS OF SOME  
STRUCTURED TOTALLY POSITIVE...

ON OPTIMAL PROPERTIES RELATED  
TO TOTAL POSITIVITY

ON THE CONSISTENCY OF THE MATRIX  
EQUATION  $XTAX = B$  WHEN  $B$  IS  
EITHER SYMMETRIC...

FILTERS CONNECTING DYNAMICAL  
SYSTEMS

APPROXIMATION OF PSEUDOSPECTRA  
OF BLOCK TRIANGULAR MATRICES

EXISTENCE OF POLYNOMIAL  
MATRICES WITH SOME PRESCRIBED  
ROWS, DEGREE...

## Improving Electrical Impedance Tomography discrete techniques

M.J. JIMÉNEZ, Á. CARMONA, A.M. ENCINAS, Á. SAMPERIO

Departament de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya

[maria.jose.jimenez@upc.edu](mailto:maria.jose.jimenez@upc.edu)

**Abstract:** For health issues, Electrical Impedance Tomography (EIT) represents a non-invasive and radiation-free imaging technique for recovering the conductivity distribution inside the body under observation from skin surface measurements. Besides, EIT is known to be a groundbreaking area of research because its low cost and portable instrumentation. It is well known that this problem is severely ill-posed, especially if complex networks are considered. Therefore, new algorithms to overcome this structural difficulty are necessary. Using discrete techniques, we are verifying that the design of stable algorithms for the recovery of conductances can be achieved through an optimization process. As a consequence, we can improve existing EIT techniques for clinical diagnosis.

SESIÓN ESPECIAL 24  
New trends in Linear Algebra  
and Matrix Analysis

REALIZABILITY AND UNIVERSAL  
REALIZABILITY OF NONREAL SPECTRA  
OF SIZE 6 AND TRACE ZERO

STRUCTURED PERTURBATION OF  
EIGENVALUES OF SYMPLECTIC AND  
HAMILTONIAN MATRICES

ON THE SPECTRUM OF BISYMMETRIC  
JACOBI MATRICES WITH PERIODIC  
COEFFICIENTS

NIEP, DIAGONALLY DOMINANT  
MATRICES, AND WEIGHTED DIGRAPHS

IMPROVING ELECTRICAL IMPEDANCE  
TOMOGRAPHY DISCRETE TECHNIQUES

PRECONDITIONING LINEAR SYSTEMS  
WITH V-AISM

ACCURATE BIDIAGONAL  
DECOMPOSITIONS OF SOME  
STRUCTURED TOTALLY POSITIVE...

ON OPTIMAL PROPERTIES RELATED  
TO TOTAL POSITIVITY

ON THE CONSISTENCY OF THE MATRIX  
EQUATION  $XTAX = B$  WHEN  $B$  IS  
EITHER SYMMETRIC...

FILTERS CONNECTING DYNAMICAL  
SYSTEMS

APPROXIMATION OF PSEUDOSPECTRA  
OF BLOCK TRIANGULAR MATRICES

EXISTENCE OF POLYNOMIAL  
MATRICES WITH SOME PRESCRIBED  
ROWS, DEGREE...

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

## Preconditioning linear systems with V-AISM

J. MAS, R. BRU, J. CERDÁN, J. MARÍN

Instituto de Matemática Multidisciplinar, Universitat Politècnica de València

[jmam@imm.upv.es](mailto:jmam@imm.upv.es)

### Abstract:

To solve a linear system  $Ax = b$ , where  $A$  is a nonsingular, large and sparse matrix using iterative methods, the use of preconditioning techniques is fruitful. In this work we study factorized approximate inverse preconditioners that compute explicitly the preconditioner as an approximation of  $A^{-1}$ .

We use the Sherman-Morrison formula to obtain an approximate inverse  $LU$  preconditioner. The main difference with respect to the AISM preconditioner is the way of applying recursively the inversion formula to obtain a new decomposition of  $A^{-1}$ . Then, we use a compact representation of this decomposition to build our proposed preconditioner V-AISM.

The inverse of  $A$  may be computed considering a nonsingular matrix  $A_0$  of the same size and two sets of vectors  $\{x_k\}_{k=1}^n$  and  $\{y_k\}_{k=1}^n$  such that  $A = A_0 + \sum_{k=1}^n x_k y_k^T = A_0 + XY^T$ , where  $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$  and  $Y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]$ .

Defining  $A_k = A_0 + \sum_{i=1}^k x_i y_i^T$ ,  $k = 1, \dots, n$  we have  $A_k = A_{k-1} + x_k y_k^T$  and  $A_n = A$ . Suppose that  $r_1 = 1 + y_1^T A_0^{-1} x_1 \neq 0$ . By the Sherman-Morrison formula the matrix  $A_1 = A_0 + x_1 y_1^T$  is nonsingular and

$$A_1^{-1} = A_0^{-1} - \frac{1}{r_1} A_0^{-1} x_1 y_1^T A_0^{-1} = A_0^{-1} \left( I - \frac{1}{r_1} x_1 w_1^T \right) = A_0^{-1} V_1$$

where  $w_1^T = y_1^T A_0^{-1}$  and  $V_1 = I - \frac{1}{r_1} x_1 w_1^T$ . If  $r_k = 1 + y_k^T A_{k-1}^{-1} x_k \neq 0$ , then

$$A_k^{-1} = A_{k-1}^{-1} - \frac{1}{r_k} A_{k-1}^{-1} x_k y_k^T A_{k-1}^{-1} = A_{k-1}^{-1} \left( I - \frac{1}{r_k} x_k w_k^T \right) = A_{k-1}^{-1} V_k,$$

where  $w_k^T = y_k^T A_{k-1}^{-1}$  and  $V_k = I - \frac{1}{r_k} x_k w_k^T$ . Then,  $A^{-1} = A_n^{-1} = A_0^{-1} V_1 \dots V_n$ .

To compute the preconditioner, small entries are zeroed in the process. We prove that this process is breakdown-free for M- and H-matrices. Moreover, numerical experiments show that this new preconditioner is efficient and faster than AISM.

**Acknowledgments:** Work supported by Conselleria de Innovación, Universidades, Ciencia y Sociedad Digital, Generalitat Valenciana (CIAICO/2021/162)

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

SESIÓN ESPECIAL 24  
New trends in Linear Algebra  
and Matrix Analysis

REALIZABILITY AND UNIVERSAL  
REALIZABILITY OF NONREAL SPECTRA  
OF SIZE 6 AND TRACE ZERO

STRUCTURED PERTURBATION OF  
EIGENVALUES OF SYMPLECTIC AND  
HAMILTONIAN MATRICES

ON THE SPECTRUM OF BISYMMETRIC  
JACOBI MATRICES WITH PERIODIC  
COEFFICIENTS

NIEP, DIAGONALLY DOMINANT  
MATRICES, AND WEIGHTED DIGRAPHS

IMPROVING ELECTRICAL IMPEDANCE  
TOMOGRAPHY DISCRETE TECHNIQUES

PRECONDITIONING LINEAR SYSTEMS  
WITH V-AISM

ACCURATE BIDIAGONAL  
DECOMPOSITIONS OF SOME  
STRUCTURED TOTALLY POSITIVE...

ON OPTIMAL PROPERTIES RELATED  
TO TOTAL POSITIVITY

ON THE CONSISTENCY OF THE MATRIX  
EQUATION  $XA^T X = B$  WHEN  $B$  IS  
EITHER SYMMETRIC...

FILTERS CONNECTING DYNAMICAL  
SYSTEMS

APPROXIMATION OF PSEUDOSPECTRA  
OF BLOCK TRIANGULAR MATRICES

EXISTENCE OF POLYNOMIAL  
MATRICES WITH SOME PRESCRIBED  
ROWS, DEGREE...

## Accurate bidiagonal decompositions of some structured totally positive matrices of arbitrary rank

A. MARCO, J. DELGADO, P. KOEV, J. J. MARTÍNEZ, J. M. PEÑA, P. O. PERSSON,  
S. SPASOV

Departamento de Física y Matemáticas, Universidad de Alcalá  
[ana.marco@uah.es](mailto:ana.marco@uah.es)

**Abstract:** The fast and accurate computation of bidiagonal decompositions of non-singular totally positive matrices is an active topic of research in the area on numerical linear algebra. The interest in this subject is partly due to the work of P. Koev, who proved in [1] that, having the bidiagonal decomposition of a nonsingular totally positive matrix computed to high relative accuracy, virtually all linear algebra problems can be solved accurately for that matrix. The extension of these results to the case of singular totally positive matrices was also recently carried out in [2], which motivated the search of fast and accurate algorithms to compute the bidiagonal decompositions of structured totally positive matrices of any rank. In particular, these decompositions were obtained for the case of totally positive Vandermonde-type matrices in [3]. In this talk, we present fast and accurate algorithms to compute the bidiagonal decomposition of some structured totally positive matrices which are also valid when these matrices are singular. The application of our algorithms to the accurate and efficient computation of the eigenvalues of these structured matrices is also considered. Numerical experiments showing the good performance of our approach will be presented.

### References

- [1] P. Koev (2007). Accurate computations with totally nonnegative matrices. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 29, 731–751.
- [2] P. Koev (2019). Accurate eigenvalues and exact zero Jordan blocks of totally nonnegative matrices. *Numer. Math.*, 141, 693–713.
- [3] J. Delgado, P. Koev, A. Marco, J. J. Martínez, J. M. Peña, P. O. Persson, S. Spasov (2023). Bidiagonal decompositions of Vandermonde-type matrices of arbitrary rank. *J. Comput. Appl. Math.*, 350, 299–308.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

SESIÓN ESPECIAL 24  
New trends in Linear Algebra  
and Matrix Analysis

REALIZABILITY AND UNIVERSAL  
REALIZABILITY OF NONREAL SPECTRA  
OF SIZE 6 AND TRACE ZERO

STRUCTURED PERTURBATION OF  
EIGENVALUES OF SYMPLECTIC AND  
HAMILTONIAN MATRICES

ON THE SPECTRUM OF BISYMMETRIC  
JACOBI MATRICES WITH PERIODIC  
COEFFICIENTS

NIEP, DIAGONALLY DOMINANT  
MATRICES, AND WEIGHTED DIGRAPHS

IMPROVING ELECTRICAL IMPEDANCE  
TOMOGRAPHY DISCRETE TECHNIQUES

PRECONDITIONING LINEAR SYSTEMS  
WITH V-AISM

ACCURATE BIDIAGONAL  
DECOMPOSITIONS OF SOME  
STRUCTURED TOTALLY POSITIVE...

ON OPTIMAL PROPERTIES RELATED  
TO TOTAL POSITIVITY

ON THE CONSISTENCY OF THE MATRIX  
EQUATION  $XTAX = B$  WHEN  $B$  IS  
EITHER SYMMETRIC...

FILTERS CONNECTING DYNAMICAL  
SYSTEMS

APPROXIMATION OF PSEUDOSPECTRA  
OF BLOCK TRIANGULAR MATRICES

EXISTENCE OF POLYNOMIAL  
MATRICES WITH SOME PRESCRIBED  
ROWS, DEGREE...

## On optimal properties related to Total Positivity

J.M. PEÑA

Departamento de Matemática Aplicada/IUMA, Universidad de Zaragoza  
[jmpena@unizar.es](mailto:jmpena@unizar.es)

**Abstract:** A matrix whose minors are all nonnegative is called totally positive. A basis of a space  $U$  of univariate functions is called totally positive if all its collocation matrices are totally positive. If  $U$  has a totally positive basis, then there exists a totally positive basis of  $U$  (called B-basis) such that it generates all totally positive bases of  $U$  by means of totally positive matrices. A first example of B-basis is the Bernstein basis of polynomials on a compact interval. Several optimal properties have been obtained for B-bases and their collocation matrices as well as for other related matrices (see [1] and [2]). This talk will also present some new contributions to this field, in particular some results related to Wronskian matrices of B-bases.

### References

- [1] J. Delgado, J. M. Peña (2020). Extremal and optimal properties of B-bases collocation matrices. *Numerische Mathematik*, 146, 105–118.
- [2] J. Delgado, H. Orera, J. M. Peña (2021). Optimal properties of tensor product of B-bases. *Applied Mathematics Letters*, 121, Paper 107473.

**Acknowledgments:** Work (partially) supported by the Spanish research grants PID2022-138569NB-I00 and RED2022-134176-T (MCIU/AEI) and by Gobierno de Aragón (E41\_23R).

JUEVES, 25 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

SESIÓN ESPECIAL 24  
New trends in Linear Algebra  
and Matrix Analysis

REALIZABILITY AND UNIVERSAL  
REALIZABILITY OF NONREAL SPECTRA  
OF SIZE 6 AND TRACE ZERO

STRUCTURED PERTURBATION OF  
EIGENVALUES OF SYMPLECTIC AND  
HAMILTONIAN MATRICES

ON THE SPECTRUM OF BISYMMETRIC  
JACOBI MATRICES WITH PERIODIC  
COEFFICIENTS

NIEP, DIAGONALLY DOMINANT  
MATRICES, AND WEIGHTED DIGRAPHS

IMPROVING ELECTRICAL IMPEDANCE  
TOMOGRAPHY DISCRETE TECHNIQUES

PRECONDITIONING LINEAR SYSTEMS  
WITH V-AISM

ACCURATE BIDIAGONAL  
DECOMPOSITIONS OF SOME  
STRUCTURED TOTALLY POSITIVE...

ON OPTIMAL PROPERTIES RELATED  
TO TOTAL POSITIVITY

ON THE CONSISTENCY OF THE MATRIX  
EQUATION  $XTAX = B$  WHEN  $B$  IS  
EITHER SYMMETRIC...

FILTERS CONNECTING DYNAMICAL  
SYSTEMS

APPROXIMATION OF PSEUDOSPECTRA  
OF BLOCK TRIANGULAR MATRICES

EXISTENCE OF POLYNOMIAL  
MATRICES WITH SOME PRESCRIBED  
ROWS, DEGREE...



## On the consistency of the matrix equation $X^TAX = B$ when $B$ is either symmetric or skew-symmetric

FERNANDO DE TERÁN

Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid

[fteran@math.uc3m.es](mailto:fteran@math.uc3m.es)

### Abstract:

We will review some recent work about the consistency of the matrix equation

$$X^TAX = B, \quad (1)$$

when  $B$  is either symmetric or skew-symmetric. In Equation (1),  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ,  $X \in \mathbb{C}^{m \times n}$  is the unknown and  $X^T$  is the transpose of  $X$ . More precisely, we will show that, for most matrices  $A$ :

- If  $B$  is symmetric, then (1) is consistent if and only if  $\text{rank } B \leq \min\{n - n_A - \frac{\text{rank}(A - A^T)}{2}, \text{rank}(A + A^T)\}$ .
- If  $B$  is skew-symmetric, then (1) is consistent if and only if  $\text{rank } B \leq \min\{n - n_A - \frac{\text{rank}(A + A^T)}{2}, \text{rank}(A - A^T)\}$ , where  $n_A = \dim(\text{Nul } A \cap \text{Nul } A^T)$ .

The main tool that we have used to get such results is the so-called *Canonical form for congruence* of the matrices  $A$  and  $B$ , that will be reviewed in the talk.

This is based on joint work with Alberto Borobia and Roberto Canogar, from UNED.

**Acknowledgments:** This work has been partially supported by the *Ministerio de Economía y Competitividad* through grant MTM2015-65798-P, by the *Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades* through grant MTM2017-90682-REDT, by the *Agencia Estatal de Investigación* through grants PID2019-106362GB-I00/AEI/10.13039/501100011033 and RED2022-134176-T, and by the *Comunidad de Madrid* under the Multiannual Agreement with UC3M in the line of Excellence of University Professors (EPUC3M23), and in the context of the V PRICIT (Regional Programme of Research and Technological Innovation).

VIERNES, 26 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 24  
New trends in Linear Algebra  
and Matrix Analysis

REALIZABILITY AND UNIVERSAL  
REALIZABILITY OF NONREAL SPECTRA  
OF SIZE 6 AND TRACE ZERO

STRUCTURED PERTURBATION OF  
EIGENVALUES OF SYMPLECTIC AND  
HAMILTONIAN MATRICES

ON THE SPECTRUM OF BISYMMETRIC  
JACOBI MATRICES WITH PERIODIC  
COEFFICIENTS

NIEP, DIAGONALLY DOMINANT  
MATRICES, AND WEIGHTED DIGRAPHS

IMPROVING ELECTRICAL IMPEDANCE  
TOMOGRAPHY DISCRETE TECHNIQUES

PRECONDITIONING LINEAR SYSTEMS  
WITH V-AISM

ACCURATE BIDIAGONAL  
DECOMPOSITIONS OF SOME  
STRUCTURED TOTALLY POSITIVE...

ON OPTIMAL PROPERTIES RELATED  
TO TOTAL POSITIVITY

ON THE CONSISTENCY OF THE MATRIX  
EQUATION  $X^TAX = B$  WHEN  $B$  IS  
EITHER SYMMETRIC...

FILTERS CONNECTING DYNAMICAL  
SYSTEMS

APPROXIMATION OF PSEUDOSPECTRA  
OF BLOCK TRIANGULAR MATRICES

EXISTENCE OF POLYNOMIAL  
MATRICES WITH SOME PRESCRIBED  
ROWS, DEGREE...

## Filters connecting dynamical systems

SILVIA MARCAIDA, AGURTZANE AMPARAN, ION ZABALLA  
 Department of Mathematics, University of the Basque Country (UPV/EHU)  
[silvia.marcaida@ehu.eus](mailto:silvia.marcaida@ehu.eus)

**Abstract:** Filters connecting two dynamical systems, identified with polynomial matrices  $D_1(s), D_2(s)$ , are polynomial matrices  $F_1(s), F_2(s)$  that satisfy the equation  $F_2(s)D_1(s) = D_2(s)F_1(s)$ . Filters that connect quadratic systems with the same finite eigenvalues and their partial multiplicities were called coprime filters in [3]. The notion of coprime filters has been extended for systems and their corresponding matrix polynomials of possibly different sizes, ranks or degrees that share the same spectral structure, i.e., the same finite and infinite elementary divisors. Such filters were named spectral filters in [1] and they completely characterize when two polynomial matrices are spectrally equivalent, that is, when they have the same spectral structure. A parametrization of the set of spectral filters connecting two nonsingular polynomial matrices has been defined in [2], where the parameter space is the subset of invertible matrices of the centralizer of any linearization of the reversals with respect to a scalar that is not an eigenvalue of the given matrices. One application of filters is to decouple systems. We have been able to identify the parameter that defines the filters that decouple quadratic systems.

### References

- [1] A. Amparan, S. Marcaida, I. Zaballa (2011). Spectral filters connecting high order systems. *Applied Mathematic and Computation*, 391, 125672, 1-14.
- [2] A. Amparan, S. Marcaida, I. Zaballa (2023). Parametrizing spectral filters for nonsingular polynomial matrices. Submitted.
- [3] S. D. Garvey, P. Lancaster, A. A. Popov, U. Prells, I. Zaballa (2013). Filters connecting isospectral quadratic systems. *Linear Algebra and its Applications*, 438, 1497-1516.

**Acknowledgments:** Work supported by grant PID2021-124827NB-I00 funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and by “ERDF A way of making Europe” by the “European Union”, and by grant GIU21/020 funded by UPV/EHU.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

SESIÓN ESPECIAL 24  
New trends in Linear Algebra  
and Matrix Analysis

REALIZABILITY AND UNIVERSAL  
REALIZABILITY OF NONREAL SPECTRA  
OF SIZE 6 AND TRACE ZERO

STRUCTURED PERTURBATION OF  
EIGENVALUES OF SYMPLECTIC AND  
HAMILTONIAN MATRICES

ON THE SPECTRUM OF BISYMMETRIC  
JACOBI MATRICES WITH PERIODIC  
COEFFICIENTS

NIEP, DIAGONALLY DOMINANT  
MATRICES, AND WEIGHTED DIGRAPHS

IMPROVING ELECTRICAL IMPEDANCE  
TOMOGRAPHY DISCRETE TECHNIQUES

PRECONDITIONING LINEAR SYSTEMS  
WITH V-AISM

ACCURATE BIDIAGONAL  
DECOMPOSITIONS OF SOME  
STRUCTURED TOTALLY POSITIVE...

ON OPTIMAL PROPERTIES RELATED  
TO TOTAL POSITIVITY

ON THE CONSISTENCY OF THE MATRIX  
EQUATION  $XA^T X = B$  WHEN  $B$  IS  
EITHER SYMMETRIC...

FILTERS CONNECTING DYNAMICAL  
SYSTEMS

APPROXIMATION OF PSEUDOSPECTRA  
OF BLOCK TRIANGULAR MATRICES

EXISTENCE OF POLYNOMIAL  
MATRICES WITH SOME PRESCRIBED  
ROWS, DEGREE...

## Approximation of pseudospectra of block triangular matrices

GORKA ARMENTIA, SHREEMAYEE BORA, MICHAEL KAROW, NANDITA ROY

Department of Mathematics, University of the Basque Country UPV/EHU

[gorka.amentia@ehu.es](mailto:gorka.amentia@ehu.es)

**Abstract:** Let  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  be unitarily similar to

$$\begin{bmatrix} L & C \\ O & M \end{bmatrix},$$

where  $L \in \mathbb{C}^{\ell \times \ell}$ ,  $M \in \mathbb{C}^{m \times m}$  and  $C \in \mathbb{C}^{\ell \times m}$ . We denote by  $\Lambda_\varepsilon(A)$  the ordinary  $\varepsilon$ -pseudospectrum of  $A$ , which can be characterized as

$$\{z \in \mathbb{C} : \|(zI_n - A)^{-1}\|^{-1} \leq \varepsilon\},$$

where  $\|\cdot\|$  stands for the spectral norm or 2-norm. The goal of this talk is to give some outer and inner bounds for  $\Lambda_\varepsilon(A)$  in terms of the pseudospectra of  $L$  and  $M$ . More precisely, the results for the outer bounds of the  $\varepsilon$ -pseudospectrum of  $A$  involve expressions of the form

$$\Lambda_\varepsilon(A) \subseteq \Lambda_{g(\varepsilon)\varepsilon}(L) \cup \Lambda_{g(\varepsilon)\varepsilon}(M),$$

for some function  $g$ . When it comes to the inner bounds of the  $\varepsilon$ -pseudospectrum of  $A$ , these are of the form

$$\Lambda_{f(\varepsilon)\varepsilon}(L) \subseteq \Lambda_\varepsilon(A) \quad \text{and} \quad \Lambda_{\widehat{f}(\varepsilon)\varepsilon}(M) \subseteq \Lambda_\varepsilon(A),$$

for some functions  $f$  and  $\widehat{f}$ .

VIERNES, 26 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

SESIÓN ESPECIAL 24  
New trends in Linear Algebra  
and Matrix Analysis

REALIZABILITY AND UNIVERSAL  
REALIZABILITY OF NONREAL SPECTRA  
OF SIZE 6 AND TRACE ZERO

STRUCTURED PERTURBATION OF  
EIGENVALUES OF SYMPLECTIC AND  
HAMILTONIAN MATRICES

ON THE SPECTRUM OF BISYMMETRIC  
JACOBI MATRICES WITH PERIODIC  
COEFFICIENTS

NIEP, DIAGONALLY DOMINANT  
MATRICES, AND WEIGHTED DIGRAPHS

IMPROVING ELECTRICAL IMPEDANCE  
TOMOGRAPHY DISCRETE TECHNIQUES

PRECONDITIONING LINEAR SYSTEMS  
WITH V-AISM

ACCURATE BIDIAGONAL  
DECOMPOSITIONS OF SOME  
STRUCTURED TOTALLY POSITIVE...

ON OPTIMAL PROPERTIES RELATED  
TO TOTAL POSITIVITY

ON THE CONSISTENCY OF THE MATRIX  
EQUATION  $XA = B$  WHEN  $B$  IS  
EITHER SYMMETRIC...

FILTERS CONNECTING DYNAMICAL  
SYSTEMS

APPROXIMATION OF PSEUDOSPECTRA  
OF BLOCK TRIANGULAR MATRICES

EXISTENCE OF POLYNOMIAL  
MATRICES WITH SOME PRESCRIBED  
ROWS, DEGREE...

## Existence of polynomial matrices with some prescribed rows, degree and (part of) eigenstructure

ALICIA ROCA, AGURTZANE AMPARAN, ITZIAR BARAGAÑA, SILVIA MARCAIDA  
 Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de València  
[aroca@mat.upv.es](mailto:aroca@mat.upv.es)

**Abstract:** A solution to the row-completion problem of a polynomial matrix, when the degree and eigenstructure are prescribed is given in [1]. With the help of the First Frobenius companion form of a polynomial matrix, we turn the problem into a pencil completion problem, and solve it using the solution to the pencil row-completion problem obtained in [2].

We have also solved the problem when the degree and only part of the eigenstructure are prescribed, leading to different problems depending on which ones of the invariants that form the eigenstructure are prescribed. With appropriate combinatorial effort, we have completed the study for every possible particular case of prescription of invariants. We will show the solution to some of the cases.

### References

- [1] A. Amparan, I. Baragaña, S. Marcaida, A. Roca (2023). Row or column completion of polynomial matrices of given degree. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. Accepted for publication.
- [2] M. Dodig, M. Stošić (2019). The general matrix pencil completion problem: a minimal case. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 40 (1), 347-369.

**Acknowledgments:** Work partially supported by grant PID2021-124827NB-I00 funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and by “ERDF A way of making Europe”, by the “European Union”.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

SESIÓN ESPECIAL 24  
New trends in Linear Algebra  
and Matrix Analysis

REALIZABILITY AND UNIVERSAL  
REALIZABILITY OF NONREAL SPECTRA  
OF SIZE 6 AND TRACE ZERO

STRUCTURED PERTURBATION OF  
EIGENVALUES OF SYMPLECTIC AND  
HAMILTONIAN MATRICES

ON THE SPECTRUM OF BISYMMETRIC  
JACOBI MATRICES WITH PERIODIC  
COEFFICIENTS

NIEP, DIAGONALLY DOMINANT  
MATRICES, AND WEIGHTED DIGRAPHS

IMPROVING ELECTRICAL IMPEDANCE  
TOMOGRAPHY DISCRETE TECHNIQUES

PRECONDITIONING LINEAR SYSTEMS  
WITH V-AISM

ACCURATE BIDIAGONAL  
DECOMPOSITIONS OF SOME  
STRUCTURED TOTALLY POSITIVE...

ON OPTIMAL PROPERTIES RELATED  
TO TOTAL POSITIVITY

ON THE CONSISTENCY OF THE MATRIX  
EQUATION  $XTAX = B$  WHEN  $B$  IS  
EITHER SYMMETRIC...

FILTERS CONNECTING DYNAMICAL  
SYSTEMS

APPROXIMATION OF PSEUDOSPECTRA  
OF BLOCK TRIANGULAR MATRICES

EXISTENCE OF POLYNOMIAL  
MATRICES WITH SOME PRESCRIBED  
ROWS, DEGREE...

## SESIÓN ESPECIAL 25

### New trends and perspectives in fluid dynamics

#### Organizadores:

**DIEGO ALONSO-ORÁN**  
(Universidad de La Laguna)

**RAFAEL GRANERO-BELINCHÓN**  
(Universidad de Cantabria)

**DANIEL LEAR**  
(Universidad de Cantabria)

#### Descripción:

Esta sesión se centra en el análisis matemático de una amplia clase de ecuaciones en derivadas parciales (EDP) que describen diversos fenómenos físicos dentro del campo de la dinámica de fluidos. Desde un punto de vista matemático, estas EDP son a menudo ecuaciones integro-diferenciales hiperbólicas/parabólicas que suelen combinar efectos no lineales y no locales, lo que supone un reto tanto analítico como computacional. El papel de la comunidad matemática es analizar estas EDP y desarrollar nuevas herramientas matemáticas para entender la interacción de los diferentes efectos, y capturar los fenómenos físicos subyacentes. Algunas de las cuestiones que se abordarán a lo largo de la sesión serán: la estabilidad de las soluciones, la existencia de singularidades en tiempo finito así como el comportamiento asintótico de las mismas.

SESIÓN ESPECIAL 25  
New trends and perspectives in  
fluid dynamics

A SCHIFFER-TYPE PROBLEM WITH  
APPLICATIONS TO STATIONARY  
EULER FLOWS

RIGOROUS DERIVATION OF REDUCED  
MODELS FOR OCEAN DYNAMICS

SHARP NONUNIQUENESS OF  
ADMISSIBLE SOLUTIONS FOR THE 2D  
EULER EQUATION

ON THE SOBOLEV STABILITY  
THRESHOLD FOR THE 2D MHD  
EQUATIONS WITH HORIZONTAL...

COUPLED SCHRÖDINGER-  
LOHE SYSTEMS OF QUANTUM  
SYNCHRONIZATION

DYNAMICS OF TURBULENT FLOW  
FROM THE PERSPECTIVE OF  
KOLMOGOROV'S THEORY...

SPARSE STABILITY FOR EULER  
EQUATIONS

THE IMMERSED INEXTENSIBLE  
FILAMENT PROBLEM

HETEROGENEOUS WASSERSTEIN  
GRADIENT FLOWS

STABILITY OF STRATIFIED DENSITY  
UNDER INCOMPRESSIBLE FLOW

ROTATING SOLUTIONS TO THE  
INCOMPRESSIBLE EULER-POISSON  
EQUATION WITH EXTERNAL PARTICLE

ON THE DYNAMICS OF MANY SMALL  
BODIES IN A FLUID

## A Schiffer-type problem with applications to stationary Euler flows

ANTONIO J. FERNÁNDEZ

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid

[antonioj.fernandez@uam.es](mailto:antonioj.fernandez@uam.es)

**Abstract:** *If on a smooth bounded domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  there is a nonconstant Neumann eigenfunction  $u$  that is locally constant on the boundary, must  $\Omega$  be a disk or an annulus?* This question can be understood as a weaker analog of the well-known Schiffer conjecture, in that the function  $u$  is here allowed to take a different constant value on each connected component of  $\partial\Omega$  yet many of the known rigidity properties of the original problem are essentially preserved. In this talk we provide a negative answer by constructing a family of nontrivial doubly connected domains  $\Omega$  with the above property. Then, we will show how our construction implies the existence of continuous, compactly supported stationary weak solutions to the 2D incompressible Euler equations which are not locally radial.

The talk is based on a joint work with Alberto Enciso, David Ruiz and Pieralberto Sicbaldi.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 25  
New trends and perspectives in  
fluid dynamics

A SCHIFFER-TYPE PROBLEM WITH  
APPLICATIONS TO STATIONARY  
EULER FLOWS

RIGOROUS DERIVATION OF REDUCED  
MODELS FOR OCEAN DYNAMICS

SHARP NONUNIQUENESS OF  
ADMISSIBLE SOLUTIONS FOR THE 2D  
EULER EQUATION

ON THE SOBOLEV STABILITY  
THRESHOLD FOR THE 2D MHD  
EQUATIONS WITH HORIZONTAL...

COUPLED SCHRÖDINGER-  
LOHE SYSTEMS OF QUANTUM  
SYNCHRONIZATION

DYNAMICS OF TURBULENT FLOW  
FROM THE PERSPECTIVE OF  
KOLMOGOROV'S THEORY...

SPARSE STABILITY FOR EULER  
EQUATIONS

THE IMMERSED INEXTENSIBLE  
FILAMENT PROBLEM

HETEROGENEOUS WASSERSTEIN  
GRADIENT FLOWS

STABILITY OF STRATIFIED DENSITY  
UNDER INCOMPRESSIBLE FLOW

ROTATING SOLUTIONS TO THE  
INCOMPRESSIBLE EULER-POISSON  
EQUATION WITH EXTERNAL PARTICLE

ON THE DYNAMICS OF MANY SMALL  
BODIES IN A FLUID

## Rigorous derivation of reduced models for ocean dynamics

FRANCESCO FANELLI

Basque Center for Applied Mathematics

[ffanelli@bcamath.org](mailto:ffanelli@bcamath.org)

**Abstract:** In this talk, we review some recent results about singular perturbation problems for systems of PDEs describing the dynamics of large-scale incompressible flows. From the physical standpoint, there are two main factors to take into account: the action of gravity and the rotation of the Earth. Thus, the primitive system we consider is given by the density-dependent incompressible Navier-Stokes equations written in a rotating reference frame. The goal is to understand the asymptotic dynamics in the fast rotation (i.e. low Rossby number) limit. We will show convergence to suitable reduced systems in two qualitatively different regimes: the quasi-homogeneous regime and the fully non-homogeneous regime. In passing, we will discuss how the mathematical analysis is able to capture well-known physical phenomena, like the Taylor-Proudman theorem and the Ekman pumping effect.

This talk is based on joint works with Isabelle Gallagher, Dimitri Cobb and Marco Bravin.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

SESIÓN ESPECIAL 25  
New trends and perspectives in  
fluid dynamics

A SCHIFFER-TYPE PROBLEM WITH  
APPLICATIONS TO STATIONARY  
EULER FLOWS

RIGOROUS DERIVATION OF REDUCED  
MODELS FOR OCEAN DYNAMICS

SHARP NONUNIQUENESS OF  
ADMISSIBLE SOLUTIONS FOR THE 2D  
EULER EQUATION

ON THE SOBOLEV STABILITY  
THRESHOLD FOR THE 2D MHD  
EQUATIONS WITH HORIZONTAL...

COUPLED SCHRÖDINGER-  
LOHE SYSTEMS OF QUANTUM  
SYNCHRONIZATION

DYNAMICS OF TURBULENT FLOW  
FROM THE PERSPECTIVE OF  
KOLMOGOROV'S THEORY...

SPARSE STABILITY FOR EULER  
EQUATIONS

THE IMMERSED INEXTENSIBLE  
FILAMENT PROBLEM

HETEROGENEOUS WASSERSTEIN  
GRADIENT FLOWS

STABILITY OF STRATIFIED DENSITY  
UNDER INCOMPRESSIBLE FLOW

ROTATING SOLUTIONS TO THE  
INCOMPRESSIBLE EULER-POISSON  
EQUATION WITH EXTERNAL PARTICLE

ON THE DYNAMICS OF MANY SMALL  
BODIES IN A FLUID

## Sharp nonuniqueness of admissible solutions for the 2D Euler equation

FRANCISCO MENGUAL

Max Planck Institute for Mathematics

[francisco.mengual@mis.mpg.de](mailto:francisco.mengual@mis.mpg.de)

**Abstract:** A weak solution to the Euler equation is called admissible if it does not increase the energy. These weak solutions coincide with a strong solution as long as the latter exists. In this talk we address the question of what is the threshold regularity at  $t = 0$  for which uniqueness of admissible solutions fails in 2D. We will show, by means of the convex integration method, sharpness of the weak-strong uniqueness principle, as well as sharpness of the Yudovich proof of uniqueness in the class of bounded admissible solutions.

SESIÓN ESPECIAL 25  
New trends and perspectives in  
fluid dynamics

A SCHIFFER-TYPE PROBLEM WITH  
APPLICATIONS TO STATIONARY  
EULER FLOWS

RIGOROUS DERIVATION OF REDUCED  
MODELS FOR OCEAN DYNAMICS

SHARP NONUNIQUENESS OF  
ADMISSIBLE SOLUTIONS FOR THE 2D  
EULER EQUATION

ON THE SOBOLEV STABILITY  
THRESHOLD FOR THE 2D MHD  
EQUATIONS WITH HORIZONTAL...

COUPLED SCHRÖDINGER-  
LOHE SYSTEMS OF QUANTUM  
SYNCHRONIZATION

DYNAMICS OF TURBULENT FLOW  
FROM THE PERSPECTIVE OF  
KOLMOGOROV'S THEORY...

SPARSE STABILITY FOR EULER  
EQUATIONS

THE IMMERSED INEXTENSIBLE  
FILAMENT PROBLEM

HETEROGENEOUS WASSERSTEIN  
GRADIENT FLOWS

STABILITY OF STRATIFIED DENSITY  
UNDER INCOMPRESSIBLE FLOW

ROTATING SOLUTIONS TO THE  
INCOMPRESSIBLE EULER-POISSON  
EQUATION WITH EXTERNAL PARTICLE

ON THE DYNAMICS OF MANY SMALL  
BODIES IN A FLUID

JUEVES, 25 DE ENERO:  
12:30 – 13:00



## On the Sobolev Stability Threshold for the 2D MHD Equations with Horizontal Magnetic Dissipation

NIKLAS KNOBEL

Karlsruhe Institute of Technology

[niklas.knobel@kit.edu](mailto:niklas.knobel@kit.edu)

**Abstract:** We consider the evolution of the magnetohydrodynamic (MHD) equations in a periodic channel near a combination of Couette flow and constant magnetic field. We study the partial dissipation regime with full viscous and only horizontal magnetic dissipation. In particular, we show that this regime behaves qualitatively differently than both the fully dissipative and the non-resistive setting. For this data we establish an upper bound on the Sobolev stability threshold.

This is based on joint work with C. Zillinger.

SESIÓN ESPECIAL 25  
New trends and perspectives in  
fluid dynamics

A SCHIFFER-TYPE PROBLEM WITH  
APPLICATIONS TO STATIONARY  
EULER FLOWS

RIGOROUS DERIVATION OF REDUCED  
MODELS FOR OCEAN DYNAMICS

SHARP NONUNIQUENESS OF  
ADMISSIBLE SOLUTIONS FOR THE 2D  
EULER EQUATION

ON THE SOBOLEV STABILITY  
THRESHOLD FOR THE 2D MHD  
EQUATIONS WITH HORIZONTAL...

COUPLED SCHRÖDINGER-  
LOHE SYSTEMS OF QUANTUM  
SYNCHRONIZATION

DYNAMICS OF TURBULENT FLOW  
FROM THE PERSPECTIVE OF  
KOLMOGOROV'S THEORY...

SPARSE STABILITY FOR EULER  
EQUATIONS

THE IMMERSED INEXTENSIBLE  
FILAMENT PROBLEM

HETEROGENEOUS WASSERSTEIN  
GRADIENT FLOWS

STABILITY OF STRATIFIED DENSITY  
UNDER INCOMPRESSIBLE FLOW

ROTATING SOLUTIONS TO THE  
INCOMPRESSIBLE EULER-POISSON  
EQUATION WITH EXTERNAL PARTICLE

ON THE DYNAMICS OF MANY SMALL  
BODIES IN A FLUID

JUEVES, 25 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

## Coupled Schrödinger-Lohe Systems of Quantum Synchronization

DAVID NICHOLAS REYNOLDS

Universidad de Granada

[reynndn12@go.ugr.es](mailto:reynndn12@go.ugr.es)

**Abstract:** In this talk based off a joint work with Paolo Antonelli (GSSI) we will discuss some basics of synchronization dynamics. Then we will introduce a variation on the Schrödinger-Lohe model for quantum synchronization. The model is described by a system of Schrödinger equations, coupled through nonlinear, non-Hamiltonian interactions that drive the system towards phase synchronization. Moreover, interaction strength between different wave functions is regulated through intrinsic parameters  $\theta_j$ , that follow the Cucker-Smale communication protocol. Unlike the original Schrödinger-Lohe system, where the interaction strength was assumed to be uniform, in the variant we consider the total mass of each quantum oscillator is allowed to vary in time. These extended models yield configurations exhibiting phase, but not space, synchronization. The results are mainly based on the analysis of the ODE systems arising from the correlations, control over the well known Cucker-Smale dynamics, and the dynamics satisfied by the quantum order parameter.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:00 – 16:30

SESIÓN ESPECIAL 25  
New trends and perspectives in  
fluid dynamics

A SCHIFFER-TYPE PROBLEM WITH  
APPLICATIONS TO STATIONARY  
EULER FLOWS

RIGOROUS DERIVATION OF REDUCED  
MODELS FOR OCEAN DYNAMICS

SHARP NONUNIQUENESS OF  
ADMISSIBLE SOLUTIONS FOR THE 2D  
EULER EQUATION

ON THE SOBOLEV STABILITY  
THRESHOLD FOR THE 2D MHD  
EQUATIONS WITH HORIZONTAL...

COUPLED SCHRÖDINGER-  
LOHE SYSTEMS OF QUANTUM  
SYNCHRONIZATION

DYNAMICS OF TURBULENT FLOW  
FROM THE PERSPECTIVE OF  
KOLMOGOROV'S THEORY...

SPARSE STABILITY FOR EULER  
EQUATIONS

THE IMMERSED INEXTENSIBLE  
FILAMENT PROBLEM

HETEROGENEOUS WASSERSTEIN  
GRADIENT FLOWS

STABILITY OF STRATIFIED DENSITY  
UNDER INCOMPRESSIBLE FLOW

ROTATING SOLUTIONS TO THE  
INCOMPRESSIBLE EULER-POISSON  
EQUATION WITH EXTERNAL PARTICLE

ON THE DYNAMICS OF MANY SMALL  
BODIES IN A FLUID

## Dynamics of turbulent flow from the perspective of Kolmogorov's Theory of Turbulence

ELENA SALGUERO

Max Planck Institute for Mathematics

[elena.salguero@mis.mpg.de](mailto:elena.salguero@mis.mpg.de)

**Abstract:** In 1941, Kolmogorov developed the celebrated “1941 Theory of Turbulence” in a series of articles where he described the dynamics of turbulent flow from a statistical point of view. Specifically, he characterized turbulent motion in certain regimes through a system of non-linear PDEs, where the unknowns are interpreted as statistical averages. In this talk, we will study the existence of solutions for this system in the framework of fractional Sobolev spaces.

SESIÓN ESPECIAL 25  
New trends and perspectives in  
fluid dynamics

A SCHIFFER-TYPE PROBLEM WITH  
APPLICATIONS TO STATIONARY  
EULER FLOWS

RIGOROUS DERIVATION OF REDUCED  
MODELS FOR OCEAN DYNAMICS

SHARP NONUNIQUENESS OF  
ADMISSIBLE SOLUTIONS FOR THE 2D  
EULER EQUATION

ON THE SOBOLEV STABILITY  
THRESHOLD FOR THE 2D MHD  
EQUATIONS WITH HORIZONTAL...

COUPLED SCHRÖDINGER-  
LOHE SYSTEMS OF QUANTUM  
SYNCHRONIZATION

DYNAMICS OF TURBULENT FLOW  
FROM THE PERSPECTIVE OF  
KOLMOGOROV'S THEORY...

SPARSE STABILITY FOR EULER  
EQUATIONS

THE IMMERSED INEXTENSIBLE  
FILAMENT PROBLEM

HETEROGENEOUS WASSERSTEIN  
GRADIENT FLOWS

STABILITY OF STRATIFIED DENSITY  
UNDER INCOMPRESSIBLE FLOW

ROTATING SOLUTIONS TO THE  
INCOMPRESSIBLE EULER-POISSON  
EQUATION WITH EXTERNAL PARTICLE

ON THE DYNAMICS OF MANY SMALL  
BODIES IN A FLUID

JUEVES, 25 DE ENERO:  
16:30 – 17:00

## Sparse stability for Euler equations

OSCAR DOMINGUEZ

Universidad Complutense de Madrid

[oscadomi@ucm.es](mailto:oscadomi@ucm.es)

**Abstract:** A friendly introduction to new tools we use to study energy conservation of solutions to Euler equations of fluid dynamics. In particular, we develop sparse decompositions and extrapolation techniques.

The talk is based on joint work with M. Milman.

SESIÓN ESPECIAL 25  
New trends and perspectives in  
fluid dynamics

A SCHIFFER-TYPE PROBLEM WITH  
APPLICATIONS TO STATIONARY  
EULER FLOWS

RIGOROUS DERIVATION OF REDUCED  
MODELS FOR OCEAN DYNAMICS

SHARP NONUNIQUENESS OF  
ADMISSIBLE SOLUTIONS FOR THE 2D  
EULER EQUATION

ON THE SOBOLEV STABILITY  
THRESHOLD FOR THE 2D MHD  
EQUATIONS WITH HORIZONTAL...

COUPLED SCHRÖDINGER-  
LOHE SYSTEMS OF QUANTUM  
SYNCHRONIZATION

DYNAMICS OF TURBULENT FLOW  
FROM THE PERSPECTIVE OF  
KOLMOGOROV'S THEORY...

SPARSE STABILITY FOR EULER  
EQUATIONS

THE IMMERSED INEXTENSIBLE  
FILAMENT PROBLEM

HETEROGENEOUS WASSERSTEIN  
GRADIENT FLOWS

STABILITY OF STRATIFIED DENSITY  
UNDER INCOMPRESSIBLE FLOW

ROTATING SOLUTIONS TO THE  
INCOMPRESSIBLE EULER-POISSON  
EQUATION WITH EXTERNAL PARTICLE

ON THE DYNAMICS OF MANY SMALL  
BODIES IN A FLUID

JUEVES, 25 DE ENERO:  
17:00 – 17:30

## The immersed inextensible filament problem

EDUARDO GARCÍA-JUÁREZ

Universidad de Sevilla

[egarcia12@us.es](mailto:egarcia12@us.es)

**Abstract:** We consider the analysis of a prototypical model for vesicles and red blood cells. More specifically, we study the problem of a one-dimensional inextensible closed filament immersed in a two-dimensional Stokes fluid. The elasticity of the filament is modeled via a bending force corresponding to the Willmore energy. We will derive the boundary integral formulation of the problem and show that the evolution is governed by a parabolic PDE coupled with an elliptic one for the tension, proving its well-posedness in appropriate spaces.

This is a joint work with P.-C. Kuo and Y. Mori.

SESIÓN ESPECIAL 25  
New trends and perspectives in  
fluid dynamics

A SCHIFFER-TYPE PROBLEM WITH  
APPLICATIONS TO STATIONARY  
EULER FLOWS

RIGOROUS DERIVATION OF REDUCED  
MODELS FOR OCEAN DYNAMICS

SHARP NONUNIQUENESS OF  
ADMISSIBLE SOLUTIONS FOR THE 2D  
EULER EQUATION

ON THE SOBOLEV STABILITY  
THRESHOLD FOR THE 2D MHD  
EQUATIONS WITH HORIZONTAL...

COUPLED SCHRÖDINGER-  
LOHE SYSTEMS OF QUANTUM  
SYNCHRONIZATION

DYNAMICS OF TURBULENT FLOW  
FROM THE PERSPECTIVE OF  
KOLMOGOROV'S THEORY...

SPARSE STABILITY FOR EULER  
EQUATIONS

THE IMMERSED INEXTENSIBLE  
FILAMENT PROBLEM

HETEROGENEOUS WASSERSTEIN  
GRADIENT FLOWS

STABILITY OF STRATIFIED DENSITY  
UNDER INCOMPRESSIBLE FLOW

ROTATING SOLUTIONS TO THE  
INCOMPRESSIBLE EULER-POISSON  
EQUATION WITH EXTERNAL PARTICLE

ON THE DYNAMICS OF MANY SMALL  
BODIES IN A FLUID

JUEVES, 25 DE ENERO:  
17:30 – 18:00

## Heterogeneous Wasserstein gradient flows

DAVID POYATO

Universidad de Granada

davidpoyato@ugr.es

**Abstract:** Over the past ten years, optimal transport has become a fundamental tool in Calculus of Variations and Analysis of PDEs. The so called Wasserstein distance provides a new notion of distance between probability distributions and has triggered robust tools to study stability and long time behavior of PDEs with measure-valued solutions, through the theory of Wasserstein gradient flows initiated by L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré.

In this talk, I will introduce a novel optimal transport distance on the space of probability measures over a fiber bundle. Its associated transport cost is set as to penalize transport from one fiber to another, so that the resulting optimal transport problem becomes constrained to happen along fixed fibers. For simplicity, I will illustrate the construction in the Euclidean case  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ , where the quadratic cost is penalized in the second component. Despite the degeneracy of the cost, we prove that the space  $\mathcal{P}_{2,\nu}(\mathbb{R}^{2d})$  of probability measures with fixed marginal  $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  in the second component, endowed with the fibered Wasserstein distance  $W_{2,\nu}$  solving the above optimal transport problem, is a Polish space with a nice weak Riemannian structure reminiscent of the one proposed by F. Otto for the classical quadratic Wasserstein space.

First, I will present a general theory of gradient flows with respect to the new metric, which extends previous results by L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré for the quadratic Wasserstein space. Second, I will showcase several applications that identify a novel fibered gradient flow structure on a large class of evolution PDEs with heterogeneities ranging from heterogenous multi-agent systems and multispecies models arising in collective dynamics. Finally, I shall employ this tool to derive for the first time quantitative convergence rates to equilibrium in the so called Cucker-Smale alignment model with weakly singular interactions.

This is a joint work with J. Pezek (University of Warsaw).

VIERNES, 26 DE ENERO:  
11:30 – 12:00

SESIÓN ESPECIAL 25  
New trends and perspectives in  
fluid dynamics

A SCHIFFER-TYPE PROBLEM WITH  
APPLICATIONS TO STATIONARY  
EULER FLOWS

RIGOROUS DERIVATION OF REDUCED  
MODELS FOR OCEAN DYNAMICS

SHARP NONUNIQUENESS OF  
ADMISSIBLE SOLUTIONS FOR THE 2D  
EULER EQUATION

ON THE SOBOLEV STABILITY  
THRESHOLD FOR THE 2D MHD  
EQUATIONS WITH HORIZONTAL...

COUPLED SCHRÖDINGER-  
LOHE SYSTEMS OF QUANTUM  
SYNCHRONIZATION

DYNAMICS OF TURBULENT FLOW  
FROM THE PERSPECTIVE OF  
KOLMOGOROV'S THEORY...

SPARSE STABILITY FOR EULER  
EQUATIONS

THE IMMERSIBLE INEXTENSIBLE  
FILAMENT PROBLEM

HETEROGENEOUS WASSERSTEIN  
GRADIENT FLOWS

STABILITY OF STRATIFIED DENSITY  
UNDER INCOMPRESSIBLE FLOW

ROTATING SOLUTIONS TO THE  
INCOMPRESSIBLE EULER-POISSON  
EQUATION WITH EXTERNAL PARTICLE

ON THE DYNAMICS OF MANY SMALL  
BODIES IN A FLUID

## Stability of stratified density under incompressible flow

**JAEMING PARK**

University of Basel  
[jaemin.park@unibas.ch](mailto:jaemin.park@unibas.ch)

**Abstract:** In this talk, I will discuss asymptotic stability in the incompressible porous media equation in a periodic channel. It is well known that a stratified density, which strictly decreases in the vertical direction, is asymptotically stable under sufficiently small, smooth perturbations. We achieve improvements in the regularity assumptions on the perturbation and in the convergence rate. We apply a similar idea to the Stokes transport system. Instead of relying on the linearized equations, we directly address the nonlinear problem, and the decay of solutions will be obtained from the gradient flow structure of the equation.

SESIÓN ESPECIAL 25  
New trends and perspectives in  
fluid dynamics

A SCHIFFER-TYPE PROBLEM WITH  
APPLICATIONS TO STATIONARY  
EULER FLOWS

RIGOROUS DERIVATION OF REDUCED  
MODELS FOR OCEAN DYNAMICS

SHARP NONUNIQUENESS OF  
ADMISSIBLE SOLUTIONS FOR THE 2D  
EULER EQUATION

ON THE SOBOLEV STABILITY  
THRESHOLD FOR THE 2D MHD  
EQUATIONS WITH HORIZONTAL...

COUPLED SCHRÖDINGER-  
LOHE SYSTEMS OF QUANTUM  
SYNCHRONIZATION

DYNAMICS OF TURBULENT FLOW  
FROM THE PERSPECTIVE OF  
KOLMOGOROV'S THEORY...

SPARSE STABILITY FOR EULER  
EQUATIONS

THE IMMERSED INEXTENSIBLE  
FILAMENT PROBLEM

HETEROGENEOUS WASSERSTEIN  
GRADIENT FLOWS

STABILITY OF STRATIFIED DENSITY  
UNDER INCOMPRESSIBLE FLOW

ROTATING SOLUTIONS TO THE  
INCOMPRESSIBLE EULER-POISSON  
EQUATION WITH EXTERNAL PARTICLE

ON THE DYNAMICS OF MANY SMALL  
BODIES IN A FLUID

VIERNES, 26 DE ENERO:  
12:00 – 12:30

## Rotating solutions to the incompressible Euler-Poisson equation with external particle

BERNHARD KEPKA

Hausdorff Center for Mathematics

[kepka@iam.uni-bonn.de](mailto:kepka@iam.uni-bonn.de)

**Abstract:** The shape of fluid objects due to the combination of rotational and self-gravitating forces is a classical research field which has been extensively considered for different fluid models, in particular for the incompressible Euler equations.

In this talk we consider an incompressible, two-dimensional fluid body, together with a self-induced attractive force. Furthermore, it is perturbed by an external particle with small mass. The shape of the body is assumed to be close to the unit disk, changing due to the interaction with the particle. In addition, the whole configuration rotates around its center of mass.

We construct solutions to the incompressible Euler-Poisson equation, which are associated with steady states in a rotating coordinate system, via perturbative methods. Moreover, we study a large class of internal motion of the fluid body.

In addition, if time allows we give an account of a work in progress consisting of the corresponding problem in three dimensions.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
12:30 – 13:00

SESIÓN ESPECIAL 25  
New trends and perspectives in  
fluid dynamics

A SCHIFFER-TYPE PROBLEM WITH  
APPLICATIONS TO STATIONARY  
EULER FLOWS

RIGOROUS DERIVATION OF REDUCED  
MODELS FOR OCEAN DYNAMICS

SHARP NONUNIQUENESS OF  
ADMISSIBLE SOLUTIONS FOR THE 2D  
EULER EQUATION

ON THE SOBOLEV STABILITY  
THRESHOLD FOR THE 2D MHD  
EQUATIONS WITH HORIZONTAL...

COUPLED SCHRÖDINGER-  
LOHE SYSTEMS OF QUANTUM  
SYNCHRONIZATION

DYNAMICS OF TURBULENT FLOW  
FROM THE PERSPECTIVE OF  
KOLMOGOROV'S THEORY...

SPARSE STABILITY FOR EULER  
EQUATIONS

THE IMMERSED INEXTENSIBLE  
FILAMENT PROBLEM

HETEROGENEOUS WASSERSTEIN  
GRADIENT FLOWS

STABILITY OF STRATIFIED DENSITY  
UNDER INCOMPRESSIBLE FLOW

ROTATING SOLUTIONS TO THE  
INCOMPRESSIBLE EULER-POISSON  
EQUATION WITH EXTERNAL PARTICLE

ON THE DYNAMICS OF MANY SMALL  
BODIES IN A FLUID



## On the dynamics of many small bodies in a fluid

ARGHIR ZARNESCU

Basque Center for Applied Mathematics

[azarnescu@bcamath.org](mailto:azarnescu@bcamath.org)

**Abstract:** We consider the motion of  $N$  rigid bodies – compact sets  $(\mathcal{S}_\varepsilon^1, \dots, \mathcal{S}_\varepsilon^N)_{\varepsilon>0}$  – immersed in a viscous incompressible fluid contained in a domain in the Euclidean space  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ . We show the fluid flow is not influenced by the presence of the infinitely many bodies in the asymptotic limit  $\varepsilon \rightarrow 0$  and  $N = N(\varepsilon) \rightarrow \infty$  as soon as

$$\text{diam}[\mathcal{S}_\varepsilon^i] \rightarrow 0 \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, N(\varepsilon).$$

The result depends solely on the geometry of the bodies and is independent of their mass densities. Collisions are allowed and the initial data are arbitrary with finite energy.

This is joint work with Eduard Feireisl and Arnab Roy.

VIERNES, 26 DE ENERO:  
13:00 – 13:30

SESIÓN ESPECIAL 25  
New trends and perspectives in  
fluid dynamics

A SCHIFFER-TYPE PROBLEM WITH  
APPLICATIONS TO STATIONARY  
EULER FLOWS

RIGOROUS DERIVATION OF REDUCED  
MODELS FOR OCEAN DYNAMICS

SHARP NONUNIQUENESS OF  
ADMISSIBLE SOLUTIONS FOR THE 2D  
EULER EQUATION

ON THE SOBOLEV STABILITY  
THRESHOLD FOR THE 2D MHD  
EQUATIONS WITH HORIZONTAL...

COUPLED SCHRÖDINGER-  
LOHE SYSTEMS OF QUANTUM  
SYNCHRONIZATION

DYNAMICS OF TURBULENT FLOW  
FROM THE PERSPECTIVE OF  
KOLMOGOROV'S THEORY...

SPARSE STABILITY FOR EULER  
EQUATIONS

THE IMMERSED INEXTENSIBLE  
FILAMENT PROBLEM

HETEROGENEOUS WASSERSTEIN  
GRADIENT FLOWS

STABILITY OF STRATIFIED DENSITY  
UNDER INCOMPRESSIBLE FLOW

ROTATING SOLUTIONS TO THE  
INCOMPRESSIBLE EULER-POISSON  
EQUATION WITH EXTERNAL PARTICLE

ON THE DYNAMICS OF MANY SMALL  
BODIES IN A FLUID

# SESIONES PÓSTER

## SESIONES PÓSTER

ROTATIONAL SURFACES WITH  
PRESCRIBED CURVATURES

MEASURE-PRESERVING MAPPINGS  
FROM THE UNIT CUBE TO SPHERES...

LOOKING AT WELFARE FROM A  
MATHEMATICAL APPROACH BASED...

PROPUESTA DE INTERVENCIÓN  
BASADA EN MATHIGON...

MEHLER-HEINE ASYMPTOTICS FOR  
THE MEIJER G-FUNCTION

APPLICATION OF VAN HIELE'S THEORY  
WITH DYNAMIC GEOMETRY...

EXTENSION CRITERIA FOR INDIVIDUAL  
RANKINGS REVISITED

ALETHIC MODAL LOGIC IN  
ARISTOTLE' ANALYTICS

SEMI-G-PERIODICITY, G-UNIFORM  
RECURRENCE...

ORTHOGONAL POLYNOMIAL KERNELS  
USED IN SUPPORT...

ON A MOMENT GENERALIZATION OF  
SOME CLASSICAL...

COMPLEJOS ELÍPTICOS Y  
DESCOMPOSICIÓN DE HODGE

JENSEN-TYPE INEQUALITIES FOR  
M-CONVEX FUNCTIONS...

MINIMAL SURFACES WITH FREE  
BOUNDARIES...

FUNCIONES ANALÍTICAS QUE  
INTERPOLAN FAMILIAS...

MODELIZACIÓN ESTADÍSTICA DE  
ACCIDENTES DE TRÁFICO LABORALES

IMPLEMENTACIÓN DE LOS ODS EN  
ASIGNATURAS DE ESTADÍSTICA...

NEW CONNECTIONS BETWEEN  
APPROXIMATION SPACES...

ON SIMULTANEOUS DENSITY ORDER  
FROM SHIFT INVARIANT...

ÁRBOLES, DESARREGLOS Y FAMILIAS  
DE CAMINOS...

GREEDINESS AND POLYNOMIALS OF  
CONSTANT COEFFICIENTS

NEW MILNE-TYPE INEQUALITIES VIA  
FRACTIONAL CALCULUS

A PROBABILISTIC APPROACH TO  
MULTIVARIATE TIME FORECASTING...

RECOVERING THE MILITARY ENIGMA  
USING PERMUTATIONS...

TRANSITION TO TURBULENCE IN A  
CONVECTION PROBLEM

STABILITY OF SOME ANTICIPATING  
SEMILINEAR STOCHASTIC...

IMPORTANCIA DE GEOGEBRA EN LA  
SOLUCIÓN DE MATRICES...

## Rotational surfaces with prescribed curvatures

ILDEFONSO CASTRO, PAULA CARRETERO

Departamento de Matemáticas, Universidad de Jaén; IMAG, Universidad de Granada

icastro@ujaen.es

**Abstract:** Based on the notion of *geometric linear momentum* of a plane curve [2], we made a contribution to the study of rotational Weingarten surfaces in Euclidean 3-space (see [1]) reducing any type of Weingarten condition on a rotational surface (i.e. a functional relation between the principal curvatures, see [4]) to a first order differential equation on the momentum of the generating curve.

Using a similar technique, we now deal with the problem of prescribing different types of curvatures (principal curvatures, mean curvature, Gauss curvature, Casorati curvature, harmonic mean curvature) on rotational surfaces in terms of arbitrary continuous functions depending on the distance from the surface to the axis of revolution. Compared to Kenmotsu's idea in [3], instead of taking an *intrinsic* parameter such as the arc length of the generating curve as the independent variable of the functions to be prescribed, we choose an *extrinsic* natural variable such as the distance from the surface to the axis of revolution and the calculations are equally feasible to carry out.

### References

- [1] P. Carretero, I. Castro (2022). A new approach to rotational Weingarten surfaces. *Mathematics*, 2022 10(4), 578; <https://doi.org/10.3390/math10040578>
- [2] I. Castro, I. Castro-Infantes (2016). Plane curves with curvature depending on distance to a line. *Diff. Geom. Appl.*, 44, 77–97.
- [3] K. Kenmotsu (1980). Surfaces of revolution with prescribed mean curvature. *Tōhoku Math. J.*, 32, 147–153.
- [4] J. Weingarten (1861). Ueber eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen. *J. Reine Angew. Math.*, 59, 382–393.

**Acknowledgments:** Proyecto PID2020-117868GB-I00 y Unidad de Excelencia “Maria de Maeztu” IMAG CEX2020-001105-M financiada por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/

## Measure-preserving mappings from the unit cube to spheres and projective spaces

PEDRO R. LÓPEZ-GÓMEZ, CARLOS BELTRÁN, DAMIR FERIZOVIĆ  
 Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria  
[lopezpr@unican.es](mailto:lopezpr@unican.es)

**Abstract:** The problem of finding measure-preserving mappings from one manifold to another has received considerable attention over the past few years due to their numerous applications in fields like cartography, computer graphics, medical imaging, signal processing, or, in general, in any area that requires good discretizations of a certain space. Thus, when looking for uniform collections of points or uniform grids (that is, grids all of whose cells have the same volume) on a manifold  $\mathcal{M}$ , a frequent approach consists on generating points or grids with that property on a simpler, easily discretizable space, like the unit cube, and then transporting them to  $\mathcal{M}$  through a measure-preserving mapping. In this sense, most of the research has been carried out for two-dimensional and three-dimensional manifolds, but little is known for higher-dimensional spaces.

In this poster ([1]) I will show how to construct measure-preserving mappings from the unit  $d$ -dimensional cube to the compact rank one symmetric spaces, namely the  $d$ -dimensional sphere, the real, complex, and quaternionic projective spaces, and the Cayley plane.

This is joint work with Carlos Beltrán and Damir Ferizović.

### References

- [1] C. Beltrán, D. Ferizović, P. R. López-Gómez. Measure-preserving mappings from the unit cube to some symmetric spaces. Preprint arXiv:2303.00405.

ROTATIONAL SURFACES WITH  
PRESCRIBED CURVATURESMEASURE-PRESERVING MAPPINGS  
FROM THE UNIT CUBE TO SPHERES...LOOKING AT WELFARE FROM A  
MATHEMATICAL APPROACH BASED...PROPUESTA DE INTERVENCIÓN  
BASADA EN MATHIGON...MEHLER-HEINE ASYMPTOTICS FOR  
THE MEIJER G-FUNCTIONAPPLICATION OF VAN HIELE'S THEORY  
WITH DYNAMIC GEOMETRY...EXTENSION CRITERIA FOR INDIVIDUAL  
RANKINGS REVISITEDALETHIC MODAL LOGIC IN  
ARISTOTLE' ANALYTICSSEMI-G-PERIODICITY, G-UNIFORM  
RECURRENCE...ORTHOGONAL POLYNOMIAL KERNELS  
USED IN SUPPORT...ON A MOMENT GENERALIZATION OF  
SOME CLASSICAL...COMPLEJOS ELÍPTICOS Y  
DESCOMPOSICIÓN DE HODGEJENSEN-TYPE INEQUALITIES FOR  
M-CONVEX FUNCTIONS...MINIMAL SURFACES WITH FREE  
BOUNDARIES...FUNCIONES ANALÍTICAS QUE  
INTERPOLAN FAMILIAS...MODELIZACIÓN ESTADÍSTICA DE  
ACCIDENTES DE TRÁFICO LABORALESIMPLEMENTACIÓN DE LOS ODS EN  
ASIGNATURAS DE ESTADÍSTICA...NEW CONNECTIONS BETWEEN  
APPROXIMATION SPACES...ON SIMULTANEOUS DENSITY ORDER  
FROM SHIFT INVARIANT...ÁRBOLES, DESARREGLOS Y FAMILIAS  
DE CAMINOS...GREEDINESS AND POLYNOMIALS OF  
CONSTANT COEFFICIENTSNEW MILNE-TYPE INEQUALITIES VIA  
FRACTIONAL CALCULUSA PROBABILISTIC APPROACH TO  
MULTIVARIATE TIME FORECASTING...RECOVERING THE MILITARY ENIGMA  
USING PERMUTATIONS...TRANSITION TO TURBULENCE IN A  
CONVECTION PROBLEMSTABILITY OF SOME ANTICIPATING  
SEMILINEAR STOCHASTIC...IMPORTANCIA DE GEOGEBRA EN LA  
SOLUCIÓN DE MATRICES...

## Looking at welfare from a mathematical approach based on function spaces: searching for sustainability and fairness

ANA MUNÁRRIZ IRIARTE, M<sup>a</sup> JESÚS CAMPIÓN ARRASTIA,  
ASIER ESTEVAN MUGUERZA, ESTEBAN INDURÁIN ERASO

Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas, Universidad Pública de Navarra  
[ana.munarriz@unavarra.es](mailto:ana.munarriz@unavarra.es)

**Abstract:** The main objective of this research is to provide a mathematical formalization, through a novel approach based on function spaces, of concepts such as utility streams, welfare criteria, and axioms related to sustainability and fairness, all of them widely used in the Mathematical Economics literature regarding Social Choice.

The introduction of a continuous approach based on functional spaces allows us to use new mathematical insights, techniques and tools in a suitable way to tackle its analysis.

Among the main results obtained, the adaptation to functional spaces of the main welfare and fairness criteria used in the academic literature is set. Equivalently, the same is done with the main sustainability criteria.

Finally, a set of sequential criteria linked to the notion of fairness are proposed. These criteria allow the comparison between functions representing possible welfare paths. Based on such fairness criteria, a preference over the set of possible welfare paths is defined and it is verified that such preference is consistent with the idea of sustainability, verifying Pareto's axiom, the non-dictatorship of the present and the non-dictatorship of the future. Thus, a welfare criterion is formalized, that can be understood as being both sustainable and fair.

### References

- [1] G. Chichilnisky (1996). An axiomatic approach to sustainable development. *Social Choice and Welfare* 13, 231–257.

### SESIONES PÓSTER

ROTATIONAL SURFACES WITH  
PRESCRIBED CURVATURES

MEASURE-PRESERVING MAPPINGS  
FROM THE UNIT CUBE TO SPHERES...

LOOKING AT WELFARE FROM A  
MATHEMATICAL APPROACH BASED...

PROPUESTA DE INTERVENCIÓN  
BASADA EN MATHIGON...

MEHLER–HEINE ASYMPTOTICS FOR  
THE MEIJER G-FUNCTION

APPLICATION OF VAN HIELE'S THEORY  
WITH DYNAMIC GEOMETRY...

EXTENSION CRITERIA FOR INDIVIDUAL  
RANKINGS REVISITED

ALETHIC MODAL LOGIC IN  
ARISTOTLE' ANALYTICS

SEMI-G-PERIODICITY, G-UNIFORM  
RECURRENCE...

ORTHOGONAL POLYNOMIAL KERNELS  
USED IN SUPPORT...

ON A MOMENT GENERALIZATION OF  
SOME CLASSICAL...

COMPLEJOS ELÍPTICOS Y  
DESCOMPOSICIÓN DE HODGE

JENSEN-TYPE INEQUALITIES FOR  
M-CONVEX FUNCTIONS...

MINIMAL SURFACES WITH FREE  
BOUNDARIES...

FUNCIONES ANALÍTICAS QUE  
INTERPOLAN FAMILIAS...

MODELIZACIÓN ESTADÍSTICA DE  
ACCIDENTES DE TRÁFICO LABORALES

IMPLEMENTACIÓN DE LOS ODS EN  
ASIGNATURAS DE ESTADÍSTICA...

NEW CONNECTIONS BETWEEN  
APPROXIMATION SPACES...

ON SIMULTANEOUS DENSITY ORDER  
FROM SHIFT INVARIANT...

ÁRBOLES, DESARREGLOS Y FAMILIAS  
DE CAMINOS...

GREEDINESS AND POLYNOMIALS OF  
CONSTANT COEFFICIENTS

NEW MILNE-TYPE INEQUALITIES VIA  
FRACTIONAL CALCULUS

A PROBABILISTIC APPROACH TO  
MULTIVARIATE TIME FORECASTING...

RECOVERING THE MILITARY ENIGMA  
USING PERMUTATIONS...

TRANSITION TO TURBULENCE IN A  
CONVECTION PROBLEM

STABILITY OF SOME ANTICIPATING  
SEMILINEAR STOCHASTIC...

IMPORTANCIA DE GEÓMETRIA EN LA  
SOLUCIÓN DE MATRICES...

## Propuesta de intervención basada en Mathigon para alumnado de secundaria

JAVIER PERUJO, ÁNGEL ALBERTO MAGREÑÁN, LARA ORCOS

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

[javier.perujo@alum.unirioja.es](mailto:javier.perujo@alum.unirioja.es)

**Resumen:** El auge de las TIC a nivel sociocultural en los últimos años supone el uso de estas mismas en el campo de la enseñanza. Esto, junto con la no mejoría significativa de los resultados en el uso de metodologías tradicionales en el proceso de enseñanza-aprendizaje del alumnado, justifica la introducción de esta innovación, el uso de las TIC. Por tanto, esta actividad propone este uso con, en este caso, Mathigon como herramienta digital para distintas enseñanzas y actividades del alumnado de secundaria de matemáticas..

**Agradecimientos:** Esta investigación forma parte del proyecto “PID 31: Adquisición de competencia matemática a través de tecnologías en diferentes etapas” financiado por los proyectos de Innovación Docente 2022-2023 de la Universidad de La Rioja

ROTATIONAL SURFACES WITH  
PRESCRIBED CURVATURES

MEASURE-PRESERVING MAPPINGS  
FROM THE UNIT CUBE TO SPHERES...

LOOKING AT WELFARE FROM A  
MATHEMATICAL APPROACH BASED...

PROPUESTA DE INTERVENCIÓN  
BASADA EN MATHIGON...

MEHLER-HEINE ASYMPTOTICS FOR  
THE MEIJER G-FUNCTION

APPLICATION OF VAN HIELE'S THEORY  
WITH DYNAMIC GEOMETRY...

EXTENSION CRITERIA FOR INDIVIDUAL  
RANKINGS REVISITED

ALETHIC MODAL LOGIC IN  
ARISTOTLE' ANALYTICS

SEMI-G-PERIODICITY, G-UNIFORM  
RECURRENCE...

ORTHOGONAL POLYNOMIAL KERNELS  
USED IN SUPPORT...

ON A MOMENT GENERALIZATION OF  
SOME CLASSICAL...

COMPLEJOS ELÍPTICOS Y  
DESCOMPOSICIÓN DE HODGE

JENSEN-TYPE INEQUALITIES FOR  
M-CONVEX FUNCTIONS...

MINIMAL SURFACES WITH FREE  
BOUNDARIES...

FUNCIONES ANALÍTICAS QUE  
INTERPOLAN FAMILIAS...

MODELIZACIÓN ESTADÍSTICA DE  
ACCIDENTES DE TRÁFICO LABORALES

IMPLEMENTACIÓN DE LOS ODS EN  
ASIGNATURAS DE ESTADÍSTICA...

NEW CONNECTIONS BETWEEN  
APPROXIMATION SPACES...

ON SIMULTANEOUS DENSITY ORDER  
FROM SHIFT INVARIANT...

ÁRBOLES, DESARREGLOS Y FAMILIAS  
DE CAMINOS...

GREEDINESS AND POLYNOMIALS OF  
CONSTANT COEFFICIENTS

NEW MILNE-TYPE INEQUALITIES VIA  
FRACTIONAL CALCULUS

A PROBABILISTIC APPROACH TO  
MULTIVARIATE TIME FORECASTING...

RECOVERING THE MILITARY ENIGMA  
USING PERMUTATIONS...

TRANSITION TO TURBULENCE IN A  
CONVECTION PROBLEM

STABILITY OF SOME ANTICIPATING  
SEMILINEAR STOCHASTIC...

IMPORTANCIA DE GEOGEBRA EN LA  
SOLUCIÓN DE MATRICES...

## Mehler–Heine asymptotics for the Meijer $G$ -function

CRISTINA RODRÍGUEZ-PERALES, JUAN F. MAÑAS-MAÑAS,

JUAN J. MORENO-BALCÁZAR

Departamento de Matemáticas, Universidad de Almería, Spain

[crp170@ual.es](mailto:crp170@ual.es)

**Abstract:** Mehler–Heine asymptotics is characterized by establishing a limit relation between some scaled polynomials and Bessel functions of the first kind (see [3]). In this work we tackle the study of this local asymptotics for some cases of the Meijer  $G$ -function (see [2]). We also achieve some consequences about the asymptotic behaviour of the zeros of this function using the well-known Hurwitz’s theorem (see [1]).

### References

- [1] C.F. Bracciali, J.J. Moreno-Balcázar (2015). On the zeros of a class of generalized hypergeometric polynomials, *Appl. Math. Comput.*, 253, 151–158.
- [2] F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark (eds.) (2010). *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press.
- [3] G. Szegő (1975). *Orthogonal polynomials*, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, fourth edition.

**Acknowledgments:** This work has been supported by PPIT-UAL, Junta de Andalucía-ESF. Programme: 54.A. Application: 741. The work of JFMM and JJMB is supported by the project PID2021-124472NBI00 funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033 and by “ERDF A way of making Europe”. In addition, the authors are partially supported by the Research Group FQM-0229 and by the research centre CDTIME of Universidad de Almería.

## Application of Van Hiele's theory with dynamic geometry to improve geometrical competences

YERAY RODRÍGUEZ RINCÓN, ÁNGEL ALBERTO MANGREÑÁN RUIZ  
 Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas, Universidad Pública de Navarra  
[yeray.rodriguez@unavarra.es](mailto:yeray.rodriguez@unavarra.es)

**Abstract:** Based on research conducted with first year Spanish Baccalaureate students, it has been found that there are weaknesses in the cognitive development related to geometry. In order to address this issue and improve the acquisition of geometric thinking skills, as well as students' perception of geometry in terms of usefulness, motivation and confidence, an instructional design is proposed.

This intervention is rooted in Van Hiele's theory of levels of thinking, and accordingly, the activities are structured based on his didactic model. To make the learning process more engaging for the students and to provide practical applications, the intervention proposes the use of BlocksCAD, a 3D modeling software. This software not only attracts students' interest, but also facilitates the development of other mathematically relevant competencies, such as computational thinking, which are highly valued in the curriculum.

### References

- [1] A. Bandura (1977). Self-efficacy: Toward a unifying theory of behavioral change. *Psychological Review*, 84, 191–215.
- [2] J. Garofalo, F. K. Lester (1985). Metacognition, Cognitive Monitoring, and Mathematical Performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(3), 163.
- [3] F. Pajares, D. H. Schunk (2001). Self-beliefs and school success: Self-efficacy, self-concept, and school achievement. *Perception*, 11(2), 239–266.
- [4] A. H. Schoenfeld (1992). *Learning To Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense-Making in Mathematics*. MacMillan.
- [5] P. M. Van Hiele (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Academic Press.



## Extension criteria for individual rankings revisited: possibility and impossibility results

SERGIO SARA, ASIER ESTEVAN, ESTEBAN INDURÁIN

Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas. Universidad Pública de Navarra. Pamplona  
sara.142587@e.unavarra.es

**Abstract:** Throughout this poster, our main idea is to study and revise different extension criteria introduced to search for extensions of a complete preorder defined on a nonempty set to its power set. We pay attention not only to classical criteria, but to new ones that may also lead to improve results on both incompatibility or existence of suitable extensions.

Suppose that we are given a nonempty set  $X$  endowed with a complete preorder (i.e.: a transitive and complete binary relation)  $\preceq$ . In a way,  $\preceq$  defines a ranking on the elements or “individuals” of the set  $X$ . Imagine that we can extend this ordering to the power set of  $X$ , namely the collection of all the subsets or “collectives” of  $X$ , that we shall denote  $\mathcal{P}(X)$ . So, we would be looking for another complete preorder, say  $\preceq_E$ , now defined on  $\mathcal{P}(X)$ , and satisfying that given  $x, y \in X$  it holds true that  $x \preceq y \Leftrightarrow \{x\} \preceq_E \{y\}$ .

Among possible extensions, we may be specially interested in searching for those that accomplish some suitable or “common sense” criteria imposed a priori in order for the extensions (if any) to be feasible for some objectives or desired properties to be fulfilled by a new ranking now defined not just on the singletons of  $X$  (the “individuals”) but, instead, on all the subsets of  $X$  (the “collectives”).

Essentially, the main fact to analyze was the following: *once some criteria have been imposed, in order to extend a ranking from a finite set to its power set, we must prove or disprove the existence of some extension.* Given a set of criteria we wonder if it is compatible (therefore giving rise to some extension) or not.

**Acknowledgments:** This work has been partially supported by the research project PID2019-108392GB-I00 (AEI/10.13039/501100011033). The authors acknowledge financial support from the Ministry of Science and Innovation of Spain under grants PID2021-127799NBI00 as well as from the UPNA under grant JIUPNA19-2022.

## Alethic modal logic in Aristotle' Analytics

L. SEGURA-ABAD, J.L. USÓ-DOMÉNECH, J.A. NESCOLARDE-SELVA, H. GASH

Department of Applied Mathematics, University of Alicante

[lorena.segura@ua.es](mailto:lorena.segura@ua.es)

**Abstract:** In this work, the authors try to prove that, although the Stagirite does not use its own terminology for the logic schemes that analyzes, we can interpret them as equivalent to modus ponens, modus tollens and the statement of the consequent in a Phylonian conditional. We defend the idea that Aristotle's Analytics can be interpreted within the current S5 modal logic, without the need to postulate a supposed additional rule that would have formal validity problems.

### References

- [1] G.E.M. Anscombe, P.Th. Geach (1961). Three Philosophers: Aristotle, Aquinas; Frege. Cornell University Press.
- [2] Aristotle (1964). Obras. Aguilar. [3] Aristotle (1988). Lógica. Gredos.
- [4] R. Girle (2000). Modal Logics and Philosophy. Acumen. [5] C.I. Lewis, C.H.Lan-gford (1959). Symbolic Logic. Dover.
- [6] B. Mates (1972). Elementary Logic. Oxford University Press.
- [7] J. Nescolarde-Selva, J.L. Usó-Doménech, H. Gash (2021). Belief, Knowledge and Faith: A Logical Modal Theory. Foundations of Science. 26(2), 453-474.
- [8] A. Plantinga (1965). The Ontological Argument from St. Anselm to Contemporary Philosophers. Doubleday.
- [9] R. Routley, H. Montgomery (1968). On Systems Containing Aristotle's Thesis. The Journal of Symbolic Logic, 33 (1),82-96.

### SESIONES PÓSTER

ROTATIONAL SURFACES WITH  
PRESCRIBED CURVATURES

MEASURE-PRESERVING MAPPINGS  
FROM THE UNIT CUBE TO SPHERES...

LOOKING AT WELFARE FROM A  
MATHEMATICAL APPROACH BASED...

PROPUESTA DE INTERVENCIÓN  
BASADA EN MATHIGON...

MEHLER-HEINE ASYMPTOTICS FOR  
THE MEIJER G-FUNCTION

APPLICATION OF VAN HIELE'S THEORY  
WITH DYNAMIC GEOMETRY...

EXTENSION CRITERIA FOR INDIVIDUAL  
RANKINGS REVISITED

ALETHIC MODAL LOGIC IN  
ARISTOTLE' ANALYTICS

SEMI-G-PERIODICITY, G-UNIFORM  
RECURRENCE...

ORTHOGONAL POLYNOMIAL KERNELS  
USED IN SUPPORT...

ON A MOMENT GENERALIZATION OF  
SOME CLASSICAL...

COMPLEJOS ELÍPTICOS Y  
DESCOMPOSICIÓN DE HODGE

JENSEN-TYPE INEQUALITIES FOR  
M-CONVEX FUNCTIONS...

MINIMAL SURFACES WITH FREE  
BOUNDARIES...

FUNCIONES ANALÍTICAS QUE  
INTERPOLAN FAMILIAS...

MODELIZACIÓN ESTADÍSTICA DE  
ACCIDENTES DE TRÁFICO LABORALES

IMPLEMENTACIÓN DE LOS ODS EN  
ASIGNATURAS DE ESTADÍSTICA...

NEW CONNECTIONS BETWEEN  
APPROXIMATION SPACES...

ON SIMULTANEOUS DENSITY ORDER  
FROM SHIFT INVARIANT...

ÁRBOLES, DESARREGLOS Y FAMILIAS  
DE CAMINOS...

GREEDINESS AND POLYNOMIALS OF  
CONSTANT COEFFICIENTS

NEW MILNE-TYPE INEQUALITIES VIA  
FRACTIONAL CALCULUS

A PROBABILISTIC APPROACH TO  
MULTIVARIATE TIME FORECASTING...

RECOVERING THE MILITARY ENIGMA  
USING PERMUTATIONS...

TRANSITION TO TURBULENCE IN A  
CONVECTION PROBLEM

STABILITY OF SOME ANTICIPATING  
SEMILINEAR STOCHASTIC...

IMPORTANCIA DE GEOGEBRA EN LA  
SOLUCIÓN DE MATRICES...

## Semi- $c$ -periodicity, $c$ -uniform recurrence and $c$ -almost automorphy in the complex plane

H. OUNIS, J.M. SEPULCRE

Departamento de Matemáticas, Universidad de Alicante  
hadjerounis413@gmail.com, JM.Sepulcre@ua.es

**Abstract:** In this poster we will develop the concepts of semi- $c$ -periodicity,  $c$ -uniform recurrence and  $c$ -almost automorphy for functions defined on vertical strips in the complex plane, where  $c$  is a non-zero complex number. As an extension of the study performed for functions defined on the real axis (see [1, 2]), we will show the main properties of these classes of functions and establish their connections with the more known class of  $c$ -almost periodic functions (see [3, 4]). Additionally, we also use this approach to introduce an asymptotic version of these new classes of functions.

### References

- [1] M. T. Khalladi, M. Kostić, M. Pinto, A. Rahmani, D. Velinov (2021). On semi- $c$ -periodic functions. *J. Math.*, Article ID 6620625.
- [2] M. T. Khalladi, M. Kostić, M. Pinto, A. Rahmani, D. Velinov (2023).  $(\omega, c)$ -almost periodic type functions and applications. *Filomat*, 37 (2), 363–385.
- [3] H. Ounis, J.M. Sepulcre (2023). The class of  $c$ -almost periodic functions defined on vertical strips in the complex plane. *Rev. Mat. Complut.*, 36, 707-724.
- [4] H. Ounis, J.M. Sepulcre (2023). Stepanov and Weyl classes of  $c$ -almost periodic type functions. Accepted in *Complex Anal. Oper. Theory*.

ROTATIONAL SURFACES WITH  
PRESCRIBED CURVATURES

MEASURE-PRESERVING MAPPINGS  
FROM THE UNIT CUBE TO SPHERES...

LOOKING AT WELFARE FROM A  
MATHEMATICAL APPROACH BASED...

PROPUESTA DE INTERVENCIÓN  
BASADA EN MATHIGON...

MEHLER–HEINE ASYMPTOTICS FOR  
THE MEIJER G-FUNCTION

APPLICATION OF VAN HIELE'S THEORY  
WITH DYNAMIC GEOMETRY...

EXTENSION CRITERIA FOR INDIVIDUAL  
RANKINGS REVISITED

ALETHIC MODAL LOGIC IN  
ARISTOTLE' ANALYTICS

SEMI- $c$ -PERIODICITY,  $c$ -UNIFORM  
RECURRENCE...

ORTHOGONAL POLYNOMIAL KERNELS  
USED IN SUPPORT...

ON A MOMENT GENERALIZATION OF  
SOME CLASSICAL...

COMPLEJOS ELÍPTICOS Y  
DESCOMPOSICIÓN DE HODGE

JENSEN-TYPE INEQUALITIES FOR  
M-CONVEX FUNCTIONS...

MINIMAL SURFACES WITH FREE  
BOUNDARIES...

FUNCIONES ANALÍTICAS QUE  
INTERPOLAN FAMILIAS...

MODELIZACIÓN ESTADÍSTICA DE  
ACCIDENTES DE TRÁFICO LABORALES

IMPLEMENTACIÓN DE LOS ODS EN  
ASIGNATURAS DE ESTADÍSTICA...

NEW CONNECTIONS BETWEEN  
APPROXIMATION SPACES...

ON SIMULTANEOUS DENSITY ORDER  
FROM SHIFT INVARIANT...

ÁRBOLES, DESARREGLOS Y FAMILIAS  
DE CAMINOS...

GREEDINESS AND POLYNOMIALS OF  
CONSTANT COEFFICIENTS

NEW MILNE-TYPE INEQUALITIES VIA  
FRACTIONAL CALCULUS

A PROBABILISTIC APPROACH TO  
MULTIVARIATE TIME FORECASTING...

RECOVERING THE MILITARY ENIGMA  
USING PERMUTATIONS...

TRANSITION TO TURBULENCE IN A  
CONVECTION PROBLEM

STABILITY OF SOME ANTICIPATING  
SEMILINEAR STOCHASTIC...

IMPORTANCIA DE GEOMETRÍA EN LA  
SOLUCIÓN DE MATRICES...

## Orthogonal polynomial kernels used in support vector machines for data analysis

DIEGO SERRANO, NURIA TORRADO, EDMUNDO J. HUERTAS

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid (UAM)

diego.serrano@uam.es

**Abstract:** Classification Support Vector Machines (SVMs in short) are a type of machine learning algorithm used, among other things, for data classification. They use a technique called “maximum margins” to find the optimal hyperplane that separates the different classes of data to classify. These SVMs are especially effective when dealing with binary classification problems. One of the key features of SVMs is their ability to use Kernel functions, which allow to take any given input data and map it to a high-dimensional feature space where linear separation can be more easily achieved. In this general framework, we review the state-of-the-art of how orthogonal polynomials can be used as kernel functions in SVMs. Usually, by using orthogonal polynomials as kernel functions in SVMs, more accurate results can be obtained in data classification. This is a joint work with Nuria Torrado and Edmundo J. Huertas.

### References

- [1] John Shawe-Taylor, N. Cristianini (2004). Kernel Methods for Pattern Analysis. Cambridge University Press.
- [2] Chihara, T.S. (2011). An Introduction to Orthogonal Polynomials. Courier Corporation.

### SESIONES PÓSTER

ROTATIONAL SURFACES WITH  
PRESCRIBED CURVATURES

MEASURE-PRESERVING MAPPINGS  
FROM THE UNIT CUBE TO SPHERES...

LOOKING AT WELFARE FROM A  
MATHEMATICAL APPROACH BASED...

PROPUESTA DE INTERVENCIÓN  
BASADA EN MATHIGON...

MEHLER–HEINE ASYMPTOTICS FOR  
THE MEIJER G-FUNCTION

APPLICATION OF VAN HIELE'S THEORY  
WITH DYNAMIC GEOMETRY...

EXTENSION CRITERIA FOR INDIVIDUAL  
RANKINGS REVISITED

ALETHIC MODAL LOGIC IN  
ARISTOTLE' ANALYTICS

SEMI-G-PERIODICITY, G-UNIFORM  
RECURRENCE...

ORTHOGONAL POLYNOMIAL KERNELS  
USED IN SUPPORT...

ON A MOMENT GENERALIZATION OF  
SOME CLASSICAL...

COMPLEJOS ELÍPTICOS Y  
DESCOMPOSICIÓN DE HODGE

JENSEN-TYPE INEQUALITIES FOR  
M-CONVEX FUNCTIONS...

MINIMAL SURFACES WITH FREE  
BOUNDARIES...

FUNCIONES ANALÍTICAS QUE  
INTERPOLAN FAMILIAS...

MODELIZACIÓN ESTADÍSTICA DE  
ACCIDENTES DE TRÁFICO LABORALES

IMPLEMENTACIÓN DE LOS ODS EN  
ASIGNATURAS DE ESTADÍSTICA...

NEW CONNECTIONS BETWEEN  
APPROXIMATION SPACES...

ON SIMULTANEOUS DENSITY ORDER  
FROM SHIFT INVARIANT...

ÁRBOLES, DESARREGLOS Y FAMILIAS  
DE CAMINOS...

GREEDINESS AND POLYNOMIALS OF  
CONSTANT COEFFICIENTS

NEW MILNE-TYPE INEQUALITIES VIA  
FRACTIONAL CALCULUS

A PROBABILISTIC APPROACH TO  
MULTIVARIATE TIME FORECASTING...

RECOVERING THE MILITARY ENIGMA  
USING PERMUTATIONS...

TRANSITION TO TURBULENCE IN A  
CONVECTION PROBLEM

STABILITY OF SOME ANTICIPATING  
SEMILINEAR STOCHASTIC...

IMPORTANCIA DE GEOGEBRA EN LA  
SOLUCIÓN DE MATRICES...

## On a moment generalization of some classical second-order differential equations generating classical orthogonal polynomials

VÍCTOR SOTO-LARROSA, EDMUNDO J. HUERTAS, ALBERTO LASTRA

Departamento de Física y Matemáticas, Universidad de Alcalá

[v.soto@uah.es](mailto:v.soto@uah.es)

**Abstract:** The aim of this work is to construct new polynomial systems, which are solutions to certain functional equations which generalize the second-order differential equations satisfied by the classical orthogonal polynomial families. These functional equations can be chosen to be of different type: fractional differential equations,  $q$ -difference equations, etc, which converge to the ordinary differential equations of the aforesaid classical orthogonal polynomials in each case.

**Acknowledgments:** The work of V. Soto-Larrosa has been supported by Consejería de Economía, Hacienda y Empleo of the Comunidad de Madrid through “Programa Investigo”, funded by the European Union “NextGenerationEU”.

The authors are members of the research group AnFAO (Cod.: CT-CE2023/876) of Universidad de Alcalá.

### SESIONES PÓSTER

ROTATIONAL SURFACES WITH PRESCRIBED CURVATURES

MEASURE-PRESERVING MAPPINGS FROM THE UNIT CUBE TO SPHERES...

LOOKING AT WELFARE FROM A MATHEMATICAL APPROACH BASED...

PROPUESTA DE INTERVENCIÓN BASADA EN MATHIGON...

MEHLER-HEINE ASYMPTOTICS FOR THE MEIJER  $G$ -FUNCTION

APPLICATION OF VAN HIELE'S THEORY WITH DYNAMIC GEOMETRY...

EXTENSION CRITERIA FOR INDIVIDUAL RANKINGS REVISITED

ALETHIC MODAL LOGIC IN ARISTOTLE' ANALYTICS

SEMI- $G$ -PERIODICITY,  $G$ -UNIFORM RECURRENCE...

ORTHOGONAL POLYNOMIAL KERNELS USED IN SUPPORT...

ON A MOMENT GENERALIZATION OF SOME CLASSICAL...

COMPLEJOS ELÍPTICOS Y DESCOMPOSICIÓN DE HODGE

JENSEN- TYPE INEQUALITIES FOR  $M$ -CONVEX FUNCTIONS...

MINIMAL SURFACES WITH FREE BOUNDARIES...

FUNCIONES ANALÍTICAS QUE INTERPOLAN FAMILIAS...

MODELIZACIÓN ESTADÍSTICA DE ACCIDENTES DE TRÁFICO LABORALES

IMPLEMENTACIÓN DE LOS ODS EN ASIGNATURAS DE ESTADÍSTICA...

NEW CONNECTIONS BETWEEN APPROXIMATION SPACES...

ON SIMULTANEOUS DENSITY ORDER FROM SHIFT INVARIANT...

ÁRBOLES, DESARREGLOS Y FAMILIAS DE CAMINOS...

GREEDINESS AND POLYNOMIALS OF CONSTANT COEFFICIENTS

NEW MILNE-TYPE INEQUALITIES VIA FRACTIONAL CALCULUS

A PROBABILISTIC APPROACH TO MULTIVARIATE TIME FORECASTING...

RECOVERING THE MILITARY ENIGMA USING PERMUTATIONS...

TRANSITION TO TURBULENCE IN A CONVECTION PROBLEM

STABILITY OF SOME ANTICIPATING SEMILINEAR STOCHASTIC...

IMPORTANCIA DE GEOGEBRA EN LA SOLUCIÓN DE MATRICES...

## Complejos elípticos y descomposición de Hodge

JUAN CARLOS CASTRO RIVERA

Universidad Zaragoza  
[jc\\_castro1509@hotmail.com](mailto:jc_castro1509@hotmail.com)

**Resumen:** Se pretende dar una descripción del *Teorema de descomposición ortogonal para complejos elípticos*, siguiendo la línea de [1]. Si bien se trata de un resultado ya conocido, la motivación del cartel viene de remarcar una manera de incluir el análisis funcional en el estudio de variedades diferenciables y complejas.

Dada  $(E^\bullet, L^\bullet)$  un complejo sobre una variedad diferenciable  $M$ , se tiene una *secuencia de símbolos* asociada  $0 \rightarrow \pi^* E_0 \xrightarrow{\sigma_k(L_0)} \pi^* E_1 \xrightarrow{\sigma_k(L_1)} \dots \xrightarrow{\sigma_k(L_{N-1})} \pi^* E_N \rightarrow 0$ . Si es exacta, se dice que el complejo es *elíptico*, y se definen sus *clases de cohomología*:  $H^q(E^\bullet, L^\bullet) := \frac{\ker(L_q)}{\text{Im}(L_{q-1})}$ . Además, fijada una forma de volumen  $d\mu$  y una métrica hermítica  $\langle, \rangle_{E_j}$  sobre cada fibrado, se define una métrica sobre las secciones  $\Gamma(E_j)$ ,  $\langle \xi, \eta \rangle_0 := \int_M \langle \xi(x), \eta(x) \rangle_{E_{j,x}} d\mu$ . Ello permite definir los operadores de Laplace  $\Delta_j := L_{j-1} L_{j-1}^* + L_j^* L_j$ . Se tiene el *Teorema de descomposición ortogonal para complejos elípticos*,

$$\Gamma(E) = \ker \Delta \oplus LL^*G(\Gamma(E)) \oplus L^*LG(\Gamma(E)),$$

donde además,  $\ker \Delta$  es de dimensión finita. Como corolario, para el complejo de De Rham, se tiene la finitud de los grupos  $\dim_{\mathbb{C}} H^q(M, \mathbb{C}) < \infty$ . También se deduce el *Teorema de Hodge* sobre los representantes armónicos  $H^q(M, \mathbb{C}) \cong \ker \Delta_q$ . En geometría compleja, se obtiene la finitud de los grupos de cohomología de Dolbeault. Para variedades Kähler, aprovechando algunas relaciones de conmutación entre los operadores  $d, \partial, \bar{\partial}$  y sus adjuntos, se obtiene una obstrucción topológica:

**Teorema de descomposición de Hodge.** *Sea  $X$  una variedad Kähler y compacta. Entonces, se verifica*

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \sum_{p+q=k} H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X).$$

### Referencias

- [1] Wells, R. O. (2008). *Differential analysis on complex manifolds*. Third edition. Graduate Texts in Mathematics, 65. Springer, New York.

## Jensen-type inequalities for $m$ -convex functions and applications

YAMILET QUINTANA, PAUL BOSCH, JOSÉ M. RODRÍGUEZ, JOSÉ M. SIGARRETA

Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid.

Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT), Spain

[yaquinta@math.uc3m.es](mailto:yaquinta@math.uc3m.es)

**Abstract:** Integral inequalities are a fundamental tool in mathematics and have countless applications in various fields. In particular, Jensen inequality, one of the most famous inequalities, plays a main role in the study of the existence and uniqueness of initial and boundary value problems for differential equations. In this work we prove some new Jensen-type inequalities for  $m$ -convex functions, and apply them to generalized Riemann-Liouville-type integral operators. Furthermore, as a remarkable consequence, some new inequalities for convex functions are obtained.

### References

- [1] P. Bosch, Y. Quintana, J. M. Rodríguez, J. M. Sigarreta (2022). Jensen-type inequalities for  $m$ -convex functions. *Open Math.*, 20 (1), 946–958.
- [2] A. McD. Mercer (2003). A variant of Jensen's inequality. *J. Ineq. Pure Appl. Math.*, 4 (4), Art. 73.
- [3] Z. Pavić, M. Avci Ardiç (2017). The most important inequalities of  $m$ -convex functions. *Turk. J. Math.*, 41, 625–635.
- [4] H. M. Srivastava, D. Raghavan, S. Nagarajan (2022). Generalized inequalities involving fractional operators of the Riemann-Liouville type. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Mat. RACSAM*, 116 (3), Art. 98.
- [5] G. Toader (2009). The hierarchy of convexity and some classic inequalities. *J. Math. Inequal.*, 3 (3), Art. 03-30.

**Acknowledgments:** The research of Y. Quintana, J. M. Rodríguez and J. M. Sigarreta has been supported by a grant from Agencia Estatal de Investigación (PID2019-106433GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033), Spain. The research of Y. Quintana has been partially supported by the grant CEX2019-000904-S funded by MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

## Minimal surfaces with free boundaries and an overdetermined problem in the 2-sphere

DIEGO A. MARÍN

Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada

damarin@ugr.es

**Resumen:** Llamamos superficies con bordes libres a superficies regulares en  $\mathbb{R}^3$  con borde contenido en un conjunto de esferas centradas en el origen (posiblemente de distinto radio), intersecando a estas esferas ortogonalmente. En este poster introducimos una correspondencia entre superficies mínimas con bordes libres y pares  $(\Omega, \xi)$ , donde  $\Omega \subset \mathbb{S}^2$  es un dominio con borde de clase  $\mathcal{C}^\infty$  y  $\xi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  es una solución del problema

$$\begin{cases} \Delta^{\mathbb{S}^2} \xi + 2\xi = 0 & \text{in } \Omega, \\ \xi = 0 & \text{along } \partial\Omega, \\ |\nabla^{\mathbb{S}^2} \xi|^2 = b_i^2 & \text{along } \Gamma_i \in \pi_0(\partial\Omega), i \in \{1, \dots, k\}, \end{cases}$$

donde  $b_i$  es una constante positiva para cada  $i$ .

Utilizando un resultado de clasificación de soluciones del problema anterior (contenido en [1]), nos valemos de la correspondencia presentada para clasificar una familia de anillos mínimos con bordes libres con simetría rotacional dentro de la bola unidad  $\mathbb{B}^3$ . Como corolario, obtenemos un resultado parcial sobre la conjetura del catenoide crítico.

### Referencias

- [1] J. M. Espinar, D. A. Marín (2023). An overdetermined eigenvalue problem and the Critical Catenoid conjecture, arXiv:2310.06705.
- [2] A. Carlotto (2019). Free boundary minimal surfaces: a survey of recent results, Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche, Serie 4, Vol. 86 no. 1, 103-121.
- [3] R. Souam (2005). Schiffer's problem and an isoperimetric inequality for the first buckling eigenvalue of domains on  $\mathbb{S}^2$ , Ann. Global Anal. Geom., Vol. 27 no. 4, 341-354.



## Funciones analíticas que interpolan familias de polinomios de Appell-Dunkl

ALEJANDO GIL ASENSI, JUAN LUIS VARONA

Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja

alejandro.gil@unirioja.es

**Resumen:** Sean  $B_n(x)$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$ , los polinomios de Bernoulli, y  $\zeta(s, x) = \sum_{k=0}^{\infty} 1/(k+x)^s$  la función zeta de Hurwitz, que se define con esa expresión cuando la serie es convergente y tiene una extensión analítica para  $s$  en el plano complejo. Es bien conocido que, si usamos esta extensión analítica, se cumple  $B_n(x) = -n\zeta(1-n, x)$ .

Lo mismo ocurre con muchas otras familias de polinomios de Appell, es decir, polinomios  $P_n(x)$  cuya derivada cumple  $P'_n(x) = nP_{n-1}(x)$ ; existe una función análoga a la zeta de Hurwitz que, al evaluarla en los enteros negativos, da, esencialmente, los polinomios  $P_n(x)$ .

En lugar de las derivada ordinaria, utilicemos ahora la derivada Dunkl  $\Lambda_\alpha$  (con  $\alpha > -1$ ) que se define como  $\Lambda_\alpha f(x) = f'(x) + \frac{2\alpha+1}{2} \frac{f(x)-f(-x)}{x}$ , que recupera el caso clásico cuando  $\alpha = -1/2$ . El concepto de polinomios de Appell se puede extender al de polinomios de Appell-Dunkl, y muchas propiedades tienen su contrapartida en el contexto Dunkl. Por ejemplo, en [1] se muestra cómo extender los polinomios de Bernoulli al mundo Dunkl.

En los recientes artículos [2, 3] vemos cómo construir funciones analíticas que, en los enteros negativos, den lugar a polinomios de Appell-Dunkl, lo cual es mucho más complicado que en el caso clásico, y no siempre se puede hacer de manera tan satisfactoria. En particular, mostramos lo que ocurre con polinomios de Bernoulli-Dunkl.

### Referencias

- [1] Ó. Ciaurri, A. J. Durán, M. Pérez, J. L. Varona (2018). Bernoulli-Dunkl and Apostol-Euler-Dunkl polynomials with applications to series involving zeros of Bessel functions, *J. Approx. Theory*, 235, 20–45.
- [2] A. Gil Asensi, J. L. Varona (2023). Appell-Dunkl sequences and Hurwitz-Dunkl zeta functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 520, 126870, 40 pp.
- [3] A. Gil Asensi, J. L. Varona (2024). A general method to find special functions that interpolate Appell polynomials, with examples. *J. Math. Anal. Appl.*, 531, 127825, 18 pp.

## Modelización estadística de accidentes de tráfico laborales

JORGE CASTILLO-MATEO, JUAN J. AGUILAR, JESÚS ASÍN, ÍÑIGO ELVIRO

Departamento de Métodos Estadísticos, Universidad de Zaragoza

[jorgecm@unizar.es](mailto:jorgecm@unizar.es)

**Resumen:** Los accidentes laborales de tráfico (ALT) suponen alrededor del 20 % de los accidentes laborales en España. Por otra parte, las características varían entre los ALT en misión y *in itinere*, y entre los de ida y vuelta para este último.

Existen estudios descriptivos previos, pero falta un análisis sobre cómo los factores ambientales pueden aumentar la frecuencia de los ALT. Este trabajo modela la ocurrencia de estos eventos *in itinere* y en misión. Además de caracterizar efectos temporales conocidos, como la estacionalidad diaria, semanal y anual, también se analiza la influencia de factores ambientales, como la precipitación y la luz solar. Se utiliza la base de datos Delta del Ministerio de Trabajo que registra la información de cada ALT, centrándose en la provincia de Zaragoza.

Se propone un modelo estadístico discreto de tipo regresión cuya respuesta es el número de ALT por hora, cuya frecuencia de ceros es muy elevada. Los modelos Poisson no son adecuados debido a la falta de dispersión en los datos. Se exploran modelos Hurdle y zero-inflated [1–2], que involucran submodelos para los casos con valores nulos y para los casos con valores no nulos. Los resultados brindan información sobre patrones estacionales y efectos de condiciones ambientales.

### Referencias

- [1] M. Bourguignon, D. I. Gallardo, R. M. Medeiros (2022). A simple and useful regression model for underdispersed count data based on Bernoulli–Poisson convolution. *Statistical Papers*, 63(3), 821–848.
- [2] A. Zeileis, C. Kleiber, S. Jackman (2008). Regression models for count data in R. *Journal of Statistical Software*, 27(8), 1–25.

**Agradecimientos:** Agradecemos la colaboración del Instituto Aragonés de Salud y Seguridad Laboral y de la Dirección Provincial de Tráfico de Zaragoza. Esta investigación ha sido financiada por la Cátedra Centro Zaragoza de la Universidad de Zaragoza, el Ministerio de Ciencia e Innovación (proyectos PID2020-116873GB-I00 y TED2021-130702B-I00) y Gobierno de Aragón (E46: Modelos Estocásticos).

### SESIONES PÓSTER

ROTATIONAL SURFACES WITH  
PRESCRIBED CURVATURES

MEASURE-PRESERVING MAPPINGS  
FROM THE UNIT CUBE TO SPHERES...

LOOKING AT WELFARE FROM A  
MATHEMATICAL APPROACH BASED...

PROPUESTA DE INTERVENCIÓN  
BASADA EN MATHIGON...

MEHLER–HEINE ASYMPTOTICS FOR  
THE MEIJER G-FUNCTION

APPLICATION OF VAN HIELE'S THEORY  
WITH DYNAMIC GEOMETRY...

EXTENSION CRITERIA FOR INDIVIDUAL  
RANKINGS REVISITED

ALETHIC MODAL LOGIC IN  
ARISTOTLE' ANALYTICS

SEMI-G-PERIODICITY, G-UNIFORM  
RECURRENCE...

ORTHOGONAL POLYNOMIAL KERNELS  
USED IN SUPPORT...

ON A MOMENT GENERALIZATION OF  
SOME CLASSICAL...

COMPLEJOS ELÍPTICOS Y  
DESCOMPOSICIÓN DE HODGE

JENSEN-TYPE INEQUALITIES FOR  
M-CONVEX FUNCTIONS...

MINIMAL SURFACES WITH FREE  
BOUNDARIES...

FUNCIONES ANALÍTICAS QUE  
INTERPOLAN FAMILIAS...

MODELIZACIÓN ESTADÍSTICA DE  
ACCIDENTES DE TRÁFICO LABORALES

IMPLEMENTACIÓN DE LOS ODS EN  
ASIGNATURAS DE ESTADÍSTICA...

NEW CONNECTIONS BETWEEN  
APPROXIMATION SPACES...

ON SIMULTANEOUS DENSITY ORDER  
FROM SHIFT INVARIANT...

ÁRBOLES, DESARREGLOS Y FAMILIAS  
DE CAMINOS...

GREEDINESS AND POLYNOMIALS OF  
CONSTANT COEFFICIENTS

NEW MILNE-TYPE INEQUALITIES VIA  
FRACTIONAL CALCULUS

A PROBABILISTIC APPROACH TO  
MULTIVARIATE TIME FORECASTING...

RECOVERING THE MILITARY ENIGMA  
USING PERMUTATIONS...

TRANSITION TO TURBULENCE IN A  
CONVECTION PROBLEM

STABILITY OF SOME ANTICIPATING  
SEMILINEAR STOCHASTIC...

IMPORTANCIA DE GEÓGEBRA EN LA  
SOLUCIÓN DE MATRICES...

## Implementación de los ODS en asignaturas de Estadística de grados de la Universidad de Zaragoza

JESÚS ASÍN, ISOLINA ALBERTO, TOMÁS ALCALÁ, GERMÁN BADÍA,  
 MARÍA D. BERRADE, JORGE CASTILLO-MATEO, CARMEN GAÉ,  
 JOSÉ ÁNGEL IRANZO, FERNANDO JIMÉNEZ, PEDRO JODRÁ,  
 MIGUEL LAFUENTE, DAVID LAHOZ, IRENE MARÍN  
 Departamento Métodos Estadísticos, Universidad de Zaragoza  
[jasin@unizar.es](mailto:jasin@unizar.es)

**Resumen:** Se presentan los resultados del proyecto de innovación docente *Primeros pasos en la implementación de los ODS en asignaturas de Estadística*, desarrollado en la Universidad de Zaragoza. Su objeto es integrar los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) en las asignaturas de Estadística en grados de Ingeniería. El proyecto ha sido desarrollado durante los cursos 2021/2022 y 2022/2023.

En el marco de esta iniciativa, se diseñaron actividades evaluables adaptadas al currículo de cada grado. En estas actividades, se requería que el estudiante aplicase sus destrezas estadísticas, exploratorias e inferenciales, así como el uso de software especializado, para analizar problemas que usan bases de datos relativas a alguno de los ODS. El conjunto de actividades diseñadas se divide en dos categorías: una implica el análisis descriptivo de una base de datos proveniente del repositorio europeo de indicadores de cumplimiento de los ODS; la otra consiste en la elaboración de un informe sobre una base de datos de insolación acumulada diaria en distintos puntos de la geografía española, requiriendo para ello el uso de modelos de regresión.

Los resultados obtenidos indican una alta participación por parte de la gran mayoría de los estudiantes, así como un impacto significativo en las calificaciones académicas.

### Referencias

- [1] M. Chankseliani, T. Mccowan (2021). Higher education and the sustainable development goals. *Higher Education*, 81, 1-8.
- [2] T. L. Owens (2017). Higher education in the sustainable development goals framework. *European Journal of Education*, 52, 414-420.

### SESIONES PÓSTER

ROTATIONAL SURFACES WITH  
 PRESCRIBED CURVATURES

MEASURE-PRESERVING MAPPINGS  
 FROM THE UNIT CUBE TO SPHERES...

LOOKING AT WELFARE FROM A  
 MATHEMATICAL APPROACH BASED...

PROPUESTA DE INTERVENCIÓN  
 BASADA EN MATHIGON...

MEHLER-HEINE ASYMPTOTICS FOR  
 THE MEIJER G-FUNCTION

APPLICATION OF VAN HIELE'S THEORY  
 WITH DYNAMIC GEOMETRY...

EXTENSION CRITERIA FOR INDIVIDUAL  
 RANKINGS REVISITED

ALETHIC MODAL LOGIC IN  
 ARISTOTLE' ANALYTICS

SEMI-C-PERIODICITY, C-UNIFORM  
 RECURRENCE...

ORTHOGONAL POLYNOMIAL KERNELS  
 USED IN SUPPORT...

ON A MOMENT GENERALIZATION OF  
 SOME CLASSICAL...

COMPLEJOS ELÍPTICOS Y  
 DESCOMPOSICIÓN DE HODGE

JENSEN-TYPE INEQUALITIES FOR  
 M-CONVEX FUNCTIONS...

MINIMAL SURFACES WITH FREE  
 BOUNDARIES...

FUNCIONES ANALÍTICAS QUE  
 INTERPOLAN FAMILIAS...

MODELIZACIÓN ESTADÍSTICA DE  
 ACCIDENTES DE TRÁFICO LABORALES

IMPLEMENTACIÓN DE LOS ODS EN  
 ASIGNATURAS DE ESTADÍSTICA...

NEW CONNECTIONS BETWEEN  
 APPROXIMATION SPACES...

ON SIMULTANEOUS DENSITY ORDER  
 FROM SHIFT INVARIANT...

ÁRBOLES, DESARREGLOS Y FAMILIAS  
 DE CAMINOS...

GREEDINESS AND POLYNOMIALS OF  
 CONSTANT COEFFICIENTS

NEW MILNE-TYPE INEQUALITIES VIA  
 FRACTIONAL CALCULUS

A PROBABILISTIC APPROACH TO  
 MULTIVARIATE TIME FORECASTING...

RECOVERING THE MILITARY ENIGMA  
 USING PERMUTATIONS...

TRANSITION TO TURBULENCE IN A  
 CONVECTION PROBLEM

STABILITY OF SOME ANTICIPATING  
 SEMILINEAR STOCHASTIC...

IMPORTANCIA DE GEOGEBRA EN LA  
 SOLUCIÓN DE MATRICES...

## New connections between approximation spaces and the greedy algorithm

MIGUEL BERASATEGUI, PABLO M. BERNÁ, HUNG VIET CHU,  
EUGENIO HERNÁNDEZ  
Departamento de Métodos Cuantitativos, CUNEF Universidad  
[pablo.berna@cunef.edu](mailto:pablo.berna@cunef.edu)

**Abstract:** Approximation spaces are classical spaces where the decay order of the best approximation error is studied. For several years, various authors as P. Wojtaszczyk, G. Garrigós, E. Hernández, etc., have studied these spaces in connection with the greedy algorithm introduced by S. V. Konyagin and V. N. Temlyakov. In this poster, we introduce a generalization of these approximation spaces and identify them with some weighted discrete Lorentz spaces. Additionally, we analyze the relationship between these approximation spaces and certain spaces that arise when analyzing the decay of the approximation error of the greedy algorithm.

### References

- [1] F. Albiac, J.L. Ansorena, P.M. Berná, P. Wojtaszczyk (2021). Greedy approximation for biorthogonal systems in quasi-Banach spaces. *Dissertationes Math.* 560, 1–88.
- [2] P. M. Berná, H. V. Chu, E. Hernández, On approximation spaces and greedy-type bases (2022). <https://arxiv.org/pdf/2207.02554.pdf> (Submitted).
- [3] M. Berasategui, P. M. Berná, H. V. Chu, E. Hernández (2023). New connections between approximation spaces and the greedy algorithm (In preparation).
- [4] G. Garrigós, E. Hernández, and M. de Natividade (2012). Democracy functions and optimal embeddings for approximation spaces. *Adv. Comput. Math.* 37, 255–283.
- [5] S. V. Konyagin and V. N. Temlyakov (1999). A remark on greedy approximation in Banach spaces. *East. J. Approx.* 5, 365–379.
- [6] P. Wojtaszczyk (2014). On left democracy function. *Funct. Approx. Comment. Math.* 50, 207–214.

## On simultaneous density Order from shift invariant subspaces in Sobolev spaces

CH. BOUKEFFOUS, A. SAN ANTOLÍN

Departamento Matemática Aplicada, Universidad de Alicante

bc61@gcloud.ua.es

**Abstract:** Our research focuses on the study of approximation properties for closed shift-invariant subspaces in Sobolev space. The concept of simultaneous approximation order, developed by K. Zhao in [1], is a key focus of this research. The notion of simultaneous density order is introduced, which is motivated by the definition of density order. The classical notion of approximate continuity point is needed to characterize simultaneous density order.

### References

- [1] K. Zhao. Simultaneous approximation from PSI spaces (1995). J. Approx. Theory 81, no. 2, 166–184.

ROTATIONAL SURFACES WITH  
PRESCRIBED CURVATURES

MEASURE-PRESERVING MAPPINGS  
FROM THE UNIT CUBE TO SPHERES...

LOOKING AT WELFARE FROM A  
MATHEMATICAL APPROACH BASED...

PROPUESTA DE INTERVENCIÓN  
BASADA EN MATHIGON...

MEHLER–HEINE ASYMPTOTICS FOR  
THE MEIJER G-FUNCTION

APPLICATION OF VAN HIELE'S THEORY  
WITH DYNAMIC GEOMETRY...

EXTENSION CRITERIA FOR INDIVIDUAL  
RANKINGS REVISITED

ALETHIC MODAL LOGIC IN  
ARISTOTLE' ANALYTICS

SEMI-G-PERIODICITY, C-UNIFORM  
RECURRENCE...

ORTHOGONAL POLYNOMIAL KERNELS  
USED IN SUPPORT...

ON A MOMENT GENERALIZATION OF  
SOME CLASSICAL...

COMPLEJOS ELÍPTICOS Y  
DESCOMPOSICIÓN DE HODGE

JENSEN-TYPE INEQUALITIES FOR  
M-CONVEX FUNCTIONS...

MINIMAL SURFACES WITH FREE  
BOUNDARIES...

FUNCIONES ANALÍTICAS QUE  
INTERPOLAN FAMILIAS...

MODELIZACIÓN ESTADÍSTICA DE  
ACCIDENTES DE TRÁFICO LABORALES

IMPLEMENTACIÓN DE LOS ODS EN  
ASIGNATURAS DE ESTADÍSTICA...

NEW CONNECTIONS BETWEEN  
APPROXIMATION SPACES...

ON SIMULTANEOUS DENSITY ORDER  
FROM SHIFT INVARIANT...

ÁRBOLES, DESARREGLOS Y FAMILIAS  
DE CAMINOS...

GREEDINESS AND POLYNOMIALS OF  
CONSTANT COEFFICIENTS

NEW MILNE-TYPE INEQUALITIES VIA  
FRACTIONAL CALCULUS

A PROBABILISTIC APPROACH TO  
MULTIVARIATE TIME FORECASTING...

RECOVERING THE MILITARY ENIGMA  
USING PERMUTATIONS...

TRANSITION TO TURBULENCE IN A  
CONVECTION PROBLEM

STABILITY OF SOME ANTICIPATING  
SEMILINEAR STOCHASTIC...

IMPORTANCIA DE GEOGEBRA EN LA  
SOLUCIÓN DE MATRICES...

## Árboles, desarreglos y familias de caminos sin intersección

EMMANUEL BRIAND, LUIS ESQUIVIAS QUINTERO, ÁLVARO GUTIÉRREZ CÁCERES,  
ADRIÁN LILLO PINTO, MERCEDES ROSAS CELIS  
Departamento Matemática Aplicada 1, Universidad de Sevilla  
[ebriand@us.es](mailto:ebriand@us.es)

**Resumen:** Graham y Pollak demostraron en 1971 [1] que el determinante de la matriz de distancias de un árbol depende solamente de su número  $n$  de vértices, y vale

$$(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

Se echaba en falta, sin embargo, una prueba combinatoria que explique la fórmula. Proporcionamos esta demostración, reduciendo el problema a un conteo con signos de familias de caminos en un grafo dirigido ad hoc. El conteo de caminos se reduce, mediante el lema de Gessel y Viennot, a un conteo de caminos sin intersección. Al poner pesos en las aristas de dicho grafo se demuestran al mismo tiempo deformaciones paramétricas.

Usando el mismo enfoque, resolvemos problemas de conteo con signo de desarreglos (permutaciones sin punto fijo).

### Referencias

- [1] R. L. Graham and H. O. Pollak (1971). On the addressing problem for loop switching. *Bell System Tech. J.*, 50, 2495–2519.

**Agradecimientos:** Este trabajo fue soportado por el proyecto PID2020-117843GB-I00 financiado por MCIN/ AEI/10.13039/501100011033.

### SESIONES PÓSTER

ROTATIONAL SURFACES WITH  
PRESCRIBED CURVATURES

MEASURE-PRESERVING MAPPINGS  
FROM THE UNIT CUBE TO SPHERES...

LOOKING AT WELFARE FROM A  
MATHEMATICAL APPROACH BASED...

PROPUESTA DE INTERVENCIÓN  
BASADA EN MATHIGON...

MEHLER–HEINE ASYMPTOTICS FOR  
THE MEIJER G-FUNCTION

APPLICATION OF VAN HIELE'S THEORY  
WITH DYNAMIC GEOMETRY...

EXTENSION CRITERIA FOR INDIVIDUAL  
RANKINGS REVISITED

ALETHIC MODAL LOGIC IN  
ARISTOTLE' ANALYTICS

SEMI-G-PERIODICITY, G-UNIFORM  
RECURRENCE...

ORTHOGONAL POLYNOMIAL KERNELS  
USED IN SUPPORT...

ON A MOMENT GENERALIZATION OF  
SOME CLASSICAL...

COMPLEJOS ELÍPTICOS Y  
DESCOMPOSICIÓN DE HODGE

JENSEN-TYPE INEQUALITIES FOR  
M-CONVEX FUNCTIONS...

MINIMAL SURFACES WITH FREE  
BOUNDARIES...

FUNCIONES ANALÍTICAS QUE  
INTERPOLAN FAMILIAS...

MODELIZACIÓN ESTADÍSTICA DE  
ACCIDENTES DE TRÁFICO LABORALES

IMPLEMENTACIÓN DE LOS ODS EN  
ASIGNATURAS DE ESTADÍSTICA...

NEW CONNECTIONS BETWEEN  
APPROXIMATION SPACES...

ON SIMULTANEOUS DENSITY ORDER  
FROM SHIFT INVARIANT...

ÁRBOLES, DESARREGLOS Y FAMILIAS  
DE CAMINOS...

GREEDINESS AND POLYNOMIALS OF  
CONSTANT COEFFICIENTS

NEW MILNE-TYPE INEQUALITIES VIA  
FRACTIONAL CALCULUS

A PROBABILISTIC APPROACH TO  
MULTIVARIATE TIME FORECASTING...

RECOVERING THE MILITARY ENIGMA  
USING PERMUTATIONS...

TRANSITION TO TURBULENCE IN A  
CONVECTION PROBLEM

STABILITY OF SOME ANTICIPATING  
SEMILINEAR STOCHASTIC...

IMPORTANCIA DE GEOGEBRA EN LA  
SOLUCIÓN DE MATRICES...

## Greediness and polynomials of constant coefficients

MIGUEL BERASATEGUI, PABLO M. BERNÁ, DAVID GONZÁLEZ

Universidad San Pablo CEU, CEU Universities

[david.gonzalezmoro@usp.ceu.es](mailto:david.gonzalezmoro@usp.ceu.es)

**Resumen:** Greedy bases in (quasi) Banach spaces are those bases where the greedy algorithm produces the best possible approximation. In 2017, P. M. Berná and O. Blasco introduced a new characterization of these bases using polynomials of constant coefficients and, some years later, S. J. Dilworth and D. Khurana used the same idea to characterize almost-greedy bases. In this poster, we propose a new perspective of those characterizations, enhancing the computation of certain approximation errors using these polynomials.

### References

- [1] F. Albiac, J.L. Ansorena, P.M. Berná, P. Wojtaszczyk (2021). Greedy approximation for biorthogonal systems in quasi-Banach spaces. *Dissertationes Math.* 560, 1–88.
- [2] M. Berasategui, P. Berná, D. González (2023). Approximation by polynomials with constant coefficients and the Thresholding Greedy Algorithm. Submitted.
- [3] P. Berná, Ó. Blasco (2017). Characterization of greedy bases in Banach spaces. *J. Approx. Theory.* 215, 28–39.
- [4] S. V. Konyagin and V. N. Temlyakov (1999). A remark on greedy approximation in Banach spaces. *East. J. Approx.* 5, 365–379.

ROTATIONAL SURFACES WITH  
PRESCRIBED CURVATURES

MEASURE-PRESERVING MAPPINGS  
FROM THE UNIT CUBE TO SPHERES...

LOOKING AT WELFARE FROM A  
MATHEMATICAL APPROACH BASED...

PROPUESTA DE INTERVENCIÓN  
BASADA EN MATHIGON...

MEHLER–HEINE ASYMPTOTICS FOR  
THE MEIJER G-FUNCTION

APPLICATION OF VAN HIELE'S THEORY  
WITH DYNAMIC GEOMETRY...

EXTENSION CRITERIA FOR INDIVIDUAL  
RANKINGS REVISITED

ALETHIC MODAL LOGIC IN  
ARISTOTLE' ANALYTICS

SEMI-G-PERIODICITY, G-UNIFORM  
RECURRENCE...

ORTHOGONAL POLYNOMIAL KERNELS  
USED IN SUPPORT...

ON A MOMENT GENERALIZATION OF  
SOME CLASSICAL...

COMPLEJOS ELÍPTICOS Y  
DESCOMPOSICIÓN DE HODGE

JENSEN-TYPE INEQUALITIES FOR  
M-CONVEX FUNCTIONS...

MINIMAL SURFACES WITH FREE  
BOUNDARIES...

FUNCIONES ANALÍTICAS QUE  
INTERPOLAN FAMILIAS...

MODELIZACIÓN ESTADÍSTICA DE  
ACCIDENTES DE TRÁFICO LABORALES

IMPLEMENTACIÓN DE LOS ODS EN  
ASIGNATURAS DE ESTADÍSTICA...

NEW CONNECTIONS BETWEEN  
APPROXIMATION SPACES...

ON SIMULTANEOUS DENSITY ORDER  
FROM SHIFT INVARIANT...

ÁRBOLES, DESARREGLOS Y FAMILIAS  
DE CAMINOS...

GREEDINESS AND POLYNOMIALS OF  
CONSTANT COEFFICIENTS

NEW MILNE-TYPE INEQUALITIES VIA  
FRACTIONAL CALCULUS

A PROBABILISTIC APPROACH TO  
MULTIVARIATE TIME FORECASTING...

RECOVERING THE MILITARY ENIGMA  
USING PERMUTATIONS...

TRANSITION TO TURBULENCE IN A  
CONVECTION PROBLEM

STABILITY OF SOME ANTICIPATING  
SEMILINEAR STOCHASTIC...

IMPORTANCIA DE GEOGEBRA EN LA  
SOLUCIÓN DE MATRICES...

## New Milne-type inequalities via fractional calculus

J. M. RODRÍGUEZ, J. M. SIGARRETA, E. TOURÍS  
 Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid  
[jomaro@math.uc3m.es](mailto:jomaro@math.uc3m.es)

**Abstract:** Inequalities play a main role in pure and applied mathematics. In particular, the following Milne inequality plays an important role in the study of Rosseland’s integral for the stellar absorption, see [1].

**Proposition.** Let  $\phi : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  be a Riemann integrable function with  $\int_0^\infty \phi(x) dx = 1$ . Let  $a_i > 0$  and  $f_i : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  such that  $\phi/f_i$  is a Riemann integrable function on  $(0, \infty)$  for  $1 \leq i \leq n$ . Then,

$$\frac{1}{\int_0^\infty \frac{\phi(x) dx}{a_1 f_1(x) + \dots + a_n f_n(x)}} \geq \frac{a_1}{\int_0^\infty \frac{\phi(x) dx}{f_1(x)}} + \dots + \frac{a_n}{\int_0^\infty \frac{\phi(x) dx}{f_n(x)}}.$$

In this work we prove the following generalization of Milne inequality:

**Theorem.** Let  $\mu$  be a measure on the space  $X$ ,  $a_n \geq 0$  and  $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$  measurable functions for  $n \geq 1$ . Then,

$$\frac{1}{\int_X \frac{d\mu(x)}{\sum_{n=1}^\infty a_n f_n(x)}} \geq \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{\int_X \frac{d\mu(x)}{f_n(x)}}.$$

The proof of this inequality appears in the paper [2].

### References

- [1] E. A. Milne (1925). Note on Rosseland’s integral for the stellar absorption. Monthly Notic. Royal Astron. Soc., 85, 979-984.
- [2] J. M. Rodríguez, J. M. Sigarreta, E. Tourís (2023). New Milne-type inequalities via fractional calculus. Submitted.

**Acknowledgments:** This work is part of the grant PID2019-106433GB-I00 funded by Agencia Estatal de Investigación MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033, Spain.

ROTATIONAL SURFACES WITH PRESCRIBED CURVATURES

MEASURE-PRESERVING MAPPINGS FROM THE UNIT CUBE TO SPHERES...

LOOKING AT WELFARE FROM A MATHEMATICAL APPROACH BASED...

PROPUESTA DE INTERVENCIÓN BASADA EN MATHIGNON...

MEHLER–HEINE ASYMPTOTICS FOR THE MEIJER G-FUNCTION

APPLICATION OF VAN HIELE’S THEORY WITH DYNAMIC GEOMETRY...

EXTENSION CRITERIA FOR INDIVIDUAL RANKINGS REVISITED

ALETHIC MODAL LOGIC IN ARISTOTLE’ ANALYTICS

SEMI-G-PERIODICITY, G-UNIFORM RECURRENCE...

ORTHOGONAL POLYNOMIAL KERNELS USED IN SUPPORT...

ON A MOMENT GENERALIZATION OF SOME CLASSICAL...

COMPLEJOS ELÍPTICOS Y DESCOMPOSICIÓN DE HODGE

JENSEN-TYPE INEQUALITIES FOR M-CONVEX FUNCTIONS...

MINIMAL SURFACES WITH FREE BOUNDARIES...

FUNCIONES ANALÍTICAS QUE INTERPOLAN FAMILIAS...

MODELIZACIÓN ESTADÍSTICA DE ACCIDENTES DE TRÁFICO LABORALES

IMPLEMENTACIÓN DE LOS ODS EN ASIGNATURAS DE ESTADÍSTICA...

NEW CONNECTIONS BETWEEN APPROXIMATION SPACES...

ON SIMULTANEOUS DENSITY ORDER FROM SHIFT INVARIANT...

ÁRBOLES, DESARREGLOS Y FAMILIAS DE CAMINOS...

GREEDINESS AND POLYNOMIALS OF CONSTANT COEFFICIENTS

NEW MILNE-TYPE INEQUALITIES VIA FRACTIONAL CALCULUS

A PROBABILISTIC APPROACH TO MULTIVARIATE TIME FORECASTING...

RECOVERING THE MILITARY ENIGMA USING PERMUTATIONS...

TRANSITION TO TURBULENCE IN A CONVECTION PROBLEM

STABILITY OF SOME ANTICIPATING SEMILINEAR STOCHASTIC...

IMPORTANCIA DE GEOGEBRA EN LA SOLUCIÓN DE MATRICES...



## A Probabilistic Approach to Multivariate Time Forecasting in Industrial Processes

**FERNANDO MIGUÉLEZ, MARÍA DOLORES UGARTE, JOSU DONCEL**

Departamento Estadística, Informática y Matemáticas, Institute for Advanced Materials and Mathematics (INAMAT<sup>2</sup>), Universidad Pública de Navarra  
[fernando.miguel@unavarra.es](mailto:fernando.miguel@unavarra.es)

**Abstract:** Industrial processes contain a massive amount of monitoring data that can be exploited to reveal hidden time losses in the system, leading to enhanced accuracy of maintenance policies and, consequently, increasing the effectiveness of the equipment. In this work, we propose a method for one-step probabilistic multivariate forecasting of time variables based on a Hidden Markov Model with covariates (IO-HMM) that accounts for the correlation of the predicted variables with its past values and additional process measurements. The probabilities within the discrete Markov Chain are updated using Bayesian principles, while the parameter estimates for the continuous model are recursively computed through an adaptive algorithm. This approach permits the integration of new samples into the estimation of unknown parameters, computationally improving the efficiency of the process. We evaluate the performance of the method using a real data set obtained from a company in the food sector; however, it is a versatile technique applicable to any other company. The results show a consistent improvement over a persistence model, which assumes that future values are the same as current values, and over univariate versions of our model.

### SESIONES PÓSTER

ROTATIONAL SURFACES WITH PRESCRIBED CURVATURES

MEASURE-PRESERVING MAPPINGS FROM THE UNIT CUBE TO SPHERES...

LOOKING AT WELFARE FROM A MATHEMATICAL APPROACH BASED...

PROPUESTA DE INTERVENCIÓN BASADA EN MATHIGON...

MEHLER-HEINE ASYMPTOTICS FOR THE MEIJER G-FUNCTION

APPLICATION OF VAN HIELE'S THEORY WITH DYNAMIC GEOMETRY...

EXTENSION CRITERIA FOR INDIVIDUAL RANKINGS REVISITED

ALETHIC MODAL LOGIC IN ARISTOTLE' ANALYTICS

SEMI-C-PERIODICITY, C-UNIFORM RECURRENCE...

ORTHOGONAL POLYNOMIAL KERNELS USED IN SUPPORT...

ON A MOMENT GENERALIZATION OF SOME CLASSICAL...

COMPLEJOS ELÍPTICOS Y DESCOMPOSICIÓN DE HODGE

JENSEN-TYPE INEQUALITIES FOR M-CONVEX FUNCTIONS...

MINIMAL SURFACES WITH FREE BOUNDARIES...

FUNCIONES ANALÍTICAS QUE INTERPOLAN FAMILIAS...

MODELIZACIÓN ESTADÍSTICA DE ACCIDENTES DE TRÁFICO LABORALES

IMPLEMENTACIÓN DE LOS ODS EN ASIGNATURAS DE ESTADÍSTICA...

NEW CONNECTIONS BETWEEN APPROXIMATION SPACES...

ON SIMULTANEOUS DENSITY ORDER FROM SHIFT INVARIANT...

ÁRBOLES, DESARREGLOS Y FAMILIAS DE CAMINOS...

GREEDINESS AND POLYNOMIALS OF CONSTANT COEFFICIENTS

NEW MILNE-TYPE INEQUALITIES VIA FRACTIONAL CALCULUS

A PROBABILISTIC APPROACH TO MULTIVARIATE TIME FORECASTING...

RECOVERING THE MILITARY ENIGMA USING PERMUTATIONS...

TRANSITION TO TURBULENCE IN A CONVECTION PROBLEM

STABILITY OF SOME ANTICIPATING SEMILINEAR STOCHASTIC...

IMPORTANCIA DE GEOGEBRA EN LA SOLUCIÓN DE MATRICES...

## Recovering the military Enigma using permutations, filling in the details of Rejewski's solution

PAZ JIMÉNEZ SERAL, MANUEL VÁQUEZ LAPUENTE

Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza

[paz@unizar.es](mailto:paz@unizar.es)

**Abstract:** During the last few months of 1932, the Polish mathematician Marian Rejewski solved the problem of finding the internal connections of the rotors and reflector of the Enigma cipher machine used by the German army at that time. This allowed the Polish Cipher Bureau to construct an analogue of the machine, and subsequently to find effective methods for deciphering secret messages. Rejewski performed this feat virtually alone using cryptographic material provided by the Polish secret services. His knowledge of the theory of permutation groups was essential in solving this problem. This article describes in detail how to find the complete wiring of the rotors and reflector of Enigma, as well as other specifics, using data that Rejewski had at his disposal, by systematically presenting the resolution of all cases that could have been encountered. Similarly, we complete those stages of the procedure that were only outlined by Rejewski.

### References

- [1] Rejewski, M. (1981). How polish mathematicians deciphered the Enigma, *Annals of the History of Computing* 3(3): 213-234.
- [2] Rejewski, M. (2011). *Memories of my work at the Cipher Bureau of the General Staff Second Department 1930-1945*. Poznan (Poland): Adam Mickiewicz University Press.Proceedings.

### SESIONES PÓSTER

ROTATIONAL SURFACES WITH PRESCRIBED CURVATURES

MEASURE-PRESERVING MAPPINGS FROM THE UNIT CUBE TO SPHERES...

LOOKING AT WELFARE FROM A MATHEMATICAL APPROACH BASED...

PROPUESTA DE INTERVENCIÓN BASADA EN MATHIGNON...

MEHLER-HEINE ASYMPTOTICS FOR THE MEIJER G-FUNCTION

APPLICATION OF VAN HIELE'S THEORY WITH DYNAMIC GEOMETRY...

EXTENSION CRITERIA FOR INDIVIDUAL RANKINGS REVISITED

ALETHIC MODAL LOGIC IN ARISTOTLE' ANALYTICS

SEMI-G-PERIODICITY, G-UNIFORM RECURRENCE...

ORTHOGONAL POLYNOMIAL KERNELS USED IN SUPPORT...

ON A MOMENT GENERALIZATION OF SOME CLASSICAL...

COMPLEJOS ELÍPTICOS Y DESCOMPOSICIÓN DE HODGE

JENSEN-TYPE INEQUALITIES FOR M-CONVEX FUNCTIONS...

MINIMAL SURFACES WITH FREE BOUNDARIES...

FUNCIONES ANALÍTICAS QUE INTERPOLAN FAMILIAS...

MODELIZACIÓN ESTADÍSTICA DE ACCIDENTES DE TRÁFICO LABORALES

IMPLEMENTACIÓN DE LOS ODS EN ASIGNATURAS DE ESTADÍSTICA...

NEW CONNECTIONS BETWEEN APPROXIMATION SPACES...

ON SIMULTANEOUS DENSITY ORDER FROM SHIFT INVARIANT...

ÁRBOLES, DESARREGLOS Y FAMILIAS DE CAMINOS...

GREEDINESS AND POLYNOMIALS OF CONSTANT COEFFICIENTS

NEW MILNE-TYPE INEQUALITIES VIA FRACTIONAL CALCULUS

A PROBABILISTIC APPROACH TO MULTIVARIATE TIME FORECASTING...

RECOVERING THE MILITARY ENIGMA USING PERMUTATIONS...

TRANSITION TO TURBULENCE IN A CONVECTION PROBLEM

STABILITY OF SOME ANTICIPATING SEMILINEAR STOCHASTIC...

IMPORTANCIA DE GEÓMETRIA EN LA SOLUCIÓN DE MATRICES...

## Transition to turbulence in a convection problem

DARÍO MARTÍNEZ, HENAR HERRERO, FRANCISCO PLA

Departamento Matemáticas, Universidad de Castilla-La Mancha

[dario.martinez@uclm.es](mailto:dario.martinez@uclm.es)

**Resumen:** En este trabajo se muestran algunos resultados de interés para el problema de convección de Rayleigh-Bénard con números de Prandtl grandes [1]. Para la resolución numérica del problema se ha utilizado un método de descomposición de dominios de Schwarz junto a un método de colocación de Legendre-Gauss-Lobatto. La colocación de Legendre es un método mal condicionado, pero gracias al método de descomposición de dominios de Schwarz se pueden alcanzar soluciones turbulentas.

Son éstas soluciones de inicio de la turbulencia las que se busca mostrar en este trabajo. Para alcanzar la turbulencia, se ha ido estudiando la evolución de las soluciones al aumentar el número de Rayleigh con un método de continuación. Partiendo de una solución inicial en  $Ra = 1300$  con tres rollos, la solución evoluciona de manera estacionaria como aparece en [2] hasta alcanzar un estado de intermitencia entre turbulencia y laminar. Para estas condiciones, se encuentra que la primera aparición de un régimen turbulento se produce para  $Ra = 2.5 \cdot 10^5$ .

Se denomina estado de intermitencia turbulento-laminar porque las soluciones evolucionan de un estado turbulento a uno laminar y viceversa. Este fenómeno se puede observar en las soluciones a lo largo del tiempo y del número de Rayleigh.

### Referencias

- [1] F. Pla, A. M. Mancho, H. Herrero (2009). Bifurcation phenomena in a convection problem with temperature dependent viscosity at low aspect ratio. *Physica D*, 238, 572-280.
- [2] D. Martínez, F. Pla, H. Herrero, A. Fernández-Pérez (2023). A Schwarz alternating method for an evolution convection problem. *Applied Numerical Mathematics*, 192, 179-196.

ROTATIONAL SURFACES WITH  
PRESCRIBED CURVATURES

MEASURE-PRESERVING MAPPINGS  
FROM THE UNIT CUBE TO SPHERES...

LOOKING AT WELFARE FROM A  
MATHEMATICAL APPROACH BASED...

PROPUESTA DE INTERVENCIÓN  
BASADA EN MATHIGON...

MEHLER-HEINE ASYMPTOTICS FOR  
THE MEIJER G-FUNCTION

APPLICATION OF VAN HIELE'S THEORY  
WITH DYNAMIC GEOMETRY...

EXTENSION CRITERIA FOR INDIVIDUAL  
RANKINGS REVISITED

ALETHIC MODAL LOGIC IN  
ARISTOTLE' ANALYTICS

SEMI-G-PERIODICITY, G-UNIFORM  
RECURRENCE...

ORTHOGONAL POLYNOMIAL KERNELS  
USED IN SUPPORT...

ON A MOMENT GENERALIZATION OF  
SOME CLASSICAL...

COMPLEJOS ELÍPTICOS Y  
DESCOMPOSICIÓN DE HODGE

JENSEN-TYPE INEQUALITIES FOR  
M-CONVEX FUNCTIONS...

MINIMAL SURFACES WITH FREE  
BOUNDARIES...

FUNCIONES ANALÍTICAS QUE  
INTERPOLAN FAMILIAS...

MODELIZACIÓN ESTADÍSTICA DE  
ACCIDENTES DE TRÁFICO LABORALES

IMPLEMENTACIÓN DE LOS ODS EN  
ASIGNATURAS DE ESTADÍSTICA...

NEW CONNECTIONS BETWEEN  
APPROXIMATION SPACES...

ON SIMULTANEOUS DENSITY ORDER  
FROM SHIFT INVARIANT...

ÁRBOLES, DESARREGLOS Y FAMILIAS  
DE CAMINOS...

GREEDINESS AND POLYNOMIALS OF  
CONSTANT COEFFICIENTS

NEW MILNE-TYPE INEQUALITIES VIA  
FRACTIONAL CALCULUS

A PROBABILISTIC APPROACH TO  
MULTIVARIATE TIME FORECASTING...

RECOVERING THE MILITARY ENIGMA  
USING PERMUTATIONS...

TRANSITION TO TURBULENCE IN A  
CONVECTION PROBLEM

STABILITY OF SOME ANTICIPATING  
SEMILINEAR STOCHASTIC...

IMPORTANCIA DE GEOGEBRA EN LA  
SOLUCIÓN DE MATRICES...

# Stability of Some Anticipating Semilinear Stochastic Differential Equations of Skorohod Type

JOSEP VIVES

Departament de Matemàtica Econòmica, Financiera i Actuarial. Universitat de Barcelona  
[josep.vives@ub.edu](mailto:josep.vives@ub.edu)

**Abstract:** We study different types of stability of the solution of a semi-linear anticipating stochastic differential equation driven by a Brownian motion, with a random variable as initial condition. The involved stochastic integral is the Skorohod one. Being the initial condition random, we need to redefine the stability concepts. The new stability criteria depend on the derivative of the initial condition in the Malliavin calculus sense. The talk is based on the paper [1].

## References

- [1] J. A. León, D. Márquez-Carreras and J. Vives (2023). Stability of Some Anticipating Semilinear Stochastic Differential Equations of Skorohod Type. Accepted in Journal of Dynamics and Differential Equations.

## SESIONES PÓSTER

ROTATIONAL SURFACES WITH  
PRESCRIBED CURVATURES

MEASURE-PRESERVING MAPPINGS  
FROM THE UNIT CUBE TO SPHERES...

LOOKING AT WELFARE FROM A  
MATHEMATICAL APPROACH BASED...

PROPUESTA DE INTERVENCIÓN  
BASADA EN MATHIGON...

MEHLER-HEINE ASYMPTOTICS FOR  
THE MEIJER G-FUNCTION

APPLICATION OF VAN HIELE'S THEORY  
WITH DYNAMIC GEOMETRY...

EXTENSION CRITERIA FOR INDIVIDUAL  
RANKINGS REVISITED

ALETHIC MODAL LOGIC IN  
ARISTOTLE' ANALYTICS

SEMI-G-PERIODICITY, G-UNIFORM  
RECURRENCE...

ORTHOGONAL POLYNOMIAL KERNELS  
USED IN SUPPORT...

ON A MOMENT GENERALIZATION OF  
SOME CLASSICAL...

COMPLEJOS ELÍPTICOS Y  
DESCOMPOSICIÓN DE HODGE

JENSEN-TYPE INEQUALITIES FOR  
M-CONVEX FUNCTIONS...

MINIMAL SURFACES WITH FREE  
BOUNDARIES...

FUNCIONES ANALÍTICAS QUE  
INTERPOLAN FAMILIAS...

MODELIZACIÓN ESTADÍSTICA DE  
ACCIDENTES DE TRÁFICO LABORALES

IMPLEMENTACIÓN DE LOS ODS EN  
ASIGNATURAS DE ESTADÍSTICA...

NEW CONNECTIONS BETWEEN  
APPROXIMATION SPACES...

ON SIMULTANEOUS DENSITY ORDER  
FROM SHIFT INVARIANT...

ÁRBOLES, DESARREGLOS Y FAMILIAS  
DE CAMINOS...

GREEDINESS AND POLYNOMIALS OF  
CONSTANT COEFFICIENTS

NEW MILNE-TYPE INEQUALITIES VIA  
FRACTIONAL CALCULUS

A PROBABILISTIC APPROACH TO  
MULTIVARIATE TIME FORECASTING...

RECOVERING THE MILITARY ENIGMA  
USING PERMUTATIONS...

TRANSITION TO TURBULENCE IN A  
CONVECTION PROBLEM

STABILITY OF SOME ANTICIPATING  
SEMILINEAR STOCHASTIC...

IMPORTANCIA DE GEOGEBRA EN LA  
SOLUCIÓN DE MATRICES...

## Importancia de Geogebra en la Solución de Matrices y Sistemas de Ecuaciones

TILCIA ANABEL ARROCHA, ENELDA SANTAMARÍA M.

Departamento de Matemática, Universidad de Panamá

[ana6302@gmail.com](mailto:ana6302@gmail.com)

**Resumen:** La Matemática siempre ha sido una asignatura complicada para muchos. El hacerla más visual y comprensible debe ser la meta de todo facilitador de Matemática. Para ayudar a esta comprensión podemos apoyarnos en las TIC. Dentro de ellas podemos encontrar una infinidad de herramientas que faciliten y conviertan el momento de las clases mucho más interesantes de forma visual, pero el que más destaca por su fácil manejo y la amplitud de procesos que se pueden lograr, es el software de GEOGEBRA. Considerado, por diversos autores, como un excelente instrumento para trabajar el desarrollo de las situaciones planteadas con mayor rapidez. La idea de este trabajo es exponer diferentes métodos gráficos mediante GEOGEBRA sobre problemas, cuya solución se muestra en el plano tridimensional. Será el objetivo final, hacer sencillo y ameno todo este proceso de aprendizaje con nuestros estudiantes.

### Referencias

- [1] M. Chankseliani, T. Mccowan (2021). Higher education and the sustainable development goals. *Higher Education*, 81, 1-8.
- [2] T. L. Owens (2017). Higher education in the sustainable development goals framework. *European Journal of Education*, 52, 414-420.

### SESIONES PÓSTER

ROTATIONAL SURFACES WITH PRESCRIBED CURVATURES

MEASURE-PRESERVING MAPPINGS FROM THE UNIT CUBE TO SPHERES...

LOOKING AT WELFARE FROM A MATHEMATICAL APPROACH BASED...

PROPUESTA DE INTERVENCIÓN BASADA EN MATHIGON...

MEHLER-HEINE ASYMPTOTICS FOR THE MEIJER G-FUNCTION

APPLICATION OF VAN HIELE'S THEORY WITH DYNAMIC GEOMETRY...

EXTENSION CRITERIA FOR INDIVIDUAL RANKINGS REVISITED

ALETHIC MODAL LOGIC IN ARISTOTLE' ANALYTICS

SEMI-G-PERIODICITY, C-UNIFORM RECURRENCE...

ORTHOGONAL POLYNOMIAL KERNELS USED IN SUPPORT...

ON A MOMENT GENERALIZATION OF SOME CLASSICAL...

COMPLEJOS ELÍPTICOS Y DESCOMPOSICIÓN DE HODGE

JENSEN-TYPE INEQUALITIES FOR M-CONVEX FUNCTIONS...

MINIMAL SURFACES WITH FREE BOUNDARIES...

FUNCIONES ANALÍTICAS QUE INTERPOLAN FAMILIAS...

MODELIZACIÓN ESTADÍSTICA DE ACCIDENTES DE TRÁFICO LABORALES

IMPLEMENTACIÓN DE LOS ODS EN ASIGNATURAS DE ESTADÍSTICA...

NEW CONNECTIONS BETWEEN APPROXIMATION SPACES...

ON SIMULTANEOUS DENSITY ORDER FROM SHIFT INVARIANT...

ÁRBOLES, DESARREGLOS Y FAMILIAS DE CAMINOS...

GREEDINESS AND POLYNOMIALS OF CONSTANT COEFFICIENTS

NEW MILNE-TYPE INEQUALITIES VIA FRACTIONAL CALCULUS

A PROBABILISTIC APPROACH TO MULTIVARIATE TIME FORECASTING...

RECOVERING THE MILITARY ENIGMA USING PERMUTATIONS...

TRANSITION TO TURBULENCE IN A CONVECTION PROBLEM

STABILITY OF SOME ANTICIPATING SEMILINEAR STOCHASTIC...

IMPORTANCIA DE GEOGEBRA EN LA SOLUCIÓN DE MATRICES...

# MESAS REDONDAS

## MESAS REDONDAS

PRESENTE Y FUTURO DE LOS  
CRITERIOS DE EVALUACIÓN DE LA  
INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS

OPORTUNIDADES DE  
FINANCIACIÓN DEL ERC  
EN MATEMÁTICAS

EDUCACIÓN MATEMÁTICA PARA  
LOS RETOS DEL SIGLO XXI

## Presente y futuro de los criterios de evaluación de la investigación en matemáticas

Organiza:

COMISIÓN DE PUBLICACIONES Y COMISIÓN DE JÓVENES DE RSME

La Comisión de Jóvenes y la Comisión de Publicaciones de la RSME organizan de manera conjunta la celebración de una mesa redonda sobre la evaluación de la investigación en matemáticas en España bajo el título de “Presente y futuro de los criterios de evaluación de la investigación en matemáticas”.

La cuestión de cómo se debe evaluar el trabajo que realizan nuestros investigadores lleva tiempo siendo un tema candente, pero en los últimos meses está alcanzando un punto de ebullición que puede provocar cambios a (relativamente) corto plazo. Entre otros factores que están provocando que el debate aumente, destaca el creciente impacto que están teniendo las revistas depredadoras en el sistema editorial, hecho sobre el que se ha posicionado recientemente la RSME, denunciando la situación y planteando posibles líneas de actuación. También destaca la firma por parte de múltiples sociedades internacionales de distintas declaraciones y manifiestos sobre la evaluación de la producción científica, como la *San Francisco Declaration on Research Assessment* (DORA), a la que la ANECA se ha adherido recientemente. Y no podemos ignorar el creciente conocimiento público de las deficiencias de nuestro sistema científico, reflejadas en una serie de artículos recientes, publicados en diversos periódicos, que ahondan sobre diversas prácticas fraudulentas alimentadas por el sistema de evaluación actual.

El objetivo de la mesa redonda es fomentar este debate, con personas que comprendan cómo funciona el sistema de evaluación, las carencias que presenta y las posibles formas de mejorarlo. También cabe destacar que los potenciales cambios tendrán un mayor impacto en las carreras de los investigadores jóvenes, de modo que su participación en este debate resulta imprescindible. Así, los ponentes que intervendrán en la mesa serán los siguientes:

- Ujué Etayo, profesora ayudante doctora en la Universidad de Cantabria.
- Elisenda Feliú, catedrática de la Universidad de Copenhague y miembro del panel de matemáticas de la AEI.
- Joaquim Ortega-Cerdá, catedrático de la Universitat de Barcelona y editor de la Revista Matemática Iberoamericana.
- Pilar Paneque, presidenta de la ANECA.
- Alberto Rodríguez Vázquez, investigador posdoctoral en KU Leuven.
- Luz Roncal, investigadora en el BCAM y miembro de la Comisión de Publicaciones (moderadora de la mesa redonda).

MARTES, 23 DE ENERO:  
18:30 – 20:00

MESAS REDONDAS

PRESENTE Y FUTURO DE LOS  
CRITERIOS DE EVALUACIÓN DE LA  
INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS

OPORTUNIDADES DE  
FINANCIACIÓN DEL ERC  
EN MATEMÁTICAS

EDUCACIÓN MATEMÁTICA PARA  
LOS RETOS DEL SIGLO XXI

## Oportunidades de financiación del ERC en matemáticas

Organiza:  
RAFAEL TESORO (ERC Scientific Officer)

En el Congreso Bienal de la RSME en 2024 en Pamplona, el Consejo Europeo de Investigación organiza una mesa redonda acerca de oportunidades de financiación en matemáticas por el ERC, incluyendo novedades en las convocatorias de 2024 y aspectos de la preparación y evaluación de propuestas. Con la participación de *grantees* del ERC.

El Consejo Europeo de Investigación (ERC por sus siglas en inglés), creado por la Unión Europea en 2007, es la principal organización europea de financiación de la investigación en las fronteras del conocimiento. Financia a investigadores creativos de cualquier nacionalidad y edad para que lleven a cabo proyectos en toda Europa.

El ERC ofrece 4 programas básicos de subvenciones: *Starting Grants*, *Consolidator Grants*, *Advanced Grants* y *Synergy Grants*. Con su programa adicional de subvenciones para *Proof of Concept*, el ERC ayuda a los *grantees* a explorar el potencial de innovación de sus ideas o de los resultados de su investigación.

El ERC está dirigido por un órgano de gobierno independiente, el Consejo Científico. Desde el 1 de noviembre de 2021, Maria Leptin es la presidenta del ERC. El presupuesto global del ERC para el período 2021-2027 supera los 16.000 millones de euros, como parte del programa Horizonte Europa, bajo la responsabilidad de la Comisaria Europea de Innovación, Investigación, Cultura, Educación y Juventud, Iliana Ivanova.

La misión del ERC es fomentar la investigación de la más alta calidad en Europa a través de financiación competitiva y apoyar la investigación de vanguardia impulsada por investigadores en todos los campos, basada en la excelencia científica.

Uno de los principios del ERC es que no hay líneas de investigación preestablecidas, son los investigadores los que mejor saben qué ideas explorar.

En la Unión Europea, hay dos estrategias principales de financiación a la investigación, según su enfoque: «top-down» y «bottom-up». Estas estrategias se emplean en conjunto para avanzar en el conocimiento y abordar los desafíos actuales y futuros. En el enfoque «top-down», las prioridades y temas de investigación son definidos por la Comisión Europea y buscan abordar desafíos específicos y definidos previamente,

MIÉRCOLES, 24 DE ENERO:  
10:00 – 11:00

MESAS REDONDAS

PRESENTE Y FUTURO DE LOS  
CRITERIOS DE EVALUACIÓN DE LA  
INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS

OPORTUNIDADES DE  
FINANCIACIÓN DEL ERC  
EN MATEMÁTICAS

EDUCACIÓN MATEMÁTICA PARA  
LOS RETOS DEL SIGLO XXI



alineados con las prioridades políticas y socioeconómicas de la UE. Es el caso de Programas como Horizonte 2020 o su sucesor, Horizonte Europa, dentro de las rúbricas *Desafíos Globales y Competitividad Industrial Europea* y *Europa Innovadora*. En el enfoque «bottom-up», los investigadores tienen la libertad de proponer temas y proyectos de investigación basados en sus intereses y experiencia, sin un marco temático predefinido. Este enfoque fomenta la exploración de nuevas ideas y campos. Es lo que se denomina *Ciencia Excelente* dentro del Programa Horizonte Europa y tiene aproximadamente un 17% del presupuesto global del programa, incluyendo al Consejo Europeo de Investigación.

España es un buen referente en investigación, con muy buenos investigadores, reconocidos mundialmente. Desde el ERC hemos financiado hasta la fecha casi 1.000 proyectos con investigadores españoles por un importe total cercano a los 1.500 millones de euros, habiendo evaluado más de 10.000 propuestas.

El panel de Matemáticas (con código “PE1” en la jerga del ERC) financia proyectos de investigación en todas las áreas de las matemáticas, puras y aplicadas, además de los fundamentos matemáticos de la informática, la física matemática y la estadística.

## MESAS REDONDAS

PRESENTE Y FUTURO DE LOS  
CRITERIOS DE EVALUACIÓN DE LA  
INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICASOPORTUNIDADES DE  
FINANCIACIÓN DEL ERC  
EN MATEMÁTICASEDUCACIÓN MATEMÁTICA PARA  
LOS RETOS DEL SIGLO XXI

## Educación Matemática para los retos del siglo XXI

Organiza:  
COMISIÓN DE EDUCACIÓN DE RSME

El nuevo currículo de educación secundaria, los nuevos intereses laborales de los egresados en Matemáticas o la irrupción de herramientas de inteligencia artificial requieren repensar el modelo educativo para la enseñanza de las matemáticas en educación secundaria y superior. El objetivo de esta mesa redonda es contrastar diferentes perspectivas sobre una problemática que involucra a docentes de educación secundaria, profesorado de educación superior de los grados de matemáticas y afines, pero también a investigadores, estudiantes del grado y a responsables de política educativa.

La sociedad del siglo XXI plantea entornos de creciente complejidad y dinamismo que obligan a la ciudadanía a enfrentar desafíos globales. En este escenario, se requiere que los individuos no solo dominen el conocimiento y la aplicación de procedimientos automatizados, sino que también exhiban habilidades que vayan más allá de dichas competencias. Por ende, la formación de las personas debe abarcar el desarrollo de destrezas como el razonamiento lógico, el pensamiento crítico, el análisis de consecuencias y la resolución de problemas en diversos contextos. Estas habilidades deben ser fomentadas en todos los niveles de la educación obligatoria.

En este contexto, han surgido diversas corrientes que abogan por la enseñanza integrada de diversas disciplinas como medio para resaltar la interconexión y aplicabilidad de distintos campos de conocimiento. Una de las perspectivas más notables es la enmarcada en STEM, la cual propugna el aprendizaje coordinado de las Ciencias, la Tecnología, la Ingeniería y las Matemáticas. Esta perspectiva se refleja también en el nuevo currículo de la Ley Orgánica de Modificación de la Ley Orgánica de Educación (LOMLOE, Ley 3/2020, de 29 de diciembre), donde se incluye la competencia STEM como una de las competencias clave a desarrollar en todas las etapas educativas de la educación obligatoria y del bachillerato.

Desde la perspectiva de la enseñanza de las matemáticas en la educación obligatoria, esta nueva visión que integra las matemáticas en un ámbito científico-tecnológico más amplio plantea la necesidad de una profunda reflexión sobre la cantidad y las características del contenido matemático a abordar en el aula. Este enfoque impone un desafío doble en el proceso de aprendizaje (Rodríguez-Muñiz y cols., 2022). En

MIÉRCOLES, 24 DE ENERO:  
11:30 – 13:00

MESAS REDONDAS

PRESENTE Y FUTURO DE LOS  
CRITERIOS DE EVALUACIÓN DE LA  
INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS

OPORTUNIDADES DE  
FINANCIACIÓN DEL ERC  
EN MATEMÁTICAS

EDUCACIÓN MATEMÁTICA PARA  
LOS RETOS DEL SIGLO XXI

primer lugar, es imperativo asegurar la adquisición y desarrollo de conceptos, procedimientos y razonamientos matemáticos fundamentales, que tradicionalmente han sido el enfoque principal en la enseñanza de las matemáticas escolares. En segundo lugar, se requiere considerar la introducción de estas ideas, así como la aplicación de procedimientos y razonamientos, dentro del lenguaje y los objetivos de otras disciplinas, marcando una novedad potenciada por el papel central de las matemáticas en el contexto STEM. Dentro de este marco, resulta relevante reflexionar sobre si la integración de las matemáticas en el ámbito STEM podría diluir su proceso de aprendizaje, reduciéndolas a una mera herramienta instrumental para resolver problemas en otras disciplinas (Comisión Educación RSME, 2023).

En relación a la formación superior, el desafío es, si cabe, mayor, pues hay que abordar una revisión del modelo de formación que garantice que, por un lado, los egresados de los grados de matemáticas estén preparados para las nuevas perspectivas laborales y, por otro, hay que tratar de fomentar las vocaciones docentes para evitar la falta de profesorado con una formación matemática sólida (Cuesta y cols., 2023). Efectivamente, tal y como ya se apuntaba en las conclusiones del encuentro del CEMAT celebrado en 2022 (CEMat, 2022), se constata que hay un bajo número de egresados en matemáticas en relación a la demanda social y la variedad de salidas profesionales y la completa inserción laboral con tasas de paro muy bajas las que han atraído a gran número de estudiantes con un perfil determinado no vinculado a la docencia. Ante esta situación, queremos reflexionar sobre cómo visibilizar la salida profesional docente sin menoscabar el resto de opciones laborales de los egresados en Matemáticas.

## Bibliografía

- Chércoles-Cuesta, I., Ferrando, I., Moreno-Balcázar, J. J., & Ríos-Calle, J. L. (2023). ¿Qué razones explican la falta de matemáticos y matemáticas en la educación secundaria? *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 26(1), 173-187.
- CEMat (2021). Conclusiones de las Jornadas sobre el perfil profesional del docente de matemáticas.
- Comisión de Educación RSME (2023). Enseñanza de las Matemáticas desde un Enfoque Integrado: Reflexiones sobre el Paradigma STEM de la Comisión de Educación de la Real Sociedad Matemática Española. *Revista Debates*, descargado el 21 de noviembre de: [https://www.educa2.madrid.org/web/revistadebates/articulos\\_11/-/visor/ensenanza-de-las-matematicas-desde-un-enfoque-integrado-reflexiones-sobre-el-paradigma-stem-de-la-comision-de-educacion-de-la-real-sociedad-matematica-espanola](https://www.educa2.madrid.org/web/revistadebates/articulos_11/-/visor/ensenanza-de-las-matematicas-desde-un-enfoque-integrado-reflexiones-sobre-el-paradigma-stem-de-la-comision-de-educacion-de-la-real-sociedad-matematica-espanola)
- Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado, núm. 76 (2022).
- Rodríguez Muñoz, L. J., Ferrando Palomares, I., & Montejo Gámez, J. (2022). Oportunidades, retos y necesidades de la educación matemática. *Cuadernos de pedagogía*, 531, 14-19.

MESAS REDONDAS

PRESENTE Y FUTURO DE LOS  
CRITERIOS DE EVALUACIÓN DE LA  
INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICASOPORTUNIDADES DE  
FINANCIACIÓN DEL ERC  
EN MATEMÁTICASEDUCACIÓN MATEMÁTICA PARA  
LOS RETOS DEL SIGLO XXI

# OTRAS ACTIVIDADES

## OTRAS ACTIVIDADES

JORNADAS SOBRE ENSEÑANZA  
DE LAS MATEMÁTICAS Y  
DISCAPACIDAD INTELECTUAL

MATEMÁTICAS A PIE  
DE CALLE

ENIGMA. LA MÁQUINA ENIGMA  
Y LOS MATEMÁTICOS QUE LA  
ROMPIERON

EDUCACIÓN EN ARTE Y  
MATEMÁTICAS

OTEIZA Y LAS MATEMÁTICAS:  
RELATOS GEOMÉTRICOS EN LA  
OBRA DE JÓRGE OTEIZA

## JORNADAS SOBRE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y DISCAPACIDAD INTELECTUAL

**El reto de acercarse al alumnado con Discapacidad Intelectual abre un nuevo enfoque en la enseñanza de las Matemáticas para todo el Alumnado**

Organiza:

INMACULADA LIZASOAIN IRISO  
(Universidad Pública de Navarra)

### 1. Contexto: Proyecto europeo ANFoMAM

La preocupación internacional por el tema de la formación matemática de los futuros docentes ha ido creciendo en los últimos años. Algunos estudios (Gellert, U., 2005) constatan que esta formación resulta más efectiva cuando en la universidad se aprenden las cosas de una forma semejante a la que sería deseable como práctica escolar. Con el fin de diseñar propuestas concretas para la formación inicial y continua de los maestros en forma de talleres, que fueran fácilmente trasladables a las aulas escolares, la Universidad Pública de Navarra (UPNA) coordinó el proyecto ANFoMAM (Aprender de los niños para formar a los maestros en el área de Matemáticas), en el que participaron otras tres universidades europeas (Universidad de Zaragoza, Universidad Roma Tre y Universidad de Burdeos) y dos instituciones que trabajan 'a pie de calle', una de ellas con docentes de todas las etapas de enseñanza obligatoria (ToKalon, en Italia) y la otra con niños y niñas con Síndrome de Down (Sesdown en Zaragoza, España). Las propuestas docentes elaboradas dentro de dicho proyecto, así como los trabajos de investigación relacionados con el mismo, se pueden encontrar en la página web de la UPNA (<https://www.unavarra.es/anfomam>).

Previamente, la UPNA había participado en proyectos de Innovación Docente promovidos por la Universidad de Zaragoza, en los que los métodos de enseñanza que se estaban poniendo en práctica con el alumnado con Síndrome de Down en la Asociación Sesdown servían de inspiración para promover una enseñanza de las matemáticas que abordara seriamente las dificultades que este alumnado encuentra en el aprendizaje de las matemáticas. Además de su particular ritmo de aprendizaje, existe una dificultad documentada en el trabajo con la aritmética (Faraguer, 2014) y, en particular, con el cálculo con cifras, tema en el que se suele basar la enseñanza de las matemáticas en las primeras etapas escolares.

Sin embargo, los niños y niñas con Síndrome de Down comparten con el resto una intuición geométrica latente, con la cual es posible mejorar y reforzar su conocimiento de los números (Gil Clemente y Cogolludo, 2019). El diseño de propuestas didácticas

MIÉRCOLES, JUEVES Y VIERNES, 24-26 DE ENERO:  
17:30 – 20:00

OTRAS ACTIVIDADES

JORNADAS SOBRE ENSEÑANZA  
DE LAS MATEMÁTICAS Y  
DISCAPACIDAD INTELECTUAL

MATEMÁTICAS A PIE  
DE CALLE

ENIGMA. LA MÁQUINA ENIGMA  
Y LOS MATEMÁTICOS QUE LA  
ROMPIERON

EDUCACIÓN EN ARTE Y  
MATEMÁTICAS

OTEIZA Y LAS MATEMÁTICAS:  
RELATOS GEOMÉTRICOS EN LA  
OBRA DE JÓRGE OTEIZA

que parten de la intuición geométrica del alumnado para hacer más comprensibles los conceptos matemáticos básicos es uno de los pilares en los que se ha basado el proyecto ANFoMAM. Nos integramos así en el paradigma inclusivo, que demanda que “en vez de prestar ayuda y apoyo extra a las personas identificadas con necesidades educativas especiales, centremos la atención en trabajar con los maestros y maestras para ayudarles a incrementar el uso de estrategias educativas que puedan utilizar en clase para todos sus alumnos” (cita textual de Ainscow (2001) recogida en Gallego, 2015, p.17).

## 2. Jornadas sobre Enseñanza de las Matemáticas y Discapacidad Intelectual

En el Congreso Bienal de la RSME 2024, se ha incluido una actividad satélite dedicada a la enseñanza de las matemáticas con el enfoque descrito arriba, destinada a docentes de Educación Infantil y Primaria, así como a estudiantes de los Grados en Maestro en estas etapas. Esta actividad satélite incluye charlas sobre enseñanza de las matemáticas, así como talleres en los que los participantes han podido experimentar en primera persona el disfrute de un aprendizaje de las matemáticas activo y pleno de sentido, fácilmente trasladable a las aulas escolares. Las charlas han estado a cargo de las profesoras universitarias Ana Millán Gasca (Universidad Roma Tré) y Elena Gil Clemente (Universidad de Zaragoza), que han disertado sobre cómo transmitir en las aulas escolares el carácter humanístico y humano de las matemáticas, así como su vinculación con las distintas sociedades y civilizaciones donde han ido apareciendo a lo largo de la Historia. En los talleres, en los que han participado las profesoras universitarias Valentina Celi (Universidad de Burdeos), Raquel García Catalán (Universidad Pública de Navarra), Francesca Neri e Isabella Fascitiello (Universidad Roma Tré), se han puesto en práctica diversas actividades que han transportado a los asistentes a un mundo escolar en el que las matemáticas se muestran como un elemento más que ayude, no solo al alumnado con discapacidad intelectual, sino a todo él, a entender mejor el mundo en el que vive así como a relacionarse más intensamente con las personas con las que les toca vivir.

### Bibliografía

- Faragher, R., Clarke, B.(eds) (2014). *Educating learners with Down Syndrome*. New York: Routledge.
- Gil Clemente, E., Cogolludo-Agustín, J.I. (2019) The Effectiveness of Teaching Geometry to Enhance Mathematical Understanding in Children with Down Syndrome, *International Journal of Disability, Development and Education*, 66:2, 186-205, DOI: [10.1080/1034912X.2019.1571171](https://doi.org/10.1080/1034912X.2019.1571171)
- Gallego, C. (2015). Conceptualización y evolución de la atención a la diversidad. En J.M. Fernández Batanero. *Atención a la diversidad en el aula de educación infantil*. Madrid: Paraninfo.
- Gellert, U. (2005) “La formación docente entre lo teórico y lo práctico” en *Educación Matemática y Formación de profesores. Propuesta para Europa y Latinoamérica*. Editores Gómez Chacón, I. & Planchart, E. Universidad de Deusto, Bilbao, España.

OTRAS ACTIVIDADES

JORNADAS SOBRE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y DISCAPACIDAD INTELECTUAL

MATEMÁTICAS A PIE DE CALLE

ENIGMA. LA MÁQUINA ENIGMA Y LOS MATEMÁTICOS QUE LA ROMPIERON

EDUCACIÓN EN ARTE Y MATEMÁTICAS

OTEIZA Y LAS MATEMÁTICAS: RELATOS GEOMÉTRICOS EN LA OBRA DE JÓRGE OTEIZA

## Matemáticas a pie de calle

Organiza:

MARÍA JESÚS CAMPIÓN, IRENE PANIELLO, YERAY RODRÍGUEZ, TEO ROLDÁN  
(Universidad Pública de Navarra)

El proyecto divulgativo *Matemáticas a pie de calle* nace con dos objetivos. Por un lado, acercar las matemáticas al público general, y por otro, informar a la sociedad navarra del evento que tendrá lugar en la Universidad Pública de Navarra (UPNA) en enero de 2024. Y es que la UPNA acoge en esta ocasión el congreso bienal de la Real Sociedad Matemática Española (RSME). Para alcanzar estos objetivos se han organizado una exposición matemática en el centro de Pamplona, así como unas charlas divulgativas impartidas por divulgadores de reconocido prestigio.

### Exposición Matemática

La exposición ha acercado las matemáticas al público desde el entretenimiento, el humor, el arte o la animación. Con horario de mañana y de tarde, la muestra ha estado abierta hasta el sábado 18 de noviembre (incluido), con posibilidad de visitas guiadas para centros escolares. Esta actividad se ha completado con un ciclo de conferencias sobre esta ciencia, que ha tenido lugar en este mismo espacio del Casco Viejo de la capital navarra.

La muestra ha querido enseñar matemáticas y mostrar que esta enseñanza se puede iniciar en un programa de televisión, una viñeta humorística, un grabado o una animación. “Las matemáticas son una ciencia difícil, complicada y que requieren trabajo y esfuerzo, ha señalado el comisario de la muestra, Pedro J. Miana Sanz, catedrático de Análisis Matemático de la Universidad de Zaragoza. Estas cualidades son comunes a la ciencia, al arte o al deporte. Pero también son atractivas, interesantes y muy animadas. Su belleza y magia permanentes se encuentran en su increíble aplicabilidad en múltiples aspectos de la realidad y en la abstracción de las teorías más inaccesibles”.

La exposición está dividida en varias secciones temáticas. Así, en el apartado “Demostraciones matemáticas”, se presentan demostraciones animadas y manipulativas de resultados matemáticos como el cuadrado de la suma, el cubo de la suma o el teorema de Pitágoras. En “Viñetas matemáticas”, hay creaciones con contenidos matemáticos de grandes dibujantes como Mingote, Forges, El Roto, o Alberto Montt. En el caso de “Humor matemático en series de animación”, se muestran dieciséis situaciones particulares con contenido matemático que han aparecido en conocidas series de dibujos animados. Y finalmente, en “Secuencias matemáticas”, se aportan

#### OTRAS ACTIVIDADES

JORNADAS SOBRE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y DISCAPACIDAD INTELECTUAL

MATEMÁTICAS A PIE DE CALLE

ENIGMA. LA MÁQUINA ENIGMA Y LOS MATEMÁTICOS QUE LA ROMPIERON

EDUCACIÓN EN ARTE Y MATEMÁTICAS

OTEIZA Y LAS MATEMÁTICAS: RELATOS GEOMÉTRICOS EN LA OBRA DE JÓRGE OTEIZA

tres videos matemáticos de series de televisión donde aparece esta ciencia como elemento central de la trama.

Esta muestra ha sido posible por la colaboración del Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas de la UPNA, la Real Sociedad Matemática Española, la Sociedad Española de Matemática Aplicada, el Instituto Universitario de Investigación de Matemáticas y Aplicaciones de la Universidad de Zaragoza y el Museo de Matemáticas de Aragón. La muestra podrá verse también del 22 de enero al 2 de febrero de 2024 en el edificio de El Sario del campus de Arrosadía en la UPNA.

### Conferencias sobre matemáticas

La exposición se ha completado con un ciclo de conferencias sobre matemáticas que ha tenido lugar durante las semanas de las Ciencias cada tarde en el mismo espacio ocupado por la exposición: Las Salesas (UPNA). El martes, día 14 de noviembre, el profesor de la Universidad del País Vasco, Raúl Ibáñez Torres, impartió la charla *Las matemáticas en el taller del artista*. El jueves, día 16, el catedrático de la Universidad de Zaragoza, Luis Rández García, explicó las relaciones entre *Arte, urbanismo y astronomía*. El viernes, día 17, la profesora de la Universidad de Valencia, Isabel Cordero Carrión, fue la encargada de ofrecer *Matemáticas para codificar el Universo*. Finalmente, el sábado, día 18, el profesor y divulgador Eduardo Sáenz de Cabezón, nos deleitó con *El espejismo de la mayoría*.

El proyecto divulgador *Matemáticas a pie de calle* ha formado parte de las Semanas de la Ciencia, la Tecnología y la Innovación, organizadas en la UPNA por el Vicerrectorado de Proyección Universitaria, Cultura y Divulgación, a través de su Unidad de Cultura Científica, y ha contado con la colaboración de la Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología (FECYT) Ministerio de Ciencia e Innovación. Este proyecto ha formado parte de las actividades pre-congreso de la Real Sociedad Matemática Española (RSME), cuyo congreso bienal tendrá lugar en Pamplona el próximo mes de enero de 2024, y durante el mismo podremos disfrutar de nuevo de la exposición, en este caso en el Edificio El Sario (UPNA).

### Bibliografía

Pedro J. Miana. *Matemáticas a pie de calle*. DL NA 2478-2023.

#### OTRAS ACTIVIDADES

JORNADAS SOBRE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y DISCAPACIDAD INTELECTUAL

MATEMÁTICAS A PIE DE CALLE

ENIGMA. LA MÁQUINA ENIGMA Y LOS MATEMÁTICOS QUE LA ROMPIERON

EDUCACIÓN EN ARTE Y MATEMÁTICAS

OTEIZA Y LAS MATEMÁTICAS: RELATOS GEOMÉTRICOS EN LA OBRA DE JÓRGE OTEIZA



## ENIGMA

### La máquina Enigma y los matemáticos que la rompieron

Organizan

PAZ JIMÉNEZ SERAL Y MANUEL VÁZQUEZ LAPUENTE  
(Universidad de Zaragoza)

Varios años antes del inicio de la Segunda Guerra Mundial, para cifrar mensajes el ejército alemán comenzó a usar una máquina de rotores, la máquina Enigma, lo cual produjo una gran desesperación entre los criptógrafos polacos, incapaces de leer esos mensajes. Entonces, el servicio de inteligencia polaco tuvo el acierto de contratar matemáticos para solucionar ese problema, especialmente a Marian Rejewski. Y lo solucionaron. Fueron capaces de replicar una máquina Enigma y leer mensajes cifrados por los alemanes.

Así comienza una historia, la de Enigma y la de los matemáticos polacos, junto con un equipo de republicanos españoles, el Equipo D, que coincidieron y colaboraron con ellos en Francia. Historia que se entremezcla con la de Alan Turing y su equipo de Bletchley Park, contribuyendo todos ellos a acortar de manera decisiva la duración de la guerra y a facilitar la victoria de los aliados.

Marian Rejewski, en su artículo “Cómo matemáticos polacos rompieron la máquina Enigma”, publicado en 1981, escribió: “El conocimiento de la lengua alemana no era tan útil como el estar familiarizado con las matemáticas. La gran contribución del mayor Pokorny y del capitán Maksymilian Ciezki fue que ellos entendieron, mucho antes que sus adversarios de otras oficinas de cifra, la importancia de requerir a sus criptoanalistas no solo que fueran conocedores de lenguas sino también que fuesen graduados matemáticos”.

Efectivamente, Rejewski en sus memorias presume del curso sobre teoría de grupos que recibió en la Universidad de Poznan, y que le permitió con cierta facilidad construir un modelo matemático de la máquina Enigma basado en permutaciones del conjunto de las 26 letras del alfabeto latino. A partir de allí, y utilizando con profusión la conjugación de permutaciones, en 1932, planteó y resolvió ecuaciones que desembocaron en la solución del problema consistente en encontrar los cableados internos de la Enigma que utilizaba el ejército alemán, problema que los ingleses no fueron capaces de resolver. El “teorema de Rejewski”, sobre la descomposición de permutaciones, y el “teorema que ganó la Segunda Guerra Mundial”, sobre conjugación de ciclos de permutaciones, fueron decisivos para poder construir réplicas de Enigma que facilitaran la posterior rotura de los correspondientes mensajes.

JUEVES, 25 DE ENERO:  
18:30 – 20:00

OTRAS ACTIVIDADES

JORNADAS SOBRE ENSEÑANZA  
DE LAS MATEMÁTICAS Y  
DISCAPACIDAD INTELECTUAL

MATEMÁTICAS A PIE  
DE CALLE

ENIGMA. LA MÁQUINA ENIGMA  
Y LOS MATEMÁTICOS QUE LA  
ROMPIERON

EDUCACIÓN EN ARTE Y  
MATEMÁTICAS

OTEIZA Y LAS MATEMÁTICAS:  
RELATOS GEOMÉTRICOS EN LA  
OBRA DE JÓRGE OTEIZA

Los polacos también diseñaron máquinas y dispositivos que les facilitaron esa tarea. Ciclómetros, para la elaboración de catálogos de permutaciones clasificadas por su tipo; y Bombas, que aprovecharon la debilidad de las permutaciones con puntos fijos.

Desafortunadamente al inicio de la guerra los alemanes modificaron sus propios sistemas de seguridad, especialmente el indicador del mensaje, que era el procedimiento utilizado para enviar la clave del mensaje a través de las ondas, que hicieron ineficaces algunos de los procesos utilizados por los polacos. Es entonces cuando apareció la proverbial figura de Alan Turing.

Turing tuvo dos aportaciones significativas en la hazaña de romper Enigma. Por un lado, escribió unos apuntes en los que reflejó los conocimientos, estrategias y procedimientos para acabar con Enigma, y por otro diseñó un artilugio, que también denominó Bomba, que fue el método más eficaz contra esa máquina.

En orden cronológico primero fue la Bomba y posteriormente los apuntes. Exactamente, en noviembre de 1939, dos meses después de su contratación por Bletchley Park, Turing ya había diseñado los planos e instrucciones para que se pudiera construir su primera Bomba, denominada Victoria. El éxito de la misma fue relativo, solo cuando se consiguió información adicional, por la captura de un barco que disponía de algunas claves de Enigma es cuando Victoria contribuyó a descifrar los primeros mensajes. La Bomba necesitaba mejoras, que las aportó el especialista en geometría algebraica, Gordon Welchman, con su “tablero diagonal”.

La Bomba de Turing, igual que su homónima polaca, explotaba las debilidades de las permutaciones con puntos fijos. Turing, con su punto de vista algorítmico, trató de minimizar la complejidad computacional de la fuerza bruta para encontrar el “clavijero” de la máquina Enigma que se utilizaba cada día en el cifrado de mensajes. Los fundamentos de la Bomba se pueden explicar acudiendo también al lenguaje de las permutaciones.

Mientras las mejoras mencionadas se incorporaban a su Bomba, Turing se dedicó a redactar unos apuntes sobre Enigma, en el verano de 1940. Sin embargo, no fue hasta 1996 cuando se encontró la primera copia de esos apuntes que apareció entre los miles de documentos desclasificados en EEUU por el organismo competente, copia de mala calidad, con páginas ausentes, y párrafos y palabras ilegibles. El título de estos apuntes era *Turing's Treatise on Enigma* y corresponde a la copia que Alan Turing llevó a Estados Unidos en su visita de 1942, para explicar a los criptógrafos norteamericanos sus logros, en especial los obtenidos con sus bombas.

Afortunadamente, en 2016, el National Archives británico desclasificó y publicó otra copia fotográfica, de mejor calidad, de esos apuntes, con un título que se había perdido en la copia americana: *Mathematical theory of Enigma machine*. En la presentación de esta edición el título va acompañado del siguiente comentario: “aunque, curiosamente, estos apuntes realmente no contienen ninguna teoría matemática”. Ciertamente, Turing realizó una presentación de los problemas de Enigma, y de sus soluciones, acudiendo a un lenguaje menos abstracto que el de su colega Rejewski, utilizando abundantes cuadros y ejemplos, a modo de demostraciones, probablemente porque la mayor parte de los criptógrafos ingleses a los que iban dirigidos, no eran matemáticos sino lingüistas.

## OTRAS ACTIVIDADES

JORNADAS SOBRE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y DISCAPACIDAD INTELECTUAL

MATEMÁTICAS A PIE DE CALLE

ENIGMA. LA MÁQUINA ENIGMA Y LOS MATEMÁTICOS QUE LA ROMPIERON

EDUCACIÓN EN ARTE Y MATEMÁTICAS

OTEIZA Y LAS MATEMÁTICAS: RELATOS GEOMÉTRICOS EN LA OBRA DE JÓRGE OTEIZA

## Educación en Arte y Matemáticas

Organiza:

AMAIA ARRIAGA AZCÁRATE, NEREA DE DIEGO MURILLO  
(Universidad Pública de Navarra)

Colabora:

CENTRO DE ARTE CONTEMPORÁNEO DE HUARTE,  
VICERRECTORADO DE PROYECCIÓN UNIVERSITARIA, CULTURA Y DIVULGACIÓN

En colaboración con el proyecto educativo A3 desarrollado por el Centro de Arte Contemporáneo de Huarte, se ha realizado una convocatoria para centros educativos de cualquier nivel de educación formal con el fin de realizar diversas acciones centradas en relacionar de manera amena y educativa las matemáticas y el arte en las aulas.

El programa A3 busca generar un intercambio de conocimientos entre el ámbito educativo y el artístico local para así posibilitar el enriquecimiento de ambos. Guiado por el equipo educativo del Centro Huarte, se invita a un o una artista a realizar un proceso educativo específico que se adapta al contexto y a las necesidades de cada grupo.

Un total de 15 grupos docentes de seis centros escolares de Navarra han resultado seleccionados para participar en este proyecto. Los grupos son de Educación Infantil, primaria, secundaria y Formación Profesional, en euskera y castellano. Los centros educativos a los que pertenecen estos grupos docentes son los siguientes:

- Centro Integrado Escuela de Educadores (Pamplona-Iruña)
- CP Reina Urraca (Artajona)
- CPIP San Jorge Primaria (Pamplona-Iruña)
- CPIP Virgen Blanca (Huarte-Uharte)
- Erreniaga IP (Cizur Mayor-Zizur Nagusia)
- IESO Iñaki Ochoa de Olza (Pamplona-Iruña)

Del 15 al 31 de enero de 2024 se realizará en la Universidad Pública de Navarra, una muestra en la que se expondrán los trabajos realizados en el marco del proyecto educativo A3. La exposición se situará en la sala del Vestíbulo del edificio El Sario.

### OTRAS ACTIVIDADES

JORNADAS SOBRE ENSEÑANZA  
DE LAS MATEMÁTICAS Y  
DISCAPACIDAD INTELECTUAL

MATEMÁTICAS A PIE  
DE CALLE

ENIGMA. LA MÁQUINA ENIGMA  
Y LOS MATEMÁTICOS QUE LA  
ROMPIERON

EDUCACIÓN EN ARTE Y  
MATEMÁTICAS

OTEIZA Y LAS MATEMÁTICAS:  
RELATOS GEOMÉTRICOS EN LA  
OBRA DE JÓRGE OTEIZA

## Oteiza y las Matemáticas: Relatos geométricos en la obra de Jorge Oteiza

CAPÍ CORRALES RODRIGÁÑEZ  
(Universidad Complutense de Madrid)

En el marco del Congreso Bienal RSME 2024 la Dra. Capí Corrales (Universidad Complutense de Madrid) realizará la presentación de su libro *Yo cuando veo esto, pienso esto. Relatos geométricos en la obra de Jorge Oteiza*. Moderará la conferencia Juan Pablo Huércanos, subdirector del Museo Oteiza.

“¿De qué trata el arte? De muy niño, en Orio, donde he nacido, mi abuelo solía llevarnos de paseo a la playa. Yo sentía una enorme atracción por unos grandes hoyos que había en la parte más interior. Solía ocultarme en uno de ellos, acostado, mirando el gran espacio solo del cielo que quedaba sobre mí, mientras desaparecía todo lo que había a mi alrededor. Me sentía profundamente protegido. Otro de los frecuentes paseos con mi abuelo, era al alto de Orio, en el camino a Zarauz. Había un bosque de hayas junto a una cantera pequeña y sin explotar de piedra arenisca. Yo jugaba a golpear pedazos de la piedra arenisca con otra distinta y más dura, y solíamos recoger el polvo más fino producido con esta operación (puramente mecánica al principio) que llevábamos como un gran obsequio a la abuela para la limpieza de los cacharros de la cocina. Me debió interesar este juego, pues logré un pequeño martillo y un clavo muy grueso que mi primo Jaime me convirtió en cincel. Pues bien, la satisfacción inolvidable que se me despertó en la cantera, fue perforar la piedra: descubrir el otro extremo libre del agujero. Mi actividad no consistió en otra cosa que hacer agujeros en todas las piedras que podía. Es ahora que puedo asociar y explicarme estos dos recuerdos. Relacionar mi contemplación del cielo lejano desde el fondo de mi agujero en la arena de la playa, con la fabricación del pequeño vacío, espiritualmente respirable y liberador, del agujero, al alcance de mi mano, en la piedra” (Jorge Oteiza, *Quousque Tandem!*...).

Desde aquellos primeros agujeros *espiritualmente respirables y liberadores* tallados directamente en la piedra hasta sus más sofisticadas colaboraciones arquitectónicas, desde las cajas metafísicas hasta las delicias del laboratorio de tizas, las piezas de Oteiza nos hablan de Tales y Euclides, de Arquímedes y Hilbert, de Kepler y Dehn,

VIERNES, 26 DE ENERO:  
16:30 – 17:30

### OTRAS ACTIVIDADES

JORNADAS SOBRE ENSEÑANZA  
DE LAS MATEMÁTICAS Y  
DISCAPACIDAD INTELECTUAL

MATEMÁTICAS A PIE  
DE CALLE

ENIGMA. LA MÁQUINA ENIGMA  
Y LOS MATEMÁTICOS QUE LA  
ROMPIERON

EDUCACIÓN EN ARTE Y  
MATEMÁTICAS

OTEIZA Y LAS MATEMÁTICAS:  
RELATOS GEOMÉTRICOS EN LA  
OBRA DE JÓRGE OTEIZA

de Zenón y Cantor, de Gauss y Riemann, de Poincaré y Perelman. Desde nuestro origen como especie, hemos utilizado nuestra inteligencia para construir espacios que nos den cobijo, intimidad para sentarnos a pensar(nos) y sentir(nos) o estructuras abstractas en las que ordenar la información extraída en nuestras exploraciones del universo. Todos estos tipos de espacios están estrechamente ligados con la geometría y su evolución a lo largo de los tiempos avanza en paralelo con la evolución de las ideas que marcan el avance de esta disciplina matemática; una evolución cuyo rastro podemos seguir en las piezas de Jorge Oteiza, muchas de las cuales más que objetos son ideas; ideas geométricas.

## OTRAS ACTIVIDADES

**JORNADAS SOBRE ENSEÑANZA  
DE LAS MATEMÁTICAS Y  
DISCAPACIDAD INTELECTUAL****MATEMÁTICAS A PIE  
DE CALLE****ENIGMA. LA MÁQUINA ENIGMA  
Y LOS MATEMÁTICOS QUE LA  
ROMPIERON****EDUCACIÓN EN ARTE Y  
MATEMÁTICAS****OTEIZA Y LAS MATEMÁTICAS:  
RELATOS GEOMÉTRICOS EN LA  
OBRA DE JÓRGE OTEIZA**

# AGRADECIMIENTOS



Universidad Pública de Navarra  
Nafarroako Unibertsitate Publikoa



Departamento de Estadística,  
Informática y Matemáticas  
Estadística, Informátika  
eta Matematika Saia



Instituto Universitario de Investigación  
de Matemáticas  
y Aplicaciones  
Universidad Zaragoza



Fundación "la Caixa"



Instituto de Estadística de Navarra  
Nafarroako Estatistika Erakundea



FUNDACIÓN  
MUSEO  
FUNDAZIO  
MUSEOA



AGRADECIMIENTOS

AGRADECIMIENTOS

TÍTULO: Congreso Bienal de la Real Sociedad Matemática Española. 2024  
RSME 24 – UPNA – Pamplona  
COORDINADORES: María Jesús Campión  
Inmaculada Higuera  
Ana Munárriz  
Irene Paniello  
Yeray Rodríguez  
EDITA: Gobierno de Navarra – Nafarroako Gobernua  
© Gobierno de Navarra – Nafarroako Gobernua  
© Autores  
MAQUETACIÓN: Pretexto  
DEPÓSITO LEGAL DL NA 2805

PRESENTACIÓN

COMITÉS

CONFERENCIAS PLENARIAS

SESIONES ESPECIALES

SESIONES PÓSTER

MESAS REDONDAS

OTRAS ACTIVIDADES

AGRADECIMIENTOS